Corrigé ESSEC 2005eco II par Pierre Veuillez
Ce problème est dans les bordures du programme.
Il va chercher aux limites de ce qui est faisable avec les notions abordées en ECE.
Un outil récurrent dans ce problème est la décomposition de l'espérance pour faire réapparaître la fonction de répartition (méthode utilisée pour la démonstration de l'inégalité de Bienaymé & Tchebichev)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathrm{P}(X=x) \\ &= \sum_{x>a} x\mathrm{P}(X=x) + \sum_{x\leq a} x\mathrm{P}(X=x) \end{aligned}$$

ce qui permet au choix :
Dans $\sum_{x>a} x\mathrm{P}(X=x)$ on a $x>a$ donc

$$\sum_{x>a} x\mathrm{P}(X=x) \geq \sum_{x>a} a\mathrm{P}(X=x) = a\sum_{x>a}\mathrm{P}(X=x)$$

et comme $\sum_{x>a}\mathrm{P}(X=x) = \mathrm{P}(X>a)$ on a (pour X ne prenant que des valeurs positives)

$$E(X) \geq \sum_{x>a} x\mathrm{P}(X=x) \geq a\mathrm{P}(X>a)$$

Dans ce problème, les variables aléatoires sont toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si X est une variable aléatoire réelle, $E(X)$ désigne son espérance. Lorsque $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles, on note, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Préliminaires

1. a) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de même loi, admettant une espérance m.
   (X_n) une suite de variables aléatoires réelles de même loi, admettant une même espérance m et une variance alors, avec $\overline{X_n} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ on a pour tout $\varepsilon > 0$: $\mathrm{P}\left(\left|\overline{X_n} - m\right| > \varepsilon\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$ (convergence en probabilité vers la valeur moyenne)
   b) Soit δ un réel strictement positif et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ tel que l'intervalle $]m-\delta, m+\delta[$ soit inclus dans le complémentaire de A.
   Comme $]m-\delta, m+\delta[\subset \bar{A}$ alors $A \subset \overline{]m-\delta, m+\delta[}$
   Donc $\mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A\right) \leq \mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \overline{]m-\delta, m+\delta[}\right)$
   avec $\frac{S_n}{n} \in \overline{]m-\delta, m+\delta[} \iff \left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon$ et comme $\mathrm{P}\left(\left|\overline{X_n} - m\right| > \varepsilon\right) \to 0$ alors, par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \in A\right) = 0$$

Un exemple discret

Dans cette partie, X est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $0 < p < 1$. $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes le même loi que X. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On rappelle que $P(X=1) = p,\ P(X=0) = 1-p = q$.

1. a) Comme les valeurs de X sont $\{1;0\}$ alors celles de e^{sX} sont $\{1,e^s\}$ donc X (variable finie) a une espérance
et $E(X) = 1\mathrm{P}\left(e^{sX}=1\right) + e^s\mathrm{P}\left(e^{sX}=e^s\right) = (1-p) + pe^s = 1 + p(e^s-1)$
On peut aussi passer par le théorème de transfert : $E\left(e^{sX}\right) = \sum_{k=0}^{1} e^{sk}\mathrm{P}(X=k)$

b) *Conclusion :* $\boxed{\text{On a donc } \varphi(s) = E\left(e^{sX}\right) = 1 + p(e^s-1)}$

2. a) Comme S_n est une somme de variables suivant des lois binomiales indépendantes de même paramètre de succès p alors
Conclusion : $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)}$

b) $S_n(\Omega) = [[0,n]]$ alors $\dfrac{S_n}{n}(\Omega) = \left\{\dfrac{k}{n} \ / \ k \in [[0;n]]\right\}$
et pour tout $k \in [[0;n]]$: $\mathrm{P}\left(\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{k}{n}\right) = \dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$est la loi de la variable aléatoire $\dfrac{S_n}{n}$.

c) Soit s un réel
Comme $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. et $s\frac{S_n}{n} = s\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{s}{n}X_k$
alors $e^{s\frac{S_n}{n}} = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{s}{n}X_k}$ et les X_k étant indépendantes, l'espérance du produit est le produit des espérances :
$E\left(e^{s\frac{S_n}{n}}\right) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} E\left(e^{\frac{s}{n}X_k}\right)$ avec $E\left(e^{\frac{s}{n}X_k}\right) = \varphi\left(\frac{s}{n}\right)$ (en substituant $\frac{s}{n}$ à s) et finalement
Conclusion : $\boxed{E\left(e^{s\frac{S_n}{n}}\right) = (\varphi(s/n))^n \ .}$

Soit a un réel fixé de $]0,1[$.

