Exercice : suites et calcul matriciel

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$$u_0 = 1, \ \ v_0 = 0, \ \ w_0 = 0$$

et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix},$$

et on note A la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) On a $AX_n = X_{n+1}$.
   b) La suite est donc géométrique matricielle de raison A et $X_n = A^n X_0$
2. a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(A - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} (3-\alpha)\, x - y + z = 0 \\ x + (2-\alpha)\, y = 0 \\ y + (1-\alpha)\, z = 0 \end{cases}$$

$$\iff (S) \begin{cases} [(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha) + (1-\alpha) + 1]\, z = 0 \\ x = (2-\alpha)(1-\alpha)\, z = 0 \\ y = -(1-\alpha)\, z \end{cases}$$

$[(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha) + (1-\alpha) + 1] = -\alpha^3 + 6\alpha^2 - 12\alpha + 8$

N.B. en regardant la matrice T on devine que 2 doit être la valeur propre.

2 est racine et par l'algorithme de Horner, pour factoriser par $(x-2)$:

-1	6	-12	8
	-2	8	-8
-1	4	-4	0

et on a donc $[\cdots] = (x-2)(-x^2+4x+4)$ avec 2 racine double de $-x^2+4x+4$ on obtient $-x^2+4x+4 = -(x-2)^2$ et

$[\cdots] = -(x-2)^3$

Donc si $\alpha \neq 2$ alors $(S) \iff x = y = z = 0$ et α n'est pas valeur propre.

Et si $\alpha = 2$ alors $(S) \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{\text{La seule valeur propre de } A \text{ est}}$

   b) et le sous espace propre associé à 2 est $E_2 = \mathrm{Vect}\,((0,1,1))$

La famille $((0,1,1))$ formée d'un seul vecteur non nul est libre et génératrice de E_2. Donc $\dim(E_2) = 1$.

La somme des dimension des sous espaces propres de A , matrice d'ordre 3, est 1.

Conclusion : $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$

On pouvait aussi raisonner par l'absurde, en montrant qu'alors $A = 3I$

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que A soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

   a) La matrice de f dan la base $\mathcal{B}'$ est T si et seulement si :
   $f(e'_1) = 2e'_1$: $f(e'_2) = 2e'_2 + e'_1$ et $f(e'_3) = 2e'_3 + e'_2$
   Soit $e'_1 = (0,1,1)$ vecteur propre associé à 2.
   $e'_2 = (x, y, -1)$ alors $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f(e'_2)) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - 1 \\ x + 2y \\ y - 1 \end{pmatrix}$ donc
   $f(e'_2) = 2e'_2 + e'_1 \iff \begin{cases} 3x - y - 1 = 2x + 0 \\ .x + 2y = 2y + 1 \\ y - 1 = -2 + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ .x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ soit $e'_2 = (1, 0, -1)$
   $e'_3 = (x, y, 2)$ alors alors $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f(e'_3)) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + 2 \\ x + 2y \\ y + 2 \end{pmatrix}$ donc
   $f(e'_2) = 2e'_2 + e'_1 \iff \begin{cases} 3x - y + 2 = 2x + 1 \\ .x + 2y = 2y + 0 \\ y + 2 = 4 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ .x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ soit $e'_3 = (0, 1, 2)$
   reste à vérifier que (e'_1, e'_2, e'_3) est bien une base (libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$) :
   Soient α, β, γ réels. Si $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0$ alors
   $\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -\gamma \\ \gamma = 0 \end{cases}$ donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille est libre
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' = ((0,1,1), (1,0,-1), (0,1,2))}$

   b) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$
   et comme $T = 2I + N$ et que $N \cdot 2I = 2N = 2I \cdot N$ alors

$$
\begin{aligned}
T^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I)^{n-k} \\
&= \binom{n}{0} 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} N + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2 + \sum_{k=3}^{n} 0 \text{ si } n \geq 2 \\
&= 2^{n-2} \left(4I + 2nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \right) \\
&= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 4 & 2n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 4 & 2n \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   formule qui est encore valable pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

4. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

   a) Par les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on a $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

