

Exercice 1

1. La fonction $t \longrightarrow \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc $\int_1^\infty \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} dt$ ne pose de problème de convergence qu'en $+\infty$. Or pour t et x positifs, $\frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} \geq 0$.

Et comme, pour x strictement positifs, t^k est négligeable devant $(e^{x/2})^t$ quand t tend vers $+\infty$, $\frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} = \frac{t^k e^{-xt/2}}{1+t^5} e^{-xt/2}$ est négligeable devant $e^{-tx/2}$.

Or l'intégrale $\int_1^M e^{-tx/2} dt$ converge. Donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_1^\infty \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} dt$ converge.

Pour $x = 0$, $\frac{t^k e^{-0t}}{1+t^5} = \frac{t^k}{1+t^5} = \frac{t^{k-5}}{(1+1/t^5)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{k-5}$.

Donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives, pour $k \geq 4$, l'intégrale diverge et pour $k < 4$, elle converge.

2. On ne sait pas dériver sous l'intégrale (seulement en intégrant par parties). C'est d'ailleurs l'objet de cet exercice. On revient donc à la définition du sens de variation d'une fonction : si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$: Soient $x \leq y$ deux réels supérieurs à 0.

On a pour tout $t \geq 1$, $tx \leq ty$, $-tx \geq -ty$ et comme la fonction $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$, $e^{-tx} \geq e^{-ty}$.

Donc $\frac{e^{-xt}}{1+t^5} \geq \frac{e^{-yt}}{1+t^5} > 0$. Et $\int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^5} dt \geq \int_1^\infty \frac{e^{-yt}}{1+t^5} dt > 0$ car les bornes sont en ordre croissant. Donc si $0 \leq x \leq y$ alors $F(x) \geq F(y) > 0$.

Conclusion : F est une fonction strictement positive, décroissante

Pour la limite, comme on ne sait pas calculer l'intégrale, on majore d'abord la fonction (en conservant une fonction dont l'intégrale converge) :

Pour $t \geq 1$, on a $1+t^5 \geq 1$ et comme la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$ et que 1 et $1+t^5$ en sont éléments, $\frac{1}{1+t^5} \leq 1$. Enfin $e^{-xt} \geq 0$ donc

$$\frac{e^{-xt}}{1+t^5} \leq e^{-xt}$$

Or $\int_1^M e^{-tx} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-tx}\right]_{t=1}^M = -\frac{1}{x} e^{-Mx} + \frac{1}{x} e^{-x} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} e^{-x} = \int_1^\infty e^{-tx} dt$ donc comme les bornes sont en ordre croissant,

$$\int_1^\infty \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} dt \leq \int_1^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x} e^{-x}$$

On a donc : $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x} e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et par encadrement (et non par majoration)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

3. (a) On fait d'abord disparaître la valeur absolue en étudiant le signe du contenu :

$$e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} = e^{-tx} (e^{-th} - 1 + th)$$

Soit pour cela $H(z) = e^{-z} - 1 + z$, on trouve $H'(z) = -e^{-z} + 1 \geq 0$ pour $z \geq 0$

Donc H est croissante sur $[0, +\infty[$ et comme $H(0) = 0$, H est positive.

Donc pour $t \geq 0$ et $h \geq 0$, $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} \geq 0$ et la valeur absolue disparaît.

On étudie alors le sens de variation de la différence.

$$\text{On a } e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} - \frac{t^2 h^2}{2} e^{-tx} = e^{-tx} \left(e^{-th} - 1 + th - \frac{t^2 h^2}{2} \right).$$

Soit la fonction G définie par : $G(z) = e^{-z} - 1 + z - \frac{z^2}{2}$

G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(z) = -e^{-z} + 1 - z$.

G' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G''(z) = e^{-z} - 1 \leq 0$ pour $z \geq 0$ car $e^{-z} \leq e^0$

Donc G' est décroissante sur $[0, +\infty[$. Or $G'(0) = 0$ donc $G' \leq 0$ sur $[0, +\infty[$.

Donc G est décroissante sur $]0, +\infty[$. Et comme $G(0) = 0$, $G \leq 0$ sur $[0, +\infty[$.

Pour $t \geq 0$ et $h \geq 0$ on a $z = th \geq 0$ donc $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} - \frac{t^2 h^2}{2} e^{-tx} \leq 0$

Donc $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-tx}$. pour tout $h \geq 0, t \geq 0$ et x réel.

