MATHÉMATIQUES - Ecricome E 2015

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

I - Une loi exponentielle et une suite

1. Une loi exponentielle.

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

a) On cite le cours : une densité de X est la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$

b) La fonction de répartition F de X, est alors définie par la formule générale :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

On distingue deux cas, suivant que x est positif ou négatif :

- Pour tout $x < 0$: $\quad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0.$
- Pour tout $x \geqslant 0$: $\quad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} e^{-t}\mathrm{d}t = 0 + \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + e^0 = 1 - e^{-x}.$

On a bien : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$

2. Étude d'une suite.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = F(u_n)$.

a) On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^x - (x+1)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x - 1$.
$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$ par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.
Il est clair par ailleurs que la dérivée ne s'annule qu'en 0 ; on en déduit que : g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
La fonction g admet donc un minimum en 0, qui vaut $g(0) = e^0 - (0+1) = 1 - 1 = 0$.

Par conséquent : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0 \iff \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1$, et l'égalité n'a effectivement lieu qu'en 0.

b) On démontre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$: $u_n > 0$ est une propriété vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ L'énoncé définit $u_1 = 1 > 0$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : $u_{n+1} > 0$.
On sait $(H.R.)$ que : $u_n > 0$ et $u_{n+1} = F(u_n) = 1 - e^{-u_n}$ puisqu'alors $u_n > 0$.
Ainsi : $-u_n < 0 \iff e^{-u_n} < e^0$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$, soit :
$1 - e^{-u_n} > 0 \iff u_{n+1} > 0$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

c) Le point de vue adopté ici par l'énoncé est de créer d'emblée un tableau de taille 100 initialement nul, qui permette de calculer de proche en proche les termes successifs de la suite. Cela permet de rester très proche de la relation de récurrence, et on complète le script :

```
U = zeros(1,100)
U(1)=1
for n=1 : 99
    U(n+1) = 1-exp(-U(n))
end
plot(U,"+")
```

d) Au vu du comportement du nuage de points représentant dans l'énoncé les 100 premiers termes de la suite (u_n), il semble bien que cette suite **converge vers 0 en décroissant**.

e) On peut en fait réinvestir ici les relations rencontrées dans la récurrence de la question 2.b), pour l'étude de la monotonie de la suite. On a en effet :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = 1 - e^{-u_n} - u_n = 1 - u_n - e^{-u_n}$, où :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0 \iff -u_n < 0$ donc $e^{-u_n} > 1 - u_n$ d'après 2.a), soit :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - u_n - e^{-u_n} < 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien strictement décroissante.

f) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante, elle est de plus minorée par 0 d'après la question 2.b) : c'est bien une suite convergente, d'après le théorème de limite monotone, de limite $L \geqslant 0$.
Dans la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = F(u_n)$, on peut alors passer à la limite, sachant que F est continue sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :
$L = F(L) \iff L = 1 - e^{-L} \iff e^{-L} - (1 - L) = 0$.
On est ici avec $x = -L$, dans le cas d'égalité de l'inégalité démontrée en 2.b), donc :

$$-L = 0 \iff L = 0$$

g) On a déjà largement utilisé l'inégalité de 2.a), notamment avec $x = -u_n$ pour obtenir $u_{n+1} \geqslant u_n$. Le résultat demandé ici est différent, il faut essayer autre chose...

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = 1 - \dfrac{1}{e^{u_n}}$.

D'après 2.a) : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{u_n} \geqslant 1 + u_n (> 1) \iff \dfrac{1}{e^{u_n}} \leqslant \dfrac{1}{u_n + 1}$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -e^{-u_n} \geqslant -\frac{1}{1+u_n} \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - e^{-u_n} \geqslant 1 - \frac{1}{1+u_n}$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - e^{-u_n} \geqslant \frac{1+u_n-1}{1+u_n} \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} \geqslant \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Comme les deux membres de cette inégalité sont strictement positifs, il reste à utiliser une dernière fois la stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1+u_n}{u_n} \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{u_n} + 1.$$

h) On démontre comme demandé par récurrence sur n, que $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$" est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$: $u_1 = 1 \geqslant \dfrac{1}{1}$ est vrai, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

On sait (H.R.) que : $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$, donc par inverse :

$\dfrac{1}{u_n} \leqslant n \iff \dfrac{1}{u_n} + 1 \leqslant n + 1 \iff \dfrac{1}{u_{n+1}} \leqslant n + 1 \iff u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{n+1}$ à nouveau par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

i) Le vecteur ligne `S = cumsum(U)` contient les *sommes cumulées* du tableau `U`, c'est-à-dire les somme partielles successives $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, pour k variant de 1 à 100. Ce sont ces sommes partielles qui forment la *série* de terme général u_n.

La courbe tracée sur le même graphique est celle de la fonction ln : il semble donc, au vu de la représentation graphique, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n \geqslant \ln(n)$.