   La formule de changement de base donne :
   $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(f) \operatorname{mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = PTP^{-1}$
   Conclusion : $\boxed{A^n = PT^nP^{-1}}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \to L_2 \\ L_2 \to L_1 \\ L_3 - L_2 \to L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 + L_2 \to L_3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 - L_3 \to L_3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 - L_3 \to L_3 \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Conclusion : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

c) **N.B** pour le produit A^n (), il est beaucoup plus économique de commencer par la droite, de sorte qu'il n'y a que des produits matrice*colonnes.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= PT^n \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= P2^{n-2} \begin{pmatrix} 4 & 2n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 4 & 2n \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n + \frac{1}{2}n(n-1) - 4 \\ 2n+4 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 2n+4 \\ 2n + \frac{1}{2}n(n-1) \\ \frac{1}{2}n(n-1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} u_n = 2^{n-2}(2n+4) \\ v_n = 2^{n-2}\left[2n + \frac{1}{2}n(n-1)\right] \\ w_n = 2^{n-3}n(n-1) \end{array}}$

Problème : probabilités

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$.

I. Préliminaires

Dans cette partie **I.**, λ désigne un réel strictement positif.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

a) **N.B.** Passer par la fonction de répartition évite d'avoir à calculer des (simples) intégrales impropres.
$\mathrm{P}(X > x) = 1 - \mathrm{P}(X \leq x) = 1$ si $x \leq 0$ et
$= 1 - \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 1 - \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = e^{-\lambda x}$
Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$ (appelée *fonction de survie de X*).

b) Pour x et y strictement positifs :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{X>x}(X > x+y) &= \frac{\mathrm{P}(X > x+y \cap X > x)}{\mathrm{P}(X > x)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(X > x+y)}{\mathrm{P}(X > x)} \text{ car } x+y \geq x \\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} \\ &= \mathrm{P}(X > y) \end{aligned}$$

Si X modélise la durée de vie d'un phénomène, le fait d'avoir duré au moins x $(X > x)$ ne change pas la loi de la durée de vie restante.
La durée de vie nedépend pas du vécu. On peux donc le dire « sans vieillissement ».

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) On a $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = n\frac{1}{\lambda}$
et comme les (X_k) sont indépendantes, $V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = n\frac{1}{\lambda^2}$

b) Pa récurrence :
$S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\lambda)$ donc S_1 a pour densité

$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\lambda^1}{(1-1)!} e^{-\lambda t} t^{1-1} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la densité de S_n soit

$$f_n : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

alors $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ est à densité et une densité est donnée (d'après l'énoncé) par

$$f_{n+1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, f_1(t-x)\, dx$$

avec $f_1(t-x) = 0$ si $x > t$ et $f_n(x) = 0$ si $x < 0$.
Donc $f_{n+1}(t) = 0$ si $t < 0$

et si $t > 0$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) &= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} \lambda e^{-\lambda(t-x)}\, dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t x^{n-1}\, dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^t \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda t} t^n \text{ avec } (n-1)!n = n! \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ une densité de } S_n \text{ est celle ci}}$

II. Loi de Pareto (Vilfredo Pareto (1848-1923), sociologue et économiste italien)

Soient a et b des réels strictement positifs. Par définition, on dit d'une variable aléatoire qu'elle suit la loi de Pareto de paramètres a et b si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b\,; \\ a\dfrac{b^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geq b. \end{cases}$$

Soit alors X une variable aléatoire de loi de Pareto de paramètres a et b.