Finalement, pour tout réel $t \geq 0$, tout réel x et tout réel $h \geq 0$, on a :

$$\left| e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} \right| \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-tx}$$

$$(b) \quad e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} - \frac{t^2 h^2}{2} e^{-t(x+h)} = e^{-t(x+h)} (1 - e^{th} + t h e^{th} - \frac{t^2 h^2}{2})$$

Soit $G(z) = 1 - e^z + z e^z - \frac{z^2}{2}$.

G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(z) = z e^z - z = z(e^z - 1)$.

Or pour $z \leq 0, e^z \leq e^0 = 1$ donc $G' \geq 0$ sur $] -\infty, 0]$ et G y est croissante.

Comme $G(0) = 0$, on a alors $G \leq 0$ sur $] -\infty, 0]$.

Donc pour $t \geq 0$ et $h \leq 0$ avec $z = t.h \leq 0$ on a

$$e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} - \frac{t^2 h^2}{2} e^{-t(x+h)} \leq 0$$

et

$$e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-t(x+h)}$$

Soit $H(z) = 1 - e^z + z e^z$.

H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $H'(z) = z e^z \leq 0$ sur $] -\infty, 0]$.

Donc H est décroissante sur $] -\infty, 0]$. Comme $H(0) = 0$, on a $H \geq 0$ sur $] -\infty, 0]$.

Donc pour $t \geq 0$ et $h \leq 0$ avec $z = t.h \leq 0$ on a

$$0 \leq e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx}$$

et finalement

$$\left| e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} \right| \leq \frac{t^2 h^2}{2} e^{-t(x+h)}$$

$$(c) \quad \text{Or pour } t \geq 0, x \geq 0 \text{ et } x+h \geq 0, \text{ on a } -tx \leq 0 \text{ donc } e^{-tx} \leq 1 \text{ et } -t(x+h) \leq 0 \text{ donc } e^{-t(x+h)} \leq 1.$$

Si bien que, pour h positif ou négatif on a $\left| e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx} \right| \leq \frac{t^2 h^2}{2}$.

On remarque d'abord que toutes les intégrales ci dessous convergent :

En effet $\frac{t^2}{1+t^5} = \frac{1}{t^3(1+1/t^5)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^3} \geq 0$ donc $\int_1^\infty \frac{t^2 h^2}{2(1+t^5)} dt$ converge.

L'intégrale $\int_1^\infty \frac{t e^{-xt}}{1+t^5} dt$ a été traitée au 1).

Enfin pour $x \geq 0$ et $x+h \geq 0$, $F(x)$ et $F(x+h)$ sont définies.

$$\begin{aligned} \left| F(x+h) - F(x) + h \int_1^\infty \frac{t e^{-xt}}{1+t^5} dt \right| &= \left| \int_1^\infty \frac{e^{-t(x+h)}}{1+t^5} dt - \int_1^\infty \frac{e^{-tx}}{1+t^5} dt + \int_1^\infty \frac{t h e^{-tx}}{1+t^5} dt \right| \\ &= \left| \int_1^\infty \frac{e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx}}{1+t^5} dt \right| \text{ bornes croissantes} \\ &\leq \int_1^\infty \left| \frac{e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx}}{1+t^5} \right| dt \leq \int_1^\infty \frac{t^2 h^2}{2(1+t^5)} dt \end{aligned}$$

Doù finalement,

$$\left| F(x+h) - F(x) + h \int_1^\infty \frac{t e^{-xt}}{1+t^5} dt \right| \leq \frac{h^2}{2} \int_1^\infty \frac{t^2}{1+t^5} dt$$

(d) En factorisant puis divisant par $|h| > 0$ l'inégalité précédente, on retrouve le taux d'accroissement:

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \int_1^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_1^\infty \frac{t^2}{1+t^5} dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Donc par encadrement $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} + \int_1^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt$ tend vers 0 et $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_1^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt$.

Conclusion : F est dérivable en x et $F'(x) = \int_1^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt$

La dérivation a pu se faire à l'intérieur de l'intégrale.

Remarque : Le fait que x soit positif ne servait pas dans les inégalités mais seulement pour la convergence des intégrales. En 0 on n'obtient que la dérivée à droite : comme $x+h \geq 0$, on n'a pas les inégalités pour $h < 0$.

4. On a vu que pour $t \geq 0$, $x \geq 0$ et $x+h \geq 0$, on avait $|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t h e^{-tx}| \leq \frac{t^2 h^2}{2}$.

Donc $|te^{-t(x+h)} - te^{-tx} + t^2 h e^{-tx}| \leq \frac{t^3 h^2}{2}$.