Mais comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$: alors il semble bien que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = +\infty$ par comparaison, c'est-à-dire que la série de terme général (positif) u_n, est divergente.

j) On sait d'après la question 2.h) que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

Or : la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est, d'après le cours, divergente : c'est la série harmonique, de Riemann avec $\alpha = 1$.

Le *théorème de comparaison des séries à termes positifs* assure alors que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est elle-même divergente.

II - Une fonction et une variable aléatoire à densité

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

1. Étude de la fonction g.

a) La fonction g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante sur cet intervalle, et sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonction dérivables sur cet intervalle.

- Étude de la continuité en 0 :

  $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0,$

  et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} xe^{-x} = 0.e^0 = 0.$

  Et comme $g(0) = 0.e^0 = 0$: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^-} g(x) = g(0)$, donc g est continue en 0.

- Étude de la dérivabilité en 0 : on étudie le taux d'accroissement en 0,

  à savoir $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{g(x)}{x}$.

  Si $x < 0$: $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{0}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0.$

  Si $x > 0$: $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{xe^{-x}}{x} = e^{-x}$, donc $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = e^0 = 1.$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$: la fonction g n'est donc pas dérivable en 0 (seulement dérivable à gauche et à droite en ce point).

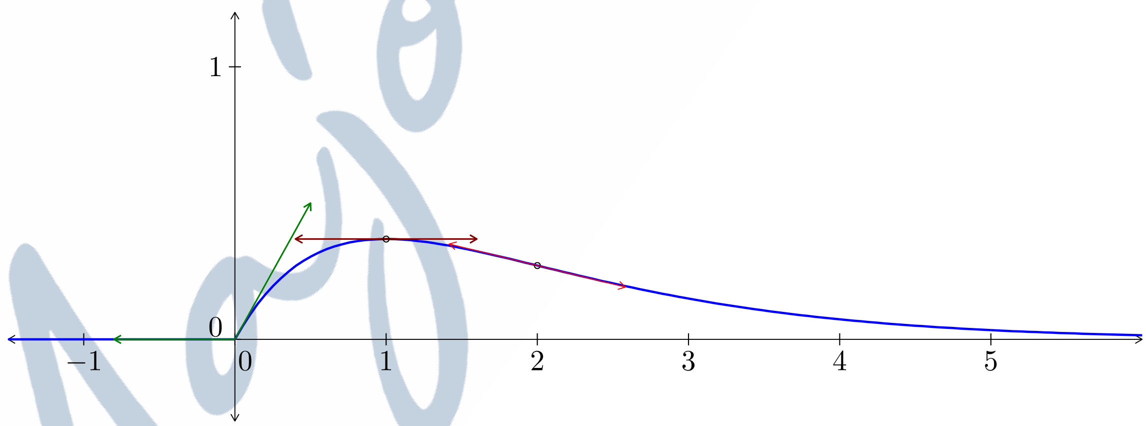
b) Sur $]0,+\infty[$, la fonction g est dérivable avec :
$\forall x > 0,\ g'(x) = 1.e^{-x} + x.(-e^{-x}) = (1-x).e^{-x}$.
Comme : $\forall x > 0,\ e^{-x} > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $1-x$, et $1-x > 0 \iff x < 1$, d'où le tableau de variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0^+$.

c) La fonction g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions de classe C^2 sur cet intervalle. On sait déjà que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = (1-x).e^{-x}$, donc :
$\forall x \in]0,+\infty[,\ g''(x) = (-1).e^{-x} + (1-x).(-e^{-x}) = (-1-1+x).e^{-x} = (x-2).e^{-x}$, et :
$g''(x) > 0 \iff x-2 > 0 \iff x > 2$.
On en déduit que g est :
concave sur $]0,2]$, convexe sur $[2,+\infty[$ et que sa courbe admet un unique *point d'inflexion* $A(2, g(2)) = (2, 2e^{-2})$.

d) On trace alors soigneusement la courbe de g sur $\mathbb{R}$, en tenant compte :
du fait qu'elle est constante nulle sur $\mathbb{R}^-$, continue mais pas dérivable en 0 : en ce point la courbe admet deux demi-tangentes, horizontale à gauche et de coefficient directeur 1 à droite.
On fait également bien apparaître le maximum qui vaut e^{-1}, le point d'inflexion d'abscisse 2, et enfin le fait que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$.



2. Étude de variables aléatoires.

a) On vérifie ici les trois propriétés que doit posséder g pour être une densité de probabilité :
- La fonction g a déjà été démontrée continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction g est positive car nulle sur $]-\infty,0[$. Pour tout $x \in [0,+\infty[,\ g(x) = x.e^{-x}$ est bien positif comme produit de deux réels positifs. Donc g est positive sur $\mathbb{R}$.