1. $\int_b^{+\infty} a\dfrac{b^a}{t^{a+1}} dt$ est impropre en $+\infty$

$$\begin{aligned} \int_b^M a\frac{b^a}{t^{a+1}} dt &= \left[-\frac{b^a}{t^a}\right]_b^M \\ &= -\frac{b^a}{M^a} + \frac{b^a}{b^a} \to 1 \text{ quand } M \to +\infty \text{ car } a > 0 \end{aligned}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et vaut 1. (par ailleurs f est continue sur par morceaux sur $\mathbb{R}$ et positive)
$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\, dt$ si elle converge, avec $\int_{-\infty}^{b} tf(t)\, dt = 0$.
Or $tf(t) = a\dfrac{b^a}{t^a}$ donc l'intégrale (Riemann) converge si $a > 1$ et diverge si $a \leq 1$.
Si $a > 1$:

$$\begin{aligned} \int_b^M ta\frac{b^a}{t^{a+1}} dt &= a\int_b^M \frac{b^a}{t^a} dt \\ &= ab^a \left[\frac{-1/(a-1)}{t^{a-1}}\right]_b^M \\ &= -\frac{ab^a}{a-1}\left(\frac{1}{M^{a-1}} - \frac{1}{b^{a-1}}\right) \\ &\to \frac{ab}{a-1} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(X) = \dfrac{ab}{a-1} \text{ si } a > 1 \text{ n'existe pas sinon.}}$

$t^2 f(t) = a\dfrac{b^a}{t^{a-1}}$ donc l'intégrale de $t^2 f(t)$ diverge si $a \leq 2$ $(a-1 \leq 1)$ et converge si $a > 2$.

$$\begin{aligned}
\int_b^M a\frac{b^a}{t^{a-1}}dt &= a\int_b^M \frac{b^a}{t^{a-1}}dt \\
&= ab^a\left[\frac{-1/(a-2)}{t^{a-2}}\right]_b^M \\
&= -\frac{ab^a}{a-2}\left(\frac{1}{M^{a-2}} - \frac{1}{b^{a-2}}\right) \\
&\to \frac{ab^2}{a-2}
\end{aligned}$$

Donc si $a > 2$, X^2 a une espérance et $E(X^2) = \dfrac{ab^2}{a-2}$ et X a une variance et

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \\
&= \frac{ab^2}{a-2} - \left(\frac{ab}{a-1}\right)^2 \\
&= ab^2\frac{(a-1)^2 - a(a-2)}{(a-1)^2(a-2)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } a > 2 : V(X) = \dfrac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)} \text{ et n'existe pas sinon}}$

2. La fonction de répartition de X est $F(x) = 0$ si $x \leq b$ et si $x \geq b$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_b^x a\frac{b^a}{t^{a+1}}dt \\
&= \left[-\frac{b^a}{t^a}\right]_b^x \\
&= -\left(\frac{b}{x}\right)^a + 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{La fonction de survie de } X \text{ est donnée par } G(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < a \\ 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geq a \end{cases}}$

3. Pour tout réel y positif ou nul et $x > a$ (pour que la probabilité conditionnelle soit définie),

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{X>x}(X > x+y) &= \frac{\mathrm{P}(X > x+y \cap X > x)}{\mathrm{P}(X > x)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X > x+y)}{\mathrm{P}(X > x)} \\
&= \frac{1 - \left(\frac{b}{x+y}\right)^a}{1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a} \\
&\to 1 \text{ quand } x \to +\infty \text{ car } a > 0
\end{aligned}$$

Dans une telle modélisation de la durée de vie, plus on a vécut longtemps, plus la probabilité de vivre d'avantage augmente.

Conclusion : $\boxed{\text{c'est un phénomène dans lequel l'expérience fait gagner en endurance.}}$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(Y \leq x) &= \left(\ln \frac{X}{b} \leq x\right) \\ &= (X \leq be^x)\end{aligned}$$

Donc la fonction de répartition de Y est donnée par (et F celle de X)

$$\begin{aligned}G(x) &= \mathrm{P}(Y \leq x) \\ &= \mathrm{P}(X \leq be^x) \\ & F(be^x)\end{aligned}$$

Comme F est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{b\}$ alors G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 en x tel que $be^x \neq b$ donc sur $\mathbb{R}^*$.
Donc Y est à densité et une densité de Y est donnée $g(x) = G'(x) = f(be^x)\, be^x$ et pour $x > 0$

$$\begin{aligned}g(x) &= a\frac{b^a}{(be^x)^{a+1}}be^x \\ &= a\frac{b^a}{b^{a+1}e^{x(a+1)}}be^x \\ &= ae^{-ax}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \varepsilon(a)}$