En procédant comme précédemment, on obtient $\left| \frac{F'(x+h)-F'(x)}{h} + \int_1^\infty \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^5} dt \right| \leq \frac{h^2}{2} \int_1^\infty \frac{t^3}{1+t^5} dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Il faut noter que cette intégrale converge encore car $\frac{t^3}{1+t^5} \sim \frac{1}{t^2}$. On ne pourra donc pas procéder ainsi une fois de plus.

Donc par encadrement $\frac{F'(x+h)-F'(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_1^\infty \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^5} dt$.

Finalement F' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $F''(x) = \int_1^\infty \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^5} dt$

5. On se propose de montrer que la fonction $\ln(F)$ est convexe.

(a) $a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ est un polynôme de degré 2 en λ . Donc s'il est positif ou nul pour tout λ c'est que son discriminant est négatif ou nul. i.e. si $(2b)^2 - 4ac \leq 0$; Alors $ac - b^2 \geq 0$.

(b) Comme $F > 0$, la fonction $f = \ln(F)$ est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$f' = \frac{F'}{F}, \text{ et } f'' = \frac{F'' F - (F')^2}{F^2}$$

Avec $a = F''$, $c = F$ et $b = F'$ on reconnaît $ac - b^2$.

On considère donc

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 F''(x) + 2\lambda F'(x) + F(x) = \int_1^\infty \frac{(\lambda^2 t^2 + 2\lambda t + 1) e^{-xt}}{1+t^5} dt \\ &= \int_1^\infty \frac{(\lambda t + 1)^2 e^{-xt}}{1+t^5} dt \geq 0 \end{aligned}$$

car $\frac{(\lambda t + 1)^2 e^{-xt}}{1+t^5} \geq 0$ et que les bornes sont en ordre croissant.

Donc $F'' F - (F')^2 = ac - b^2 \geq 0$ et pour tout $x \geq 0$, $f'' \geq 0$. Donc $f = \ln(F)$ est convexe.

Exercice II.

I Simulation

On a besoin de N, pour le nombre total de tirage. De i comme compteur. De X et Y pour X_n et Y_n et en fin de T pour les Tirages au hasard d'un parmi 3 (random(3)).

Program tirages ;

Var X,Y,N,T,i :integer ;

Begin

randomize ;

X :=0; Y :=0; {position initiale }

writeln(' ? '); readln(N) ;

```

for i :=1 to N do
Begin
  T :=random(3) ;
  if T=0 then if X=0 then X :=1 esle X :=0 ;
  if T=1 then if Y=0 then Y :=1 esle Y :=0 ;
  writeln(X,Y) ;
end ;
end ;

```

II Simulation

- (a) Soit $A0_n$ l'événement "à l'issue de la $n^{ième}$ opération, le jeton A n'a jamais quitté C_0 " et pour tout n , a_n l'événement "obtenir la lettre a au $n^{ième}$ tirage".

Si A n'a jamais quitté C_0 , c'est que l'on a jamais obtenu la lettre a . Donc

$A0_n = \bigcap_{k=1}^n \overline{a_k}$ événements indépendants donc $p(A0_n) = \prod_{k=1}^n p(\overline{a_k}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ car les lettres sont équiprobables.

- (b) De même $A0_\infty = \bigcap_{k=1}^\infty \overline{a_k}$ et $p(A0_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{a_k}\right) = 0$ car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$.
- Si à l'issue de la $k^{ième}$ opération, le jeton A revient pour la première fois dans C_0 c'est qu'il en était parti plus tôt. Donc $D_k =$ (un seul a avant le $k - 1^{ième}$) et a_k . Or le nombre de a lors des $k - 1$ premiers tirages suit une loi binômiale de paramètre $k - 1$ et $\frac{1}{3}$ car les tirages de lettre sont indépendants. Donc

$$p(D_k) = C_{k-1}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \frac{1}{3} = (k-1) \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$$

- Soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Soit α un réel et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ une matrice colonne.

$$\begin{aligned}
 (E) \quad (M - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \alpha)x + y = 0 \\ x + (2 - \alpha)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(2 - \alpha)^2 y + y = 0 \\ x = -(2 - \alpha)y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (-\alpha^2 + 4\alpha - 3)y = 0 \\ x = -(2 - \alpha)y \end{cases}
 \end{aligned}$$

On détermine donc les racines de $-\alpha^2 + 4\alpha - 3 = 0$ (2° degré) à savoir $\alpha = 1$ ou 3 .

– Donc si $\alpha \neq 1$ et 3 , $(E) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$ et α n'est pas valeur propre.

– Si $\alpha = 1$, $(E) \Leftrightarrow x = -y$ et 1 est une valeur dont le sous espace propre associée est $Vect((1, -1))$.