- On calcule enfin l'intégrale :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\ \mathrm{d}x}_{=0} + \int_{0}^{+\infty} x.e^{-x}\mathrm{d}x.$$
Ici deux solutions de rédaction se présentent :

$\boxed{1.}$ On peut calculer directement l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$ en revenant à l'intégrale $\displaystyle\int_0^X x.e^{-x}\mathrm{d}x$ (pour $X > 0$) dans laquelle on pose une intégration par parties :

$$u(x) = x \quad \to \quad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = e^{-x} \quad \to \quad v(x) = -e^{-x}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, donc par intégration par parties, pour tout $X > 0$:

$$\int_0^X xe^{-x}\mathrm{d}x = \left[-xe^{-x}\right]_0^X - \int_0^X (-e^{-x})\mathrm{d}x = -Xe^{-X} + \int_0^X e^{-x}\mathrm{d}x = -Xe^{-X} + \left[-e^{-x}\right]_0^X = -Xe^{-X} - e^{-X} + 1$$

où : $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^{-X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = 0$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} Xe^{-X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ par croissances comparées, donc :
$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

$\boxed{2.}$ On peut aussi constater que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x.e^{-x}\mathrm{d}x$ correspond à l'*espérance* de la variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1, introduite en début d'énoncé. C'est d'ailleurs ici qu'on trouverait la seule utilité de son introduction ! D'après le cours : $E(X) = \dfrac{1}{1} = 1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x.e^{-x}\mathrm{d}x.$

Quelle que soit la méthode utilisée : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = 1$, ce qui achève de prouver que g est bien une densité de probabilité.

On note Y une variable aléatoire dont une densité est la fonction g, et dont la fonction de répartition est notée G.

b) La fonction de répartition G est de classe C^1 partout où la densité g est continue, puisque G est la primitive de g qui tend vers 0 en $-\infty$. Comme g est continue sur tout $\mathbb{R}$, G est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) Par définition, pour tout réel x : $\displaystyle G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{d}t$. On distingue deux cas dans le calcul :

- Si $x < 0$: la fonction g est nulle sur $]-\infty, 0[$ donc sur $]-\infty, x]$ et $\displaystyle G(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ \mathrm{d}t = 0$.

- Si $x \geqslant 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\ \mathrm{d}t + \int_0^x t.e^{-t}\mathrm{d}t.$
Le calcul de la deuxièmre intégrale a déjà été fait à la question 2.a) si on a utilisé la première méthode, sinon on ne coupe pas ici à l'intégration par parties. On a bien obtenu (en adaptant les noms des variables) :
$$\forall x \geqslant 0,\ G(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}(1 + x)$$

d) La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x.g(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

La fonction $x \mapsto x.g(x)$ étant nulle (car g l'est) sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$ (car x et $g(x)$ le sont), on est ramené à étudier la convergence simple de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2.e^{-x}\mathrm{d}x.$$

Là encore, le plus efficace est de se ramener à un résultat de cours sur la loi exponentielle de paramètre 1, suivie par X : l'intégrale cherchée apparaît en effet, d'après le *théorème de transfert*, comme $E(X^2)$, le moment d'ordre 2 de X.
Et d'après la formule de Koenig-Huygens : X admet un tel moment et une variance, qui vérifient : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \iff E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{1} = 2$ d'après le cours.

On conclut donc que : Y admet une espérance qui vaut $E(Y) = 2$.

3. On considère la variable aléatoire $Z = e^Y$.

a) Un point sur l'univers-image pour commencer : Y est à valeurs dans $[0, +\infty[$, donc $Z = e^Y$ est à valeurs dans $[1, +\infty[$, intervalle-image du précédent par la fonction exponentielle.

De façon générale : pour tout réel x,
$F_Z(x) = P(Z \leqslant x) = P(e^Y \leqslant x)$ est nulle si $x \leqslant 0$ car l'événement $[e^Y \leqslant x]$ est impossible.
Pour tout réel $x > 0$: $P(e^Y \leqslant x) = P(Y \leqslant \ln(x))$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, soit :

$$\forall x > 0,\ F_Z(x) = G(\ln(x)) = \begin{cases} 0 \text{ si } \ln(x) < 0 \iff 0 < x < 1 \\ 1 - e^{-\ln(x)}(1 + \ln(x)) = 1 - \dfrac{1 + \ln(x)}{x} \text{ si } \ln(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Bilan : $$\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1 + \ln(x)}{x} \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

b) La fonction de répartiton H de Z est de classe C^1, donc continue, sur $]-\infty, 1[$ comme fonction constante (nulle), et de classe C^1 donc continue, sur $]1, +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions de référence continues sur cet intervalle.
Il reste donc à étudier la continuité en 1 :

$$\lim_{x \to 1^-} H(x) = \lim_{x \to 1^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^+} H(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 - \frac{1 + \ln(x)}{x} = 1 - \frac{1 + 0}{1} = 0 = H(1)$$

Ainsi, H est continue en 1, donc finalement sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 1 : Z est bien une variable aléatoire à densité.