3. a) On note $K_a = \left\{k \in [[0,n]] \ , \ \frac{k}{n} \geq a\right\}$. Soit s un réel positif.
D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E\left(e^{s\frac{S_n}{n}}\right) &= \sum_{k\in S_n(\Omega)} e^{s\frac{k}{n}}\mathrm{P}(S_n=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{s\frac{k}{n}}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \\ &= \sum_{k\in K_a} e^{s\frac{k}{n}}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} + \sum_{k\notin K_a} e^{s\frac{k}{n}}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \end{aligned}$$

les termes de la seconde somme étant positifs,

$$E\left(e^{s\frac{S_n}{n}}\right) \geq \sum_{k\in K_a} e^{s\frac{k}{n}}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

et comme $\frac{k}{n} \geq a$ pour tout $k \in K_a$ alors, pour $s \geq 0$: $s\frac{k}{n} \geq s\,a$
la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$ alors $e^{s\frac{k}{n}} \geq e^{s\,a}$
Donc

$$\sum_{k\in K_a} e^{s\frac{k}{n}}\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \geq \sum_{k\in K_a} e^{s\,a}\mathrm{P}(S_n=k) = e^{s\,a}\sum_{k\in K_a}\mathrm{P}(S_n=k)$$

Avec$\sum_{k\in K_a}\mathrm{P}\left(S_n=k\right)=\mathrm{P}\left(S_n\in K_a\right)$ et $\left(S_n\in K_a\right)=\left(\frac{S_n}{n}\geq a\right)$
Finalement $\sum_{k\in K_a}\mathrm{P}\left(S_n=k\right)=\mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n}\geq a\right)$ et

$$E\left(e^{s\frac{S_n}{n}}\right)\geq\sum_{k\in K_a}e^{s\frac{k}{n}}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\geq e^{a\,s}\mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n}\geq a\right)$$

b) Pour $s\geq 0$, on a vu que $E\left(e^{s\frac{S_n}{n}}\right)=\left(\varphi(s/n)\right)^n$ donc

$$E\left(e^{s\frac{S_n}{n}}\right)=\left(\varphi(s/n)\right)^n\geq e^{a\,s}\mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n}\geq a\right)$$

et que, pour tout $s\geq 0$

$$P\left(\frac{S_n}{n}\geq a\right)\leq\left(\varphi(s/n)\right)^n e^{-as}$$

4. On suppose dans cette question que $a>p$.

a) Étudier sur $\mathbb{R}^+$ les variations de la fonction ℓ_a définie par

$$\ell_a\ :s\longmapsto as-\ln\varphi(s)$$

avec $\varphi\left(s\right)=1+p\left(e^s-1\right)$
ℓ_a est définie et dérivable en s tel que $1+p\left(e^s-1\right)>0$ donc, en particulier, sur $\mathbb{R}^+$

$$\ell_a'\left(s\right)=a-\frac{1}{1+p\left(e^s-1\right)}p\,e^s=\frac{e^sap-e^sp+a-ap}{1+pe^s-p}$$
$$\frac{a+ape^s-ap-pe^s}{1+pe^s-p}$$

Le dénominateur étant strictement positif, on cherche le signe du numérateur
Avec $0<p<a<1$

$$\begin{aligned}e^sap-e^sp+a-ap>0&\iff e^sp\left(a-1\right)>a\left(p-1\right)\\&\iff e^s<\frac{a\left(p-1\right)}{p\left(a-1\right)}\text{ car }a-1<0\\&\iff s<\ln\left(\frac{a\left(p-1\right)}{p\left(a-1\right)}\right)\end{aligned}$$

et de même $\ell_a'\left(s\right)=0\iff s=\ln\left(\frac{a(p-1)}{p(a-1)}\right)$ et $\ell_a'\left(s\right)<0\iff s>\ln\left(\frac{a(p-1)}{p(a-1)}\right)$
En 0 : $\varphi\left(s\right)=1+p\left(e^s-1\right)\to 1$ et $\ell_a\left(s\right)\to 0$
En $+\infty$:

$$\begin{aligned}\ell_a\left(s\right)&=as-\ln\left(1+p\left(e^s-1\right)\right)=as-\ln\left[e^s\left(p+e^{-s}\left(1-p\right)\right)\right]\\&=as-s-\ln\left(p+e^{-s}\left(1-p\right)\right)\\&=\left(a-1\right)s-\ln\left(p+e^{-s}\left(1-p\right)\right)\\&\to-\infty\quad\text{car }a-1<0\end{aligned}$$