III. Estimation des paramètres d'une loi de Pareto

Les instants aléatoires des arrivées de paquets (symboles binaires représentant de l'information de type audio, vidéo, données, ...) dans un canal de communication sont modélisés par une variable aléatoire X suivant une loi de Pareto de paramètres α et β ($\alpha > 0$, $\beta > 0$).
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

1. On suppose tout d'abord que le paramètre β fait partie des caractéristiques connues du canal de communication ; on se propose de déterminer un estimateur de α par une méthode dite « du maximum de vraisemblance ». Pour cela, n désignant un entier naturel non nul et x_1, ..., x_n des réels supérieurs ou égaux à β, on introduit la fonction $\mathcal{L}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\mathcal{L}(a) = f_a(x_1) \times \cdots \times f_a(x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_a(x_k),$$

où f_a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \beta\,; \\ a\dfrac{\beta^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geq \beta. \end{cases}$$

a) $\beta \leq x_k$ alors $f_a(x_k) = a\dfrac{\beta^a}{x_k^{a+1}}$ pour tout k et

$$\mathcal{L}(a) = a^n\beta^{na}/\left(\prod x_k^{a+1}\right)$$

tous les termes du produit étant strictement positifs,

$$\ln(\mathcal{L}(a)) = n\ln(a) + na\ln(\beta) - (a+1)\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)$$

b) On considère la fonction φ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$a \mapsto n\ln(a) + na\ln(\beta) - (a+1)\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k).$$

i. φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned}\varphi'(a) &= \frac{n}{a} + n\ln(\beta) - \sum_{k=1}^{n}\ln(x_k) \\ &= \frac{1}{a}\left[n + \left(n\ln(\beta) - \sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)\right)a\right]\end{aligned}$$

Quel est le signe $(\cdots)$?
Pour tout k : $x_k \geq \beta$ donc $\ln(x_k) \geq \ln(\beta)$ et $\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k) \geq n\ln(\beta)$
Donc $(\cdots) \leq 0$.
Si $x_k = \beta$ pour tout k alors $(\cdots) = 0$ et $\varphi' > 0$ et φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et n'a donc pas de maximum.
Si les x_k ne sont pas tous égaux à β alors $(\cdots) < 0$
et $[\cdots] = 0$ en $w = -n/\left(n\ln(\beta) - \sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)\right)$.

On a donc

a	0 $\quad$ w
$[]$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad$ affine
$\varphi'(a)$	$+$ $\quad\quad$ $-$
$\varphi(a)$	$\nearrow$ $\quad\quad$ $\searrow$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ a un unique maximum en } w}$ si tous les x_k ne sont pas égaux à β

ii. *Conclusion :* $\boxed{w = -\dfrac{n}{n\ln(\beta) - \sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)}}$

iii. On a $\ln(\mathcal{L}(a)) = \varphi(a)$ donc $\mathcal{L}(a) = \exp(\varphi(a))$ et donc
Conclusion : $\boxed{\mathcal{L} \text{ est maximale en } w}$

c) On pose dorénavant, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$W_n = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{X_k}{\beta}}.$$

(La suite $(W_n)_{n\geq 1}$ est appelée *estimateur du maximum de vraisemblance.*)
où l'on reconnaît la formule donnant w avec $\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{X_k}{\beta} = -\left(n\ln(\beta) - \sum_{k=1}^{n}\ln(X_k)\right)$

i. On a vu (II 4) qu'avec X_k suivant une loi de Pareto de paramètres α et β, la variable $\ln\frac{X_k}{\beta}$ suivait alors une loi $\varepsilon(a)$.
Au (I 2.b) on a vu qu'une somme de loi exponentielles indépendantes était à densité et avait pour densité f_n.
Les (X_k) étant indépendantes,
Conclusion : $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{X_k}{\beta} \text{ admet pour densité la fonction } f_n \text{ avec } \lambda = \alpha}$

ii. W_n a une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n}{t}f_n(t)\,dt$ est absolument convergente ($\Longleftrightarrow$ convergente car tout est positif ou nul)