Une densité h de Z est obtenue par dérivation de H sauf en 1 où on donne la valeur 0 à h :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ -\dfrac{\frac{1}{x}.x - (1 + \ln(x)).1}{x^2} = \dfrac{\ln(x)}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

c) Il y a là encore deux façons possibles de rédiger cette question (mais une seule suffit le jour du concours bien sûr !) :

- Le plus naturel est d'étudier l'existence de l'espérance de Z à partir de la densité qu'on vient de calculer :
  Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x.h(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
  Comme la fonction $x \mapsto x.h(x)$ est nulle sur $]-\infty, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$, cela revient à étudier la convergence simple de $\displaystyle\int_1^{+\infty} x.h(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x.$

Or pour tout $X > 1$: $\displaystyle\int_1^X \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_1^X \underbrace{\frac{1}{x} \times \ln(x)}_{=u' \times u}\mathrm{d}x = \left[(\ln(x))^2\right]_1^X = (\ln(X))^2 \xrightarrow[X \to +\infty]{} +\infty$.

L'intégrale impropre est donc divergente, et Z n'admet pas d'espérance.

- On peut aussi exploiter le fait que $Z = e^Y$ est une fonction de Y : comme exp est continue sur $\mathbb{R}$, le *théorème de transfert* affirme que $E(Z) = E(e^Y)$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^x.g(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

  La fonction $x \mapsto e^x.g(x)$ est nulle (car g l'est) sur $]-\infty, 0]$ et positive (car e^x et $g(x)$ le sont) sur $[0, +\infty[$, donc il suffit d'étudier la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^x.x.e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{d}x$.

  Cette intégrale est grossièrement divergente : on retrouve bien le fait que Z n'admet pas d'espérance.

Exercice 2

On rappelle que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit l'application φ_A par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \varphi_A(M) = AM$$

I - Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A

1. Remarquons tout d'abord que : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi_A(M) = AM$ appartient bien encore à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme produit de deux matrices carrées d'ordre 2.

   On étudie alors la linéarité de φ_A :

$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_A(\lambda.M+\mu.N) = A(\lambda.M+\mu.N) = \lambda.AM+\mu.AN = \lambda.\varphi_A(M)+\mu.\varphi_A(N)$$

   d'après les propriétés du produit matriciel.
   L'application $\varphi_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donc linéaire : c'est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Une question subtile ici : l'équation $AN = I_2$ se réécrit : $\varphi_A(N) = I_2$, par définition de l'endomorphisme.
   Si celui-ci est bijectif : alors cette équation admet une unique solution : il existe un unique antécédent N par φ_A pour I_2, autrement dit il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_A(N) = I_2 \iff AN = I_2$.

3. La question précédente a permis de prouver que : **si** φ_A est bijectif, **alors** A est inversible puisqu'il existe dans ce cas $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$ (N est alors l'inverse A^{-1} de A).

   Il reste donc à étudier la **réciproque** :
   si A est inversible, **alors** φ_A est-il bien bijectif ?
   On considère pour cela, et pour tout $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'équation : $\varphi_A(M) = N$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\varphi_A(M) = N \iff AM = N \iff M = A^{-1}N$$

   puisque A est supposée inversible. On obtient bien une unique solution $M = A^{-1}N$ à l'équation $\varphi_A(M) = N$, et ce pour tout $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc φ_A est bien bijective.

   On a bien montré par *double implication*, l'**équivalence** :

$$\varphi_A \text{ est bijectif} \iff A \text{ est inversible}$$

II - Un exemple

Dans cette partie et uniquement cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (les 4 matrices élémentaires carrées d'ordre 2).

1. La matrice A est **triangulaire**, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Ainsi : $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

   On est donc dans la situation où A est une matrice carrée **d'ordre 2** possédant **deux valeurs propres distinctes** : le critère *suffisant* de diagonalisabilité permet alors d'affirmer sans calcul que A est diagonalisable.

2. On construit la matrice de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathcal{B}$ en calculant les images par cet endomorphisme, de chacun des 4 éléments de $\mathcal{B}$; le but est d'écrire chaque image comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$:

$$\varphi_A(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1}.E_{11}$$

$$\varphi_A(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1}.E_{12}$$

$$\varphi_A(E_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{2}.E_{11} + \mathbf{(\text{-}1)}.E_{21}$$

$$\varphi_A(E_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{2}.E_{12} + \mathbf{(\text{-}1)}.E_{22}$$

   La matrice T de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathcal{B}$ est bien :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \varphi_A(E_{11}) & \varphi_A(E_{12}) & \varphi_A(E_{21}) & \varphi_A(E_{22}) \end{array} \\ T = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \end{array}$$

3. La matrice T de l'endomorphisme φ_A étant *triangulaire* (supérieure), les valeurs propres de T, donc de φ_A, sont ses éléments diagonaux, et donc :

$$\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(\varphi_A) = \{-1, 1\}.$$

   Calcul des sous-espaces propres : les vecteurs sont ici des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

   - Les vecteurs propres de φ_A pour la valeur propre 1 sont donc les solutions de :

$$\varphi_A(M) = 1.M \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ -z & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

     On résout donc le système :

$$\begin{cases} x + 2z &= x \\ y + 2t &= y \\ z &= -z \\ t &= -t \end{cases} \iff \begin{cases} 2z &= 0 \\ 2t &= 0 \\ 2z &= 0 \\ 2t &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= 0 \\ t &= 0 \end{cases}$$

Les inconnues x et y, absentes du système final, sont variables libres, et le sous-espace propre cherché est :

$$E_1(\varphi_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconques} \right\} = \left\{ x.E_{11} + y.E_{12} | \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\,(E_{11}, E_{12})$$

Comme (E_{11}, E_{12}) est une famille génératrice de $E_1(\varphi_A)$ de deux vecteurs non colinéaires, c'est une base de ce sous-espace propre et $\dim E_1(\varphi_A) = 2$.