b) Avec $\beta = \ln\left(\frac{a(p-1)}{p(a-1)}\right) > 0$ car $\frac{a(p-1)}{p(a-1)} - 1 = \frac{a-p}{p(1-a)} > 0$ on a donc

s	0 $\qquad$ β $\qquad$ $+\infty$
$\ell_a'(s)$	$\qquad + \quad 0 \quad -$
$\ell_a(s)$	$0 \nearrow \qquad \searrow -\infty$

Donc la fonction ℓ_a atteint sur $\mathbb{R}^+$ un maximum strictement positif en β

$$\begin{aligned}
\varphi(\beta) &= 1 + p(e^{\alpha} - 1) = 1 + p\left(\frac{a(p-1)}{p(a-1)} - 1\right) \\
&= \frac{p(a-1) + pa(p-1) - p^2(a-1)}{p(a-1)} \\
&= \frac{p^2 - p}{p(a-1)} = \frac{p-1}{a-1}
\end{aligned}$$

et donc cette valeur maximale est :

$$\begin{aligned}
h(a,p) &= \ell_a(\alpha) \\
&= a\ln\left(\frac{a(p-1)}{p(a-1)}\right) - \ln\left(\frac{p-1}{a-1}\right) \\
&= (a-1)\ln\left(\frac{p-1}{a-1}\right) - a\ln\left(\frac{a}{p}\right)
\end{aligned}$$

c) Pour tout $s \geq 0$ on avait

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (\varphi(s/n))^n e^{-as}$$

Pour faire apparaître l'expression demandée, on passe tout en exponentielle
Comme $\varphi(s/n) > 0$, (espérance d'une variable strictement positive) alors $(\varphi(s/n))^n = \exp\left[n\ln\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right]$ et

$$\begin{aligned}
(\varphi(s/n))^n e^{-as} &= \exp\left[n\ln\varphi\left(\frac{s}{n}\right) - a\,s\right] \\
&= \exp\left(-n\left[a\,\frac{s}{n} - \ln\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\right]\right) \\
&= \exp\left(-n\,\ell_a\left(\frac{s}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Un raisonnement qui n'aboutit pas est de dire : $\ell_a\left(\frac{s}{n}\right) \leq h(a,p)$ donc $-n\ell_a\left(\frac{s}{n}\right) \geq -nh(a,p)$ ... et l'inégalité se retrouve dans le mauvais sens pour pouvoir enchaîner.
On fait réapparaître ce maximum, en utilisant l'inégalité précédente dans le cas particulier $s = \beta n$.
On a donc

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \exp\left(-n\,\ell_a\left(\frac{\beta n}{n}\right)\right) = \exp\left(-nh(a,p)\right) = \exp\left(-n\sup_{t>0}(at - \ln\varphi(t))\right)$$

5. On suppose dans cette question que $a < p$, (donc $1 - a > 1 - p$).

a) Les valeurs de $n - S_n$ sont $n - S_n(\Omega) = [[0,n]]$

et pour tout $k \in [[0, n]]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(n - S_n = k) &= \mathrm{P}(S_n = n-k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^k \\ &= \binom{n}{k} p^{n-k}(1-p)^k \end{aligned}$$

Donc $n - S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-p)$
On peut aussi concrétiser cela en disant que : S_n est le nombre de succès en n expériences indépendantes donc $n - S_n$ est le nombre de non-succès : d'échecs en n expériences indépendantes, la probabilité d'échec étant $1-p$.

b) On se ramène au cas précédent :

$$\begin{aligned} \left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) &= \left(\frac{S_n}{n} - 1 \leq a - 1\right) \\ &= \left(\frac{S_n - n}{n} \leq a - 1\right) \\ &= \left(\frac{n - S_n}{n} \leq 1 - a\right) \end{aligned}$$

Donc en appliquant le résultat précédent à $T_n = \frac{n-S_n}{n}$ qui suit $\mathcal{B}(n, 1-p)$on a