– Si $\alpha = 3$, $(E) \Leftrightarrow x = y$ et 3 est une valeur dont le sous espace propre associée est $Vect((1, 1))$.

On a en dimension 2, deux sous espace propres de dimension 1 et 1. Donc $(1, -1)$ et $(1, 1)$ est une base de vecteurs propres.

- Donc, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ on a $M = P.D.P^{-1}$ et $M^n = P.D^n.P^{-1}$.

On calcule P^{-1} (P est inversible car c'est la matrice des coordonnées d'une base)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L2+L1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L1-L2/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{L1-L2/2}$$

$$\text{Donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3^n & 3^n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3^n & -1+3^n \\ -1+3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$$

- (a) $p(X_1 = 0) = p(A \text{ ne change pas de case}) = p(a_1) = \frac{1}{3}$ et $p(X_1 = 1) = 1 - p(X_1 = 0) = \frac{2}{3}$. (contraire)
- $(X_n = 0, X_n = 1)$ est un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 p(X_{n+1} = 0) &= p(X_{n+1} = 0/X_n = 0) \cdot p(X_n = 0) + p(X_{n+1} = 0/X_n = 1) \cdot p(X_n = 1) \\
 &= p(\text{ne change pas}) \cdot p(X_n = 0) + p(\text{change}) \cdot p(X_n = 1) \\
 &= \frac{1}{3} p(X_n = 0) + \frac{2}{3} p(X_n = 1)
 \end{aligned}$$

et de la même façon, $p(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}p(X_n = 0) + \frac{1}{3}p(X_n = 1)$ donc

$$\begin{pmatrix} p(X_{n+1} = 0) \\ p(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}p(X_n = 0) + \frac{2}{3}p(X_n = 1) \\ \frac{2}{3}p(X_n = 0) + \frac{1}{3}p(X_n = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p(X_n = 0) \\ p(X_n = 1) \end{pmatrix}$$

donc $Q = \frac{1}{3}M$ convient.

(c) On a donc $Q^n = (\frac{1}{3})^n M^n$ et comme $\begin{pmatrix} p(X_n = 0) \\ p(X_n = 1) \end{pmatrix}$ est une suite matricielle de raison Q ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p(X_n = 0) \\ p(X_n = 1) \end{pmatrix} &= Q^n \begin{pmatrix} p(X_0 = 0) \\ p(X_0 = 1) \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^n M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3^n & -1+3^n \\ -1+3^n & 1+3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 \\ -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, $p(X_n = 0) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 \right)$ et $p(X_n = 1) = \frac{1}{2} \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 \right)$

III Etude d'un mouvement du couple de jetons (A, B)

1. $p(W_1 = 0) = p(\text{rien ne bouge}) = p(c_1) = \frac{1}{3}$,
 $p(W_1 = 1) = p(B \text{ change de case}) = p(b_1) = \frac{1}{3}$,
 $p(W_1 = 2) = p(A \text{ change de case}) = p(a_1) = \frac{1}{3}$ et
 $p(W_1 = 3) = p(A \text{ et } B \text{ change de case}) = p(\text{impossible}) = 0$
2. $(W_n = 0, W_n = 1, W_n = 2, W_n = 3)$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} p(W_{n+1} = 0) &= p(W_{n+1} = 0/W_n = 0) \cdot p(W_n = 0) + p(W_{n+1} = 0/W_n = 1) \cdot p(W_n = 1) \\ &\quad + p(W_{n+1} = 0/W_n = 2) \cdot p(W_n = 2) + p(W_{n+1} = 0/W_n = 3) \cdot p(W_n = 3) \\ &= p(\text{rien ne change}) \cdot p(W_n = 0) + p(B \text{ change}) \cdot p(W_n = 1) \\ &\quad + p(A \text{ change}) \cdot p(W_n = 2) + p(\text{Les deux changent}) \cdot p(W_n = 3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 0) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 1) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 2) + 0 \cdot p(W_n = 3) \end{aligned}$$

et on trouve de la même façon,

$$\begin{aligned} p(W_{n+1} = 1) &= \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 0) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 1) + 0 \cdot p(W_n = 2) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 3) \\ p(W_{n+1} = 2) &= \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 0) + 0 \cdot p(W_n = 1) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 2) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 3) \\ p(W_{n+1} = 3) &= 0 \cdot p(W_n = 0) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 1) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 2) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 3) \end{aligned}$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p(W_{n+1} = 0) \\ p(W_{n+1} = 1) \\ p(W_{n+1} = 2) \\ p(W_{n+1} = 3) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 0) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 1) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 2) + 0 \cdot p(W_n = 3) \\ \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 0) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 1) + 0 \cdot p(W_n = 2) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 3) \\ \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 0) + 0 \cdot p(W_n = 1) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 2) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 3) \\ 0 \cdot p(W_n = 0) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 1) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 2) + \frac{1}{3} \cdot p(W_n = 3) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(W_n = 0) \\ p(W_n = 1) \\ p(W_n = 2) \\ p(W_n = 3) \end{pmatrix} \text{ donc } R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et $R = \frac{1}{3}(U - V)$ avec U et V les matrices ci-dessous.

