

ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mercredi 7 mai 2003, de 8h à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE

1. Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carrée d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
- Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.
 - Calculer la matrice $A^2 - 2aA$. En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1} .
 - Montrer que les valeurs propres de A sont $a + b$ et $a - b$.
 - On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q , carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.
 - Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n .
2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1 - p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p .

Pour tout ω de Ω , on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 suivante : $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par : $\mathbf{P}([X = Y]) = \frac{p}{2 - p}$ et en déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega ; M(\omega) \text{ est inversible}\}$.
- Calculer la covariance des variables aléatoires S et D .

- c) Calculer les probabilités $\mathbf{P}([S = 2] \cap [D = 0])$, $\mathbf{P}([S = 2])$ et $\mathbf{P}([D = 0])$.
 Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes?
- d) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\mathbf{P}([S = n]) = (n - 1)p^2q^{n-2}$.
- e) En déduire, lorsque p est égal à $\frac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

PROBLÈME

Partie A : Étude d'une fonction

1. a) On suppose, dans cette question, qu'il existe une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur les intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$, vérifiant pour tout réel x appartenant à $] - \infty, 0[\cup]0, 1[$, l'égalité :

$$x(1 - x)f'(x) + (1 - x)f(x) = 1$$

Soit h la fonction définie sur $] - \infty, 0[\cup]0, 1[$, par : $h(x) = xf(x)$.

Montrer que h est de classe \mathcal{C}^1 sur les intervalles $] - \infty, 0[$, $]0, 1[$ et calculer sa dérivée.

En déduire qu'il existe deux constantes réelles c_1 et c_2 vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in] - \infty, 0[, & h(x) = -\ln(1 - x) + c_1 \\ \forall x \in]0, 1[, & h(x) = -\ln(1 - x) + c_2 \end{cases}$$

- b) On définit une fonction f sur les intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in] - \infty, 0[, & f(x) = \frac{-\ln(1 - x) + c_1}{x} \\ \forall x \in]0, 1[, & f(x) = \frac{-\ln(1 - x) + c_2}{x} \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles.

Déterminer les constantes c_1 et c_2 pour que la fonction f soit prolongeable par continuité en 0.

2. Dans toute la suite de cette partie, f désigne la fonction définie sur $] - \infty, 1[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{\ln(1 - x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$ puis le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction f .
- b) En déduire que la fonction f est continue en 0, dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
- c) Montrer que, pour tout x de $] - \infty, 0[\cup]0, 1[$, on a :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1 - x} - f(x) \right) \frac{1}{x}$$

En utilisant le développement limité de la question précédente, montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - \infty, 1[$.

3. a) Étudier le signe de la fonction φ définie sur $] - \infty, 1[$ par : $\varphi(x) = \frac{x}{1 - x} + \ln(1 - x)$.

En déduire les variations de la fonction f

- b) Donner le tableau de variation de la fonction f et l'allure de la représentation graphique de f en précisant les asymptotes, la tangente à l'origine et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de l'origine.

4. Soit x un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

a) Soit h la fonction définie sur $] - \infty, 1[$ par : $h(t) = -\ln(1-t)$.

Calculer, pour tout réel t de $] - \infty, 1[$, $h'(t)$, $h''(t)$, puis pour tout entier naturel n non nul, $h^{(n)}(t)$.

b) Justifier, pour tout entier naturel n , l'égalité :

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} dt$$

c) Établir, pour tout réel t de l'intervalle $[0, x]$, la double inégalité : $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$.

En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la double inégalité :

$$0 \leq f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k+1} \leq x^{n+1} f(x)$$

d) Justifier l'égalité : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.

Partie B : Étude d'une variable aléatoire à densité

1. Dans cette question f est la fonction définie à la question 2. de la partie A.

a) Soit f_1 la fonction définie sur $]0, 1]$ par :
$$\begin{cases} f_1(t) = \frac{\ln t}{t-1} & \text{si } t \neq 1 \\ f_1(1) = 1 \end{cases}$$

Justifier la continuité de f_1 sur $]0, 1]$ et établir, pour tout réel x de $]0, 1[$, l'égalité :

$$\int_0^x f(t) dt = \int_{1-x}^1 f_1(t) dt$$

b) Soit a un réel de l'intervalle $]0, 1[$. Établir pour tout entier naturel n , l'égalité :

$$\int_a^1 t^n \ln t dt = -\frac{a^{n+1} \ln a}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} (1 - a^{n+1})$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^1 t^n \ln t dt$ et l'égalité : $\int_0^1 t^n \ln t dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$.

c) Soit a un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et n un entier naturel, démontrer pour tout t de $[a, 1]$, l'égalité

$$\int_a^1 f_1(t) dt + \sum_{k=0}^n \int_a^1 t^k \ln t dt = \int_a^1 t^{n+1} f_1(t) dt$$

d) Montrer que la fonction $t \mapsto t f_1(t)$ est prolongeable en une fonction h_1 continue sur $[0, 1]$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f_1(t) dt$ converge et qu'elle vérifie :

$$\int_0^1 f_1(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 t^n h_1(t) dt$$

e) On désigne alors par M le maximum sur $[0, 1]$ de la fonction h_1 .

Établir, pour tout entier naturel n , l'inégalité :

$$0 \leq \int_0^1 f_1(t) dt - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{M}{n+1}$$

f) Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, puis l'égalité : $\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. On donne : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on désigne par g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} g(t) = \frac{6}{\pi^2} f(t) & \text{si } t \in [0, 1[\\ g(t) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Vérifier que g est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire ayant pour densité g .

Vérifier, pour tout réel x de $]0, 1[$, l'égalité $\int_0^x \ln(1-t) dt = \int_{1-x}^1 \ln t dt$.

Utiliser alors le résultat de la question 1.b pour prouver que X possède une espérance et la calculer.

c) Par une méthode analogue, montrer que l'intégrale $\int_0^1 (t-1) \ln(1-t) dt$ est égale à $\frac{1}{4}$.

En déduire que la variable aléatoire X^2 admet une espérance, préciser sa valeur et calculer la variance de la variable aléatoire X .

Partie C : Encadrement d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on désigne par V l'ensemble ouvert défini par :

$$V = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} \right\}$$

1. Soit u la fonction de V dans \mathbb{R} : $(x, y) \mapsto u(x, y) = xy^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{4}$.

a) Montrer que la fonction u admet un minimum sur V dont on précisera la valeur, mais n'admet pas de maximum.

b) Montrer que la fonction u est majorée par $\frac{7}{8}$ sur l'ouvert V .

2. Soit F la fonction : $(x, y) \mapsto F(x, y) = \frac{\ln\left(\frac{3}{4} - xy^2 - x^2 - y^2\right)}{\frac{1}{4} + xy^2 + x^2 + y^2}$.

a) À l'aide des résultats de la partie A, montrer que F est définie sur l'ouvert V et qu'elle y admet un maximum. Préciser la valeur de ce maximum.

b) Donner un encadrement de $F(x, y)$ pour tout (x, y) de V .