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = \mathrm{P}(T_n \geq 1-a) \leq e^{-nh(1-a, 1-p)}$$

reste à voire, que $h(1-a, 1-p) = h(a, p)$:

$$h(a,p) = (a-1)\ln\left(\frac{p-1}{a-1}\right) - a\ln\left(\frac{a}{p}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} h(1-a, 1-p) &= (a)\ln\left(\frac{p}{a}\right) - (1-a)\ln\left(\frac{1-a}{1-p}\right) \\ &= (a-1)\ln\left(\frac{p-1}{a-1}\right) - a\ln\left(\frac{a}{p}\right) = h(a,p) \end{aligned}$$

et enfin que cette valeur est le maximum de ℓ_a sur $\mathbb{R}^-$

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-n\left(\sup\limits_{t>0}(at - \ln\varphi(t))\right)} = e^{-nh(1-a, 1-p)} = e^{-nh(a,p)}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$.

a) L'événement $\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$ s'écrit : $\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right) \cup \left(\frac{S_n}{n} - p \leq -\varepsilon\right)$ (incompatibles car $\varepsilon > 0$)

- avec $\left(\frac{S_n}{n} - p \geq \varepsilon\right) = \left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon + p\right)$
  et $\mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon + p\right) \leq e^{-nh(p+\varepsilon, p)}$ car $a = \varepsilon + p > p$

- De même $\left(\frac{S_n}{n} - p \leq -\varepsilon\right) = \left(\frac{S_n}{n} \leq -\varepsilon + p\right)$
  $\text{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq -\varepsilon + p\right) \leq e^{-nh(p-\varepsilon,p)}$ car $a = p - \varepsilon < p$

Donc $\text{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nh(p+\varepsilon,p)} + e^{-nh(p-\varepsilon,p)}$
Comme $h(p+\varepsilon,p) \geq \min\left(h(p-\varepsilon,p), h(p+\varepsilon,p)\right)$ alors
$-n\,h(p+\varepsilon,p) \leq -n\min\left(h(p-\varepsilon,p), h(p+\varepsilon,p)\right)$
et $e^{-n\,h(p+\varepsilon,p)} \leq e^{-n\min\left(h(p-\varepsilon,p), h(p+\varepsilon,p)\right)}$
et de même $e^{-nh(p-\varepsilon,p)} \leq e^{-n\min\left(h(p-\varepsilon,p), h(p+\varepsilon,p)\right)}$
Finalement

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n\ \min\left(h(p-\varepsilon,p), h(p+\varepsilon,p)\right)}$$

b) Comme $\min\left(h(p-\varepsilon,p), h(p+\varepsilon,p)\right) > 0$ (h est strictement positive) alors $e^{-n\ \min\left(h(p-\varepsilon,p), h(p+\varepsilon,p)\right)} \to 0$ quand $n \to +\infty$ et par encadrement (une probabilité est toujours positive)

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0}$ résultat que l'on connaissait déjà car $p = E(X)$

7. Une entreprise souhaite acquérir une machine qui fabrique un certain type d'objets et qui, en fonctionnement normal, produit une proportion p, $(0 < p < 1)$, d'objets défectueux. Le directeur veut connaître la valeur de p. Pour cela il teste la machine et prélève un échantillon de n, $(n \geq 1)$, objets qu'il analyse. Pour tout $i \in [[1,n]]$, soit X_i la variable aléatoire de Bernoulli définie par

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{ème objet est défectueux} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose que dans les conditions de prélèvement, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

a) On a $E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \dfrac{E(S_n)}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^n E(X_i)}{n} = \dfrac{nE(X)}{n} = p$
Et F_n n'est fonctions que des X_i donc

Conclusion : $\boxed{F_n = \dfrac{S_n}{n} \text{ est un estimateur sans biais de } p}$

b) Le risque quadratique est :

$$\begin{aligned} r_n &= E\left((F_n - p)^2\right) = E\left[(F_n - E(F_n))^2\right] \\ &= V(F_n) \\ &= \frac{1}{n^2}V(S_n) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n V(X_i) \ \text{ car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{n}p(1-p) \end{aligned}$$

et donc

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0}$

8. Soit α un réel de $]0,1[$. On souhaite déterminer dans cette question un intervalle de confiance du paramètre p inconnu, au niveau de confiance $1-\alpha$, à partir de l'échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$.

   a) Comme $p=E(X_i)$ et que $V(X_i)=p(1-p)$ alors la moyenne centrée réduite est $\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-p\right)/\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\left(\sqrt{n}\dfrac{F_n-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$

   Les X_i étant indépendants, la loi limite de $\left(\sqrt{n}\dfrac{F_n-p}{\sqrt{p(1-p)}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une loi normale, centrée réduite.

   b) Soit f_n la réalisation de F_n sur l'échantillon considéré. Soit t_α le réel défini par $\Phi(t_\alpha)=1-\dfrac{\alpha}{2}$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée, réduite.