3. (a) On trouve $U^2 = 4U$ d'où par récurrence, pour tout entier $n \geq 1$, $U^n = 4^{n-1}U$ et $U^0 = I$.
On trouve $V^2 = I$ d'où (sans récurrence), si n est pair, $V^n = (V^2)^{n/2} = I$ et si n est impair, $V^n = V$.
- (b) On a $V \cdot U = U = U \cdot V$, donc d'après la formule du binôme,

$$(U - V)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k U^{n-k} (-V)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k U^{n-k} V^k$$

(c) On pourrait (sans déduire) démontrer le résultat par récurrence.

$$\begin{aligned}
(U - V)^n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k U^{n-k} V^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k U^{n-k} V^k + (-1)^n C_n^n U^0 V^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k 4^{n-k-1} U \cdot V^k + (-1)^n V^n \text{ et comme } V^k = V \text{ ou } I \text{ et } U \cdot V = U \text{ et } U \cdot I = U \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k 4^{n-k-1} U + (-1)^n V^n = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k 4^{n-k} - (-1)^n C_n^n 4^0 \right) U + (-1)^n V^n \\
&= \frac{1}{4} ((-1 + 4)^n - (-1)^n) U + (-1)^n V^n
\end{aligned}$$

et on trouve bien $(U - V)^n = \frac{1}{4} [3^n - (-1)^n] U + (-1)^n V^n$ (qui est aussi valable pour $n = 0$)

4. On a donc pour n pair, $(U - V)^n = \frac{1}{4} (3^n - 1) U + I$ et pour n impair, $(U - V)^n = \frac{1}{4} [3^n + 1] U - V$.

Comme $R^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (U - V)^n$, on a pour n pair :

$$\begin{pmatrix} p(W_n = 0) \\ p(W_n = 1) \\ p(W_n = 2) \\ p(W_n = 3) \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{4} (3^n - 1) U + I\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 3^n + 3 \\ 3^n - 1 \\ 3^n - 1 \\ 3^n - 1 \end{pmatrix}$$

et si n est impair

$$\begin{pmatrix} p(W_n = 0) \\ p(W_n = 1) \\ p(W_n = 2) \\ p(W_n = 3) \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{4} (3^n + 1) U - V\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{pmatrix} 3^n + 1 \\ 3^n + 1 \\ 3^n + 1 \\ 3^n - 3 \end{pmatrix}$$

5. On a $Cov(X_n, Y_n) = E(X_n Y_n) - E(X_n) E(Y_n)$

On connaît la loi de X_n . Celle de Y_n est la même. Et celle du couple est déduite de ci dessus.

$$E(X_n) = 0 \cdot p(X_n = 0) + 1 \cdot p(X_n = 1) = \frac{1}{2} \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1\right) = E(Y_n)$$

$$p(X_n Y_n = 1) = p(X_n = 1 \cap Y_n = 1) = p(W_n = 3) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n (3^n - 3) = \frac{1}{4} (1 - 1/3^{n-1})$$

$$E(X_n Y_n) = 0 + 1 \cdot p(X_n Y_n = 1) = \frac{1}{4} (1 - 1/3^{n-1}).$$

$$\text{Donc } Cov(X_n, Y_n) = \frac{1}{4} (1 - 1/3^{n-1}) - \frac{1}{4} \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1\right)^2 = : -\frac{1}{4} 3^{-n} - \frac{1}{4} 3^{-2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

VI Etude d'un long séjour.

1. $T_n = \sum_{k=1}^n X_k$ car chaque fois que $X_k = 1$, A passe une minute dans C_1

2. Donc

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{k=1}^n E(X_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(-\left(\frac{1}{3}\right)^k + 1\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n -\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{n}{2} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{2} + \frac{n}{2} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} + \frac{1}{2} + \frac{n}{2} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{1}{4} + \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

3. $\frac{1}{n} E(T_n) = \frac{3}{4n} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ donc le temps moyen passé dans C_1 tend vers $\frac{1}{2}$. Cela est compréhensible, le jeton à long terme a autant de chances d'être dans C_0 que dans C_1 .