- Les vecteurs propres de φ_A pour la valeur propre -1 sont les solutions de :

$$\varphi_A(M) = -1.M \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ -z & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -t \end{pmatrix}$$

On résout donc le système :

$$\begin{cases} x+2z & = -x \\ y+2t & = -y \\ z & = z \\ t & = t \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+2z = 0 \\ 2y+2t = 0 \\ z,t \in \mathbb{R} \text{ quelconques} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -t \\ z,t \in \mathbb{R} \text{ quelconques} \end{cases}$$

Le sous-espace propre cherché est donc :

$$E_{-1}(\varphi_A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z & -t \\ z & t \end{pmatrix} \middle| \ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ quelconques} \right\} = \left\{ z.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ z,t \in \mathbb{R} \text{ quelconques} \right\}$$
$$= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Là encore, $E_{-1}(\varphi_A)$ est engendré par deux matrices non-colinéaires, qui forment donc une famille libre, et donc une base du sous-espace propre. Ainsi : $\dim E_{-1}(\varphi_A) = 2$.

4. On est ici dans la situation où φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension $2^2 = 4$, avec 2 valeurs propres -1 et 1, telles que :

$$\dim E_1(\varphi_A) + \dim E_{-1}(\varphi_A) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Le théorème de cours assure donc que **l'endomorphisme φ_A est diagonalisable**.

III - D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A

On désigne par $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes.

1. Soit un réel λ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant :

$$\varphi_A(M) = \lambda.M$$

Cette relation se réécrit : $AM = \lambda.M \iff AM - \lambda.M = 0_2 \iff (A - \lambda.I_2)M = 0_2$.

Si donc on suppose $A - \lambda.I_2$ inversible, **alors** la dernière relation est équivalente à $M = 0_2$ puisqu'on peut alors multiplier les deux membres de l'égalité par $(A - \lambda.I_2)^{-1}$.

Or ceci est absurde, puisque M est supposée non nulle !

Donc : sous l'hypothèse faite, $A - \lambda.I_2$ n'est **pas** inversible.

2. Soit un réel μ tel qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \mu X$.

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

La relation $AX = \mu X$ signifie : $\varphi_A(X) = \mu X$, et donne lieu aux relations : $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix}$.

On vérifie alors que N et N' sont vecteurs propres de φ_A en calculant :

$$\varphi_A(N) = AN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & 0 \\ cx+dy & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x & 0 \\ \mu y & 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \mu.N$$

et de même :

$$\varphi_A(N') = AN' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ax+by \\ 0 & cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu x \\ 0 & \mu y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \mu.N'$$

Les vecteurs N et N' sont bien des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre μ.

3. Il faut ici bien prendre en compte les conséquences des deux questions précédentes de cette partie :
   - La question 1. établit l'implication :

     $$\exists\ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{0_2\},\ \varphi_A(M) = \lambda.M \Longrightarrow A - \lambda.I_2 \text{ n'est pas inversible}$$

     ce qui se reformule :

     $$\lambda \text{ est valeur propre de } \varphi_A \Longrightarrow \lambda \text{ est valeur propre de } A$$

     Donc : $\quad \mathrm{Sp}(\varphi_A) \subset \mathrm{Sp}(A)$.

   - La question 2. établit de même que :

     $$\mu \text{ est valeur propre de } A \Longrightarrow \mu \text{ est valeur propre de } \varphi_A$$

     Puisqu'à partir d'un vecteur propre non nul de A associé à μ, on construit deux vecteurs propres N et N' de φ_A, associés eux aussi à μ : ils sont bien non-nuls puisque l'un de leurs colonnes est le vecteur X.

     Donc : $\quad \mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(\varphi_A)$.

   Bilan : par *double inclusion*, $\mathrm{Sp}(\varphi_A) = \mathrm{Sp}(A)$.

4. Le plus difficile dans cette question est certainement de choisir le point de vue pour exprimer la diagonalisabilité, qui permette de conclure efficacement. Les questions précédentes incitent à parler en termes de vecteurs propres :

   Si la matrice A est diagonalisable : cela signifie alors qu'il existe une base de (X, Y) de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres pour A.

   Les deux matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ forment en particulier une famille libre, et le système :

   $$\alpha.X + \beta.Y = 0_{2,1} \iff \begin{cases} \alpha.x + \beta.x' &= 0 \\ \alpha.y + \beta.y' &= 0 \end{cases}$$

   admet pour unique solution, le couple $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.