   La définition d'un intervalle de confiance de p au niveau $1-\alpha$ est donné par $[U_n,V_n]$ tel que
$$P(U_n\leq p\leq V_n)\geq 1-\alpha$$
   On vérifie cela avec
$$U_n=f_n-\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\quad,\quad V_n=f_n+\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}(U_n\leq p\leq V_n)&=\left(f_n-\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\leq p\leq f_n+\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)\\&=\left(-\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\leq f_n-p\leq\frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right)\\&=\left(|f_n-p|\,2\sqrt{n}\leq t_\alpha\right)\end{aligned}$$

   Il faut ici connaître la majoration classique sur $p\in]0,1[$: $p(1-p)\leq\frac{1}{4}$
   donc $\frac{1}{p(1-p)}\geq 4$ et $2\leq\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}$ donc

   si $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}|F_n-p|\leq t_\alpha$ **alors** $|f_n-p|\,2\sqrt{n}\leq t_\alpha$ et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(|f_n-p|\,2\sqrt{n}\leq t_\alpha\right)&\leq\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}|F_n-p|\leq t_\alpha\right)=\Phi(t_\alpha)-\Phi(-t_\alpha)\\&\leq 2\Phi(t_a)-1=\alpha\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{[U_n,V_n]\text{ est bien un intervalle de confiance de niveau de confiance }1-\alpha}$

Un exemple continu.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels α pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente.

   $\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$

- En $+\infty$ on a : $t^{\alpha-1}e^{-t} = t^{\alpha-1}e^{-t/2}e^{-t/2} = o\left(e^{-t/2}\right)$ car $t^{\alpha-1}e^{-t/2} = t^{\alpha-1}/e^{t/2} \to 0$ quand $t \to +\infty$
  Et comme $\int_0^{+\infty} e^{-t/2}dt$ converge alors par majoration de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge en $+\infty$
- En 0 : $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim t^{\alpha-1}$ car $e^{-t} \to 1$ et comme $\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$ converge pour $\alpha - 1 > -1$ et diverge sinon alors

Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \text{ converge si et seulement si } \alpha > 0}$

Pour tout $\alpha \in \mathcal{D}$, on pose

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

2. On a $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}\mathrm{d}t$

   que l'on intègre par partie : $u(t) = t^{\alpha} : u'(t) = \alpha u^{\alpha-1} : v'(t) = e^{-t} : v(t) = -e^{-t}$ avec u et v C^1 sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
\int_a^b t^{\alpha}e^{-t}dt &= \left[-e^{-t}t^{\alpha}\right]_a^b - \int_a^b -\alpha\, t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\
&= -e^{-b}b^{\alpha} + e^{-a}a^{\alpha} + \alpha \int_a^b t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\
&\to \alpha\,\Gamma(\alpha-1) \text{ quand } a \to 0 \text{ et } b \to +\infty
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$

   On aura $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ d'où, par récurrence $\Gamma(n) = (n-1)!\Gamma(1)$

   Avec

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1 \text{ (loi exponentielle de paramètre 1)}$$

   Conclusion : $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)! \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.}$

3. Soit $\alpha \in \mathcal{D}$ fixé. Montrer que la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\alpha : t \to \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\{\alpha\}}t^{\alpha-1}e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$

   est une densité.

   f est continue sur $\mathbb{R}^*$, positive et $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ est impropre en 0, $\pm\infty$.

   $\int_{-\infty}^0 f = \int_{-\infty}^0 0 = 0$ et $\int_0^{+\infty} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(\alpha)} = 1$

   Donc f est bien une densité de probabilité.

   On dira qu'une variable aléatoire X de densité f_α est une variable aléatoire qui suit une loi $\gamma(\alpha)$.

   On admettra que si X, Y sont deux variables aléatoires indépendantes, X suivant une loi $\gamma(\alpha)$ et Y suivant une loi $\gamma(\beta)$, alors $X + Y$ suit une loi $\gamma(\alpha+\beta)$.

   On admettra également que, sous les mêmes hypothèses sur X et Y, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$.

4. a) Soit X une variable aléatoire réelle, suivant une loi $\gamma(\alpha)$.