$$\int_{-\infty}^{0} dt = 0$$

et pour $t \geq 0$: $\frac{n}{t} f_n(t) = n \frac{\alpha^n}{(n-1)!} e^{-\alpha t} t^{n-2}$ dont l'intégrale converge en $+\infty$ ($e^{-\alpha t} t^{n-2} = o\left(e^{-\alpha t/2}\right)$) et converge en 0 et seulement si $n-2 > -1$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{n}{t} f_n(t)\, dt = \int_{0}^{+\infty} dt$$

dans laquelle on fait réapparaître $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} dt = 1$ puisque f_n est une densité

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-2)!} e^{-\alpha t} t^{n-2} dt = \int_{0}^{+\infty} f_{n-1}(t)\, dt = 1 \text{ pour } n-1 \geq 1$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} \frac{n}{t} f_n(t)\, dt &= \frac{n}{n-1} \alpha \int_{0}^{+\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-2)!} e^{-\alpha t} t^{n-2} dt \\
&= \frac{n}{n-1} \alpha
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour } n \geq 2,\ W_n \text{ a une espérance et } E(W_n) = \frac{n}{n-1}\alpha}$

On a alors $E\left(\frac{n-1}{n} W_n\right) = \frac{n-1}{n} E(W_n) = \alpha$

Conclusion : $\boxed{W_n' = \frac{n-1}{n} W_n \text{ est un estimateur sans biais de } \alpha}$

d) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$W_n' = \frac{n-1}{n} W_n.$$

i. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

En admettant que le moment d'ordre 2 de W_n' est égal à $E\left(W_n'^2\right) = \frac{(n-1)\alpha^2}{n-2}$

$$\begin{aligned}
V(W_n') &= E\left(W_n'^2\right) - E(W_n')^2 \\
&= \frac{(n-1)\alpha^2}{n-2} - \alpha^2 \\
&= \frac{\alpha^2}{n-2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V(W_n') = \frac{\alpha^2}{n-2}}$,

et comme $V(W_n') \neq 0$ alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(|W_n' - E(W_n')| \geq \varepsilon\right) &\geq \frac{V(W_n')}{\varepsilon^2} \text{ et} \\
\mathrm{P}\left(|W_n' - E(W_n')| < \varepsilon\right) &\leq 1 - \frac{V(W_n')}{\varepsilon^2} \text{ soit} \\
\mathrm{P}\left(W_n' - \varepsilon < \alpha < W_n' + \varepsilon\right) &\geq 1 - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2 (n-2)}
\end{aligned}$$

ii. On suppose dans cette question (et elle seule) que α est strictement compris entre 1 et 2.
et on prend $\varepsilon = 1/10$. On a alors

$$\begin{aligned} 1-\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2(n-2)} &\geq 1-\frac{400}{(n-2)} \geq 0,95 \text{ si} \\ 0,05 &\geq \frac{400}{(n-2)} \text{ si} \\ n-2 &\geq \frac{40000}{5} \text{ si } n \geq 8002 \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{P}\left(W'_n - \frac{1}{10} < \alpha < W'_n + \frac{1}{10}\right) \geq 0,95 \text{ si } n \geq 8002$$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour } N = 8002 \text{ l'intervalle } \left[W'_n - \frac{1}{10}, W'_n + \frac{1}{10}\right] \\ \text{est de confiance pour tout } n \geq N \text{ au niveau de confiance } 95\%\end{array}}$

2. On suppose maintenant que seul le paramètre α est déjà identifié et qu'il vérifie : $\alpha \geq 2$.

a) Pour tout entier strictement positif n, on pose :

$$Y_n = c_n \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

où le réel c_n $(Y_n)_{n\geq 1}$ soit un estimateur sans biais de β.

i. On a $E(X_k) = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha-1}$ donc $E(Y_n) = c_n \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = nc_n \dfrac{\alpha\beta}{\alpha-1}$ et Y_n est sans biais comme estimateur de β si $E(Y_n) = \beta$