   La question 2. a alors établit que $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$, construits à partir de X, sont vecteurs propres de φ_A ; mais selon ce principe, $M = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ y' & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix}$ sont aussi vecteurs propres de φ_A.

   On dispose donc d'une famille (N, N', M, M') de 4 vecteurs propres de φ_A dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4. Si c'est une famille libre, c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Posons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 4 réels tels que :

$$\alpha.N + \beta.N' + \gamma.M + \delta.M' = 0_2 \iff \begin{pmatrix} \alpha.x + \gamma.x' & \beta.x + \delta.x' \\ \alpha.y + \gamma.y' & \beta.y + \delta.y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha.x + \gamma.x' &= 0 \\ \alpha.y + \gamma.y' &= 0 \\ \beta.x + \delta.x' &= 0 \\ \beta.y + \delta.y' &= 0 \end{cases}$$

On retrouve deux fois de suite le même système que celui évoqué plus haut (les inconnues sont regroupées deux par deux dans le système), et par conséquent l'unique solution du système est : $\alpha = \gamma = 0 = \beta = \delta$.

La famille (N, N', M, M') est donc une famille libre de 4 vecteurs propres de φ_A dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 4 : c'est donc une base de cet espace formée de vecteurs propre de φ_A, ce qui suffit à conclure que φ_A **est diagonalisable si** A **l'est**.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire, l'urne U_2 contient N boules blanches.

I - Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1 jusqu'à l'obtention de la boule noire.

1. On simule 10000 fois l'expérience aléatoire. Comme `Scilab` ne sait générer que des *nombres aléatoires*, il faut ici considérer que parmi les N premiers entiers $1, 2, \dots, N$ qui pourraient représenter chacun un numéro affecté à une boule, on a donné le numéro 1 à la seule boule noire.

   La simulation d'un tirage revient alors au choix aléatoire et avec équiprobabilité, d'un entier compris entre 1 et N : on considère qu'on a obtenu la boule noire si cet entier vaut 1. Sinon, on considère qu'on enlève une boule blanche de l'urne, et on recommence avec un nombre de boules qui a diminué d'une unité. Le script complété est donc :

```
N = input('␣Donner␣un␣entier␣naturel␣non␣nul␣');
S = zeros(1,N);
for k = 1 : 10000
        i = 1;
        M = N;
        while grand(1,1,'uin',1,M) > 1
            i = i + 1;
            M = M - 1;
        end
        S(i) = S(i) + 1;
end
disp(S/10000)
bar(S/10000)
```

2. L'histogramme obtenu suggère clairement que pour $n = 5$, la variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur** $[\![1, 5]\!]$ puisque chacune de ces 5 valeurs entières est prise, sur l'échantillon construit, avec une probabilité à peu près stable, proche de $0,2 = \dfrac{1}{5}$.

3. On revient au cas général où $N \geqslant 3$; avec les notations introduites dans l'énoncé :
   - $(X=1) = N_1$, donc $P(X=1) = P(N_1) = \dfrac{1}{N}$.
   - $(X=2) = B_1 \cap N_2$, donc $P(X=2) = P(B_1) \times P_{B_1}(N_2) = \dfrac{N-1}{N} \times \dfrac{1}{N-1} = \dfrac{1}{N}$, d'après la formule des probabilités composées.
   - $(X=3) = B_1 \cap B_2 \cap N_3$, donc toujours d'après la formule des probabilités composées :
   $P(X=3) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(N_3) = \dfrac{N-1}{N} \times \dfrac{N-2}{N-1} \times \dfrac{1}{N-2} = \dfrac{1}{N}$.
4. De façon générale : il est clair que puisque les tirages se font sans remise, $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$ puisqu'on peut obtenir la boule noire dès le premier tirage, ou devoir vider complètement l'urne pour finir par la boule noire, et toutes les situations intermédiaires sont possibles.

   Pour tout entier $k \in [\![1, N]\!]$: $\quad (X=k) = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k$, et d'après la formule des probabilités composées :
$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \ldots \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1}}(N_k) \\ &= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \ldots \times \frac{N-(k-1)}{N-(k-2)} \times \frac{1}{N-(k-1)} = \frac{1}{N} \end{aligned}$$
   en prenant en compte toutes les simplifications qui s'opèrent.

   La loi : $\forall k \in X(\Omega) = [\![1, N]\!],\ P(X=k) = \dfrac{1}{N}$ est bien entendu la **loi uniforme sur** $[\![1, N]\!]$.
5. Le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire, est l'espérance de X, qui est égale à : $\quad E(X) = \dfrac{N+1}{2}$ d'après le cours sur cette loi usuelle.

II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une dex deux urnes au hasard (avec équiprobabilité) et on tire dans l'urne choisie une par une des boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.