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_\alpha(t)\, dt$ si elle converge. (impropre en $\pm\infty$ et 0)

$\int_{-\infty}^{0} t f_\alpha(t)\, dt = 0$

$\int_{0}^{+\infty} t f_\alpha(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t\, t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha\Gamma(a)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha$

Conclusion : $\boxed{E(X) = \alpha}$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

b) La loi de S_n est $\gamma(\alpha + \cdots + \alpha) = \gamma(n\,\alpha)$ car les X_i sont indépendantes.

On détermine la fonction de répartition G de $\frac{S_n}{n}$:

$G(x) = \mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq x\right) = \mathrm{P}(S_n \leq n\,x) = F(n\,x)$ avec F la fonction de répartition de S_n.

Donc G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (là où la densité de $\gamma(n\,\alpha)$ est continue)

et la densité de $\frac{S_n}{n}$ est :

$$\begin{aligned} g(x) &= G'(x) = nF'(n\,x) = n\, f_{n\alpha}(n\,x) = \\ &= \begin{cases} \dfrac{n}{\Gamma(n\,\alpha)} t^{n\,\alpha-1} e^{-n\,x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5. a) e^{sX} admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} f_\alpha(t)\, dt$ converge absolument (ssi converge simplement car la fonction est positive)

Pour $t > 0$: $e^{st} f_\alpha(t) = \dfrac{1}{\Gamma\{\alpha\}} t^{\alpha-1} e^{st} e^{-t} = \dfrac{1}{\Gamma\{\alpha\}} t^{\alpha-1} e^{(s-1)t}$

dont l'intégrale convergera en $+\infty$ pour $s-1 < 0$ (même découpage de l'exponentielle que dans l'introduction)

Donc $I = \left]-\infty, 1\right[$

On pose alors $\varphi(s) = E(e^{sX})$

b) Comme $e^{st} f_\alpha(t) \geq 0$ alors son intégrale sur $\mathbb{R}$ est $E\left(e^{sX}\right) \geq 0$

Pour étudier la convexité, **on peut revenir à la définition (cordes au dessus de la courbe)**

Cela donne une démonstration compliquée :

Pour la convexité, comme on ne peut pas passer ici par la dérivée seconde, on revient à la définition : les cordes sont au-dessus de la courbe.

Soit $a < b < -1$ et $t \in [a, b]$

L'équation de la droite par $(a, \varphi(a))$ et$(b, \varphi(b))$ est : $\dfrac{y - \varphi(a)}{x - a} = \dfrac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}$ ou $y - \varphi(a) = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}(x - a)$

Il faut prouver que la courbe est sous la corde, donc que pour tout $x \in [a, b]$:

$$\varphi(x) \leq \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}(x - a) + \varphi(a)$$

Or, la fonction exponentielle étant convexe on a :

pour tout $x \in [a,b]$:

$$e^{xt} \leq \frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}(x-a)+e^{at}$$

et en multipliant par $f_\alpha(t) \geq 0$

$$e^{xt}f_\alpha(t) \leq \frac{e^{bt}f_\alpha(t)-e^{at}f_\alpha(t)}{b-a}(x-a)+e^{at}f_\alpha(t)$$

Donc en intégrant sur $\mathbb{R}$ (par apport à t) on a le résultat voulu.

Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est positive et convexe sur son domaine de définition } I.}$

Ou on peut expliciter $\varphi(s)=E(e^{sX})$ en faisant sortir s de l'intégrale :

Idée non suggérée ... on transforme l'intégrale par le changement de variable $(1-s)t=u \iff t=\frac{u}{1-s}$ avec $1-s>0$ (au lieu de $(s-1)t=u$ pour l'ordre des bornes)

L'intégrale étant impropre en 0 et $+\infty$

$dt=\frac{1}{1-s}du$: $u=0 \iff t=M$: $u=M/(1-s)$: ($\rightarrow +\infty$ quand $M\rightarrow+\infty$)

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^M \frac{1}{\Gamma\{\alpha\}}t^{\alpha-1}e^{(1-s)t}dt &= \int_{\varepsilon/(1-s)}^{M/(1-s)} \frac{1}{\Gamma\{\alpha\}}\left(\frac{u}{1-s}\right)^{\alpha-1}e^{-u}\frac{1}{1-s}du \\
&= \frac{1}{(1-s)^\alpha}\int_{\varepsilon/(1-s)}^{M/(1-s)}\frac{1}{\Gamma\{\alpha\}}u^{\alpha-1}e^{-u}du \\
&\rightarrow \frac{1}{(1-s)^\alpha}\text{quand } \varepsilon\rightarrow 0 \text{ et } M\rightarrow+\infty
\end{aligned}$$

car $M/(1-s)\rightarrow+\infty$ et $\varepsilon/(1-s)\rightarrow 0$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\Gamma\{\alpha\}}u^{\alpha-1}e^{-u}du=1$