Conclusion : $\boxed{c_n = \dfrac{\alpha-1}{n\alpha}}$

ii. Comme les X_k sont indépendantes,

$$\begin{aligned} V(Y_n) &= c_n^2 \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \\ &= c_n^2\ n\ V(X) \\ &= \frac{(\alpha-1)^2}{n^2\alpha^2} n \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \\ &= \frac{\beta^2}{n\alpha(\alpha-2)} \\ &\to 0 \text{ quand } n \to +\infty \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V(Y_n) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty}$

b) Pour tout entier strictement positif n, on pose : $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

i. Soit F la fonction de répartition commune aux X_k et G celle de Z_n.
Pour tout x réel, $G(x) = \mathrm{P}(Z \leq x) = \mathrm{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) \leq x)$ et en passant par le contraire :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\min\left(X_1,\ldots,X_n\right)>x\right) &= \mathrm{P}\left(X_1>x\cap\cdots\cap X_n>x\right)\\
&= \mathrm{P}\left(X_1>x\right)\cdots\mathrm{P}\left(X_n>x\right)\\
&= \left(1-F\left(x\right)\right)^n
\end{aligned}
$$

Donc $G\left(x\right)=1-\left(1-F\left(x\right)\right)^n$ fonction qui est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\beta\right\}.$
Donc Z_n est à densité et une densité de Z_n est donnée par : $g\left(x\right)=n\left(1-F\left(x\right)\right)^{n-1}f\left(x\right)$ où f est une densité de X
Donc pour $x\geq\beta$:

$$
\begin{aligned}
g\left(x\right) &= n\left(1-\left(1-\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha\right)\right)^{n-1}\left(\alpha\frac{\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}\right)\\
&= n\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha(n-1)}\left(\alpha\frac{\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}\right)\\
&= n\alpha\frac{\beta^{\alpha n}}{x^{\alpha n+1}}
\end{aligned}
$$

et $g\left(x\right)=0$ si $x<\beta$

Conclusion : $\boxed{Z_n \text{ suit une loi de Pareto de paramètres } n\alpha \text{ et } \beta \text{ donc } E\left(Z_n\right)=\dfrac{n\alpha\beta}{n\alpha-1}}$

et comme $\dfrac{n\alpha\beta}{n\alpha-1}=\dfrac{n\alpha\beta}{n\alpha\left(1-1/n\alpha\right)}\to\beta$ quand $n\to+\infty$

Conclusion : $\boxed{E\left(Z_n\right)\to\beta}$

ii. Pour tout entier strictement positif n, on pose : $Z_n'=d_nZ_n$, où le réel d_n est choisi de telle sorte que $\left(Z_n'\right)_{n\geq1}$ soit un estimateur sans biais de β ($E\left(Z_n'\right)=\beta$)

On prend donc $d_n=\dfrac{\beta}{E\left(Z_n\right)}=\dfrac{n\alpha-1}{n\alpha}\to1$

On a $V\left(Z_n\right)=\dfrac{n\alpha\beta^2}{\left(n\alpha-1\right)^2\left(n\alpha-2\right)}\sim\dfrac{n\alpha\beta^2}{n^3\alpha^3}\sim\dfrac{\beta^2}{n^2\alpha^2}$

Donc $V\left(Z_n'\right)=d_n^2V\left(Z_n\right)\sim\dfrac{\beta^2}{n^2\alpha^2}\to0$

Conclusion : $\boxed{V\left(Z_n'\right)\to0 \text{ quand } n\to+\infty}$

iii. On avait $V\left(Y_n\right)=\dfrac{\beta^2}{n\alpha\left(\alpha-2\right)}.$

Donc $V\left(Y_n\right)/V\left(Z_n'\right)\sim n\alpha/\left(\alpha-2\right)\to+\infty$

Donc à partir d'un certain rang, la variance (en fait le risque quadratique) de Y_n est plus grand que celui de Z_n'.

Conclusion : $\boxed{\text{l'estimateur } \left(Z_n'\right)_{n\geq1} \text{ est plus efficace que l'estimateur } \left(Y_n\right)_{n\geq1}}$