1. Si l'urne U_1 est choisie (événement C_1) : on sait qu'on est dans cette urne (et pas dans l'autre) uniquement lorsqu'on tire la boule noire, à n'importe quel moment. La *loi conditionnelle* de Y sachant C_1 est donc la même que celle de X, c'est-à-dire la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$:
$$\forall j \in [\![1, N]\!], \quad P_{C_1}(Y=j) = \frac{1}{N}$$
2. Si l'urne U_2 est choisie (événement C_2) : la seule façon de savoir que l'on est dans cette urne, est de la vider complètement de ses boules, une par une, pour se rendre compte en définitive qu'il n'y avait aucune boule noire dans cette urne ! On fera donc toujours N tirages sans remise, et :
$$\forall j \in [\![1, N-1]\!], \quad P_{C_2}(Y=j) = 0 \quad \text{et} \quad P_{C_2}(Y=N) = 1$$
3. La probabilité $P(Y=j)$ se calcule alors avec la **formule des probabilités totales**, utilisant le système complet des deux événements contraires l'un de l'autre (C_1, C_2). On écrit :
$$P(Y=j) = P(C_1) \times P_{C_1}(Y=j) + P(C_2) \times P_{C_2}(Y=j)$$
   où : $P(C_1) = P(C_2) = \dfrac{1}{2}$, les probabilités conditionnelles sont calculées ci-dessus. On distingue bien deux cas à nouveau :
$$\text{Si } j \in [\![1, N-1]\!],\ \text{alors } P(Y=j) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{N}$$

et :

$$P(Y=N)=\frac{1}{2}.\underbrace{P_{C_1}(Y=N)}_{=P(X=N)}+\frac{1}{2}.P_{C_2}(Y=N)=\frac{1}{2}.\frac{1}{N}+\frac{1}{2}.1$$

ce qui correspond bien aux résultats demandés.

4. La variable aléatoire a un univers-image fini, elle admet donc une espérance, qui vaut :

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{N} jP(Y=j)=\sum_{j=1}^{N-1} jP(Y=j)+NP(Y=N)$$

on sort d'emblée le terme pour $k=N$ de la somme : il ne suit pas l'expression générale !

$$=\sum_{j=1}^{N-1}\frac{j}{2N}+N.(\frac{1}{2}+\frac{1}{2N})=\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N-1} j+\frac{N}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2N}\times\frac{(N-1)N}{2}+\frac{N+1}{2}=\frac{N-1+2(N+1)}{4}=\frac{3N+1}{4}$$

III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue maintenant une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1.

T est la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour avoir obtenu au moins une fois les deux couleurs, et U est le nombre de boules blanches tirées entretemps.

1. Il faut au moins deux tirages pour obtenir au moins une fois chacune des deux couleurs ; on peut par contre tirer la même couleur un nombre de fois quelconque avant de tirer l'autre couleur (c'est bien la seule possibilité de faire durer l'expérience !), donc :

$$T(\Omega)=[\![2,+\infty[\![=\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$$

2. Pour tout entier $k\geqslant 2$: $(T=k)$ est réalisé si et seulement si le premier changement de couleur a lieu au k-ième tirage, donc :

$$\forall k\geqslant 2,\quad (T=k)=(B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap N_k)\cup(N_1\cap N_2\cap\ldots\cap N_{k-1}\cap B_k)$$

On calcule donc les probabilités de la loi :

$\forall k\geqslant 2,\quad P(T=k)=P(B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap N_k)+P(N_1\cap\ldots\cap N_{k-1}\cap B_k)$

car il s'agit d'une réunion de deux événements incompatibles

$=P(B_1)\times P(B_2)\times\ldots P(B_{k-1})\times P(N_k)+P(N_1)\times P(N_2)\times\ldots\times P(N_{k-1})\times P(B_k)$

car les tirages sont mutuellement indépendants

$$P(T=k)=\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\times\frac{1}{N}+\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\times\frac{N-1}{N}.$$

3. La variable aléatoire discrète T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 2} kP(T=k)$ est absolument convergente. Comme c'est une série à termes positifs ($k\geqslant 2$ et $P(T=k)\geqslant 0$: c'est une probabilité), il suffit d'étudier la convergence simple.

$$\forall n\geqslant 2:\ \sum_{k=2}^{n} kP(T=k)=\frac{1}{N}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}+\frac{N-1}{N}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

On reconnaît deux séries géométriques dérivées une fois, de raisons respectives $\frac{N-1}{N}$ et $\frac{1}{N}$ qui appartiennent toutes les deux à $]0,1[$ puisque $N \geqslant 3$. Les deux séries convergent, donc T admet une espérance. Dans le calcul de la somme totale, on prend bien garde au fait qu'il manque à chaque fois le terme d'indice $k=1$:

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{k=2}^{+\infty} kP(T=k) = \frac{1}{N}\left(\sum_{k1}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} - 1\right) \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{(1-\frac{N-1}{N})^2} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{N}.(N^2-1) + \frac{N-1}{N}.\left(\frac{N^2}{(N-1)^2} - 1\right) = N - \frac{1}{N} + \frac{N}{N-1} - \frac{N-1}{N} \\ E(T) &= N + \frac{N}{N-1} - 1 \end{aligned}$$