Conclusion : $\boxed{\varphi(s)=\frac{1}{(1-s)^\alpha}=(1-s)^{-\alpha} \text{ pour } s<1}$

φ est deux fois dérivable sur $]-\infty,1[$ et $\varphi'(s)=-\alpha(1-s)^{-\alpha-1}\times -1=\alpha(1-s)^{\alpha-1}$

$\varphi''(s)=\alpha(\alpha+1)(1-s)^{-\alpha-2}>0$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est convexe sur }]-\infty,1[}$

c) Soit $s\in I$.

On a $\frac{s}{n}S_n=\sum_{i=1}^n\frac{s}{n}X_i$ donc $e^{\frac{s}{n}S_n}=\prod e^{\frac{s}{n}X_i}$ et les (X_i) étant indépendantes,

$E\left(e^{\frac{s}{n}S_n}\right)=\prod_{i=1}^n E\left(e^{\frac{s}{n}X_i}\right)=(\varphi(s/n))^n$ car$E\left(e^{\frac{s}{n}X_i}\right)=E\left(e^{\frac{s}{n}X}\right)=\varphi(s/n)$

Conclusion : $\boxed{E\left(e^{\frac{s}{n}S_n}\right)=(\varphi(s/n))^n.}$

6. En utilisant le théorème de transfert avec la variable $\frac{S_n}{n}$ de densité g ,

pour $s\in I$

$$\begin{aligned} E(e^{s\frac{S_n}{n}}) &= \int_0^{+\infty} e^{st} g(t)\, dt \\ &= \int_0^{a} e^{st} g(t)\, dt + \int_a^{+\infty} e^{st} g(t)\, dt \\ &\geq \int_a^{+\infty} e^{st} g(t)\, dt \end{aligned}$$

et comme $s \geq 0$ on a $e^{st} \geq e^{a\,t}$ sur $[a, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} e^{st} g(t)\, dt &\geq \int_a^{+\infty} e^{sa} g(t)\, dt = e^{s\,a} \int_a^{+\infty} g(t)\, dt \\ &\geq e^{a\ s} P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \end{aligned}$$

donc pour $s \in I \cap \mathbb{R}^+$

$$E\left(e^{s\dfrac{S_n}{n}}\right) \geq e^{a\ s} P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right)$$

puis que pour tout $s \in I \cap \mathbb{R}^-$

$$E(e^{s\frac{S_n}{n}}) \geq \int_0^{a} e^{st} g(t)\, dt$$

et comme $s \leq 0$ alors $e^{st} \leq e^{a\,t}$ si $t \in [0, a]$ donc

$$\begin{aligned} (e^{s\frac{S_n}{n}}) &\geq \int_0^{a} e^{sa} g(t)\, dt = e^{a\ s} \int_0^{a} g(t)\, dt \\ &\geq e^{a\ s} P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \end{aligned}$$

7. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \not= \alpha$. Pour tout $s \in I$, on pose

$$\ell_a\ : s \longmapsto as - \ln \varphi(s) = as + \alpha \ln(1-s)$$

ℓ_a est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} \ell_a'(s) &= a + \alpha \frac{-1}{(1-s)} \\ &= \frac{a(1-s) - \alpha}{1-s} \\ &= \frac{a - \alpha - as}{1-s} \end{aligned}$$

Le numérateur (affine) de φ' s'annule en $s = \frac{a-\alpha}{a} = 1 - \frac{\alpha}{a} < 1$

- En $-\infty$: $\ell_a(s) = as + \alpha \ln(1-s) \to +\infty$ car α et a sont strictement positifs.
- En 1 : $as + \alpha \ln(1-s) \to +\infty$ car $\alpha > 0$

s	$-\infty$		$1-\frac{\alpha}{a}$		1	
$a-\alpha-as$		$+$	0	$-$		affine
$\varphi'(s)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	
$\varphi(s)$	$\Vert-\infty$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	$-\infty\Vert$	

Une valeur remarquable est $\ell_a(0) = 0$

Donc que le maximum $1 - \frac{\alpha}{a}$ soit avant ou après 0, φ y est positive strictement

8. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$h(a) = \sup_{s \in I} \ \ell_a(s)$$

On a donc

$$\begin{aligned} h(a) &= \ell_a\left(1-\frac{\alpha}{a}\right) = a\left(1-\frac{\alpha}{a}\right) + \alpha \ln\left(\frac{\alpha}{a}\right) \\ &= a - \alpha + \alpha \ln\left(\frac{\alpha}{a}\right) \end{aligned}$$

Comme en 0, $\ell_a(0) = 0$, alors son maximum ($1 - \frac{\alpha}{a} \neq 0$)est strictement positif.

Conclusion : $\boxed{\text{si } a \neq \alpha, \text{ alors } h(a) > 0.}$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un n échantillon de la loi de X. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   a) Soit s tel que $0 < s < n$

   On a vu que $E\left(e^{\frac{s}{n}S_n}\right) = (\varphi(s/n))^n$

   On applique la méthode utilisée précédemment en découpant le calcul de l'espérance suivant que :$\frac{s}{n} > a$ ou$< a$

$$\begin{aligned} E\left(e^{\frac{s}{n}S_n}\right) &= \int_0^{na} e^{\frac{s}{n}t} g(t)\,dt + \int_0^{na} e^{\frac{s}{n}t} g(t)\,dt \\ &\geq \int_0^{na} e^{\frac{s}{n}t} g(t)\,dt \text{ et comme } \frac{t}{n} \geq a \\ &\geq \int_0^{na} e^{as} g(t)\,dt = a^{as} \int_0^{na} g(t)\,dt \\ &\geq a^{as} P(S_n \geq na) = P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \end{aligned}$$

   et finalement

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (\varphi(s/n))^n \ e^{-as}$$

   b) L'inégalité précédente étant vraie pour tout s, elle l'est en particulier pour la valeur minimale et donc

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \inf_{0<s<n} e^{-as} (\varphi(s/n))^n$$

c) On remarque d'abord que

$$\begin{aligned} e^{-as}\left(\varphi(s/n)\right)^n &= e^{-as+n\ln\left(\varphi\left(s/n\right)\right)} \\ &= e^{-\ell_a(s/n)} \end{aligned}$$

Pour $a>\alpha$ on a $1-\frac{\alpha}{a}>0$ donc le maximum de ℓ_a est sur $I\cap\mathbb{R}_+^* =]0,1[$
L'inégalité $P\left(\frac{S_n}{n}\geq a\right)\leq\left(\varphi(s/n)\right)^n e^{-as}$ est donc vraie en particulier pour $s=1-\frac{\alpha}{a}\in]0,1[$ donc

$$P\left(\frac{S_n}{n}\geq a\right)\leq e^{-n\left(\sup\limits_{t\in I\cap\mathbb{R}_+}(at-\ln\varphi(t))\right)} = e^{-nh(a)}$$

d) Si $a<\alpha$ alors $1-\frac{\alpha}{a}<0$ et comme le maximum est sur $\cap\mathbb{R}_-$

$$P\left(\frac{S_n}{n}\leq a\right)\leq e^{-n\left(\sup\limits_{t\in I\cap\mathbb{R}_-}(at-\ln\varphi(t))\right)} = e^{-nh(a)}$$

e) Soit $\varepsilon>0$. On décompose l'inégalité sur la valeur absolue en deux inégalité sur S_n/n :

$$\left(\left|\frac{S_n}{n}-\alpha\right|\geq\varepsilon\right) = \left(\frac{S_n}{n}\geq\alpha+\varepsilon\right)\cup\left(\frac{S_n}{n}\leq\alpha-\varepsilon\right)$$

les deux étant incompatibles :

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-\alpha\right|\geq\varepsilon\right) = \mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n}\geq\alpha+\varepsilon\right)+\mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n}\leq\alpha-\varepsilon\right)$$

avec $\mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n}\geq\alpha+\varepsilon\right)\leq e^{-nh(\alpha+\varepsilon)}$ et $\mathrm{P}\left(\frac{S_n}{n}\leq\alpha-\varepsilon\right)\leq e^{-nh(\alpha-\varepsilon)}$ qui sont tous deux inférieur à $e^{-nH(\alpha,\varepsilon)}$ (où $H(\alpha,\varepsilon)=\min\left(\left(h(\alpha-\varepsilon),h(\alpha+\varepsilon)\right)\right)$ et

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\alpha\right|\geq\varepsilon\right)\leq 2e^{-nH(\alpha,\varepsilon)}$$