4. a) L'événement $[U=1]\cap[T=2]$ est réalisé si et seulement si les deux premiers tirages ont donné une boule blanche puis une boule noire, ou une boule noire puis une boule blanche ; ce sont deux événements incompatibles, donc :

$$P([U=1]\cap[T=2]) = P((B_1\cap N_2)\cup(N_1\cap B_2)) = P(B_1)\times P(N_2)+P(N_1)\cap P(B_2) = 2\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{N} = \frac{2N-2}{N^2}$$

par indépendance des tirages.

b) Pour tout entier $k \geqslant 3$: l'événement $[U=1]\cap[T=k]$ est réalisé si et seulement si on a besoin de k tirages exactement pour obtenir au moins une fois chacune des 2 couleurs, tout en n'ayant obtenu qu'une boule blanche en définitive : cela signifie qu'on a commencé par tirer $k-1$ boules noires, pour finir par une boule blanche, et :

$$\forall k \geqslant 3,\ P([U=1]\cap[T=k]) = P(N_1\cap N_2\cap\ldots\cap N_{k-1}\cap B_k) = \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}$$

selon des calculs déjà menés à la question 2. en fait.

5. Soit j un entier tel que $j \geqslant 2$.

a) L'événement $[U=j]\cap[T=j+1]$ est réalisé si et seulement si on a besoin de $j+1$ tirages exactement pour obtenir au moins une fois les deux couleurs, tout en ayant obtenu j boules blanches dans le processus : cela signifie donc qu'on a commencé par tirer j boules blanches, suivies d'une $j+1$-ième boule de couleur noire, et :

$$P([U=j]\cap[T=j+1]) = P(B_1\cap\ldots\cap B_j\cap N_{j+1}) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^j\frac{1}{N}$$

b) L'étude des événements précédents amène à réaliser la chose suivante : puisqu'on cherche à obtenir au moins une fois chacune des deux couleurs, l'expérience ne perdure que tant qu'on tire toujours la même couleur depuis le début de l'expérience, et s'arrête dès qu'on obtient le premier changement de couleur. Le nombre U de boules blanches obtenues ne peut donc être égal qu'à 1 ou à j si $j+1$ est le nombre total T de tirages effectués. Ici $j \geqslant 2$, donc :

$$\text{Pour tout entier } k \geqslant 2 \text{ tel que } k \neq j+1, \quad P([U=j]\cap[T=k]) = 0$$

6. Les variables aléatoires T et U ne sont évidemment pas indépendantes, et l'étude précédente permet de trouver facilement un contre-exemple à la définition :
d'après 5.a) par exemple, $P([U=2]\cap[T=5]) = 0$ alors que $P(T=5)>0$ tandis que $P(U=2) \geqslant P([U=2]\cap[T=3]) > 0$, et ainsi :

$$P([U=2]\cap[T=5]) \neq P(U=2)\times P(T=5)$$

7. Les questions 4.a) et 4.b) ont permis de calculer les probabilités $P([U=1]\cap[T=k])$ pour tout k de $T(\Omega)=[\![2,+\infty[\![$, en traitant bien le cas particulier $k=2$.
On est dans le cas typique de l'utilisation de la **formule des probabilités totales**, avec le système complets d'événements $([T=k])_{k\geqslant 2}$, qui donne :

$$\begin{aligned}
P(U=1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P([U=1]\cap[T=k]) = P([U=1]\cap[T=2]) + \sum_{k=3}^{+\infty} P([U=1]\cap[T=k])\\
&= \frac{2N-2}{N^2} + \sum_{k=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}\\
&= \frac{2N-2}{N^2} + \frac{N-1}{N}\sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^{j} \qquad [j=k-1]\\
&= \frac{2N-2}{N^2} + \frac{N-1}{N}\times\frac{\frac{1}{N^2}}{1-\frac{1}{N}} \quad \text{série géométrique de raison } \frac{1}{N}\in]0,1[\\
&= \frac{2N-2}{N^2} + \frac{N-1}{N^3}\times\frac{N}{N-1} = \frac{2N-2}{N^2}+\frac{1}{N^2}\\
P(U=1) &= \frac{2N-1}{N^2}
\end{aligned}$$

Le même procédé s'applique a priori pour le calcul de $P(U=j)$ avec $j\geqslant 2$:

$$\forall j\geqslant 2,\quad P(U=j)=\sum_{k=2}^{+\infty} P([U=j]\cap[T=k])$$

cependant, comme on l'a bien vu aux questions 5.a) et 5.b), dans cette somme tous les termes hormis celui d'indice $k=j+1$ sont nuls, et donc :

$$\forall j\geqslant 2,\quad P(U=j)=P([U=j]\cap[T=j+1])=\left(\frac{N-1}{N}\right)^{j}.\frac{1}{N}$$

Ce qui achève le calcul de la loi de U.