



N5-00277
332878
Maths S

Code épreuve : 299

Nombre de pages : 32

Session : 2019

Épreuve de : Mathématique S Emlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie A

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi_a(P) = 2P + (X-a)P'$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_a(P)(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a) P(t) dt & \text{si } x \neq a \\ \frac{P(a)}{2} & \text{si } x = a \end{cases}$$

1 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $R \in \mathbb{R}_n[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi_a((P+R)(x)) = 2(P+R)(x) + (X-a)((P+R)'(x))$$

$$= 2\lambda P(x) + 2R(x) + \lambda(X-a)P'(x) + (X-a)R'(x)$$

$$= \lambda(2P(x) + (X-a)P'(x)) + 2R(x) + (X-a)R'(x) \text{ donc}$$

$$\boxed{\varphi_a(P+R) = \lambda \varphi_a(P) + \varphi_a(R)} \quad \underline{\varphi_a \text{ est linéaire}}$$

De plus Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $2P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $(X-a)P' \in \mathbb{R}_n[X]$

$\mathbb{R}_n[X]$ étant stable par combinaison linéaire on déduit $\varphi_a(P) \in \mathbb{R}_n[X]$

Finalement :

φ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

$$\underline{2} \quad \varphi_a(1) = 2$$

$$\begin{aligned} \varphi_a(X) &= 2X + X - a \\ &= 3X - a \end{aligned}$$

Pour $i \in \mathbb{I}2; m\mathbb{I}$

$$\begin{aligned} \varphi_a(X^i) &= 2X^i + (X-a)(X^{i-1}) \\ &= X^i(2+i) - aX^{i-1} \end{aligned}$$

Donc, (en appelant A cette matrice)

$$M = \text{Mat}(\varphi_a, \underline{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -a & & \\ & 3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (0) \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & (0) \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -a & \\ & & & & & & & & (2+m) \end{pmatrix}$$

3a La matrice représentative de φ_a dans la base B et l'endomorphisme φ_a possède les mêmes valeurs propres.

On observe que A est une matrice triangulaire supérieure, par conséquent ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Ainsi $\text{sp}(A) = \{2, 3, \dots, 2+m\}$

Par conséquent A possède $m+1$ valeurs propres distinctes. Donc, φ_a possède $m+1$ valeurs propres distinctes et étant un endomorphisme de $R_n[X]$, de dimension $m+1$.

$$\boxed{\varphi_a \text{ est diagonalisable et } \text{sp}(\varphi_a) = \{2+i\}_{i \in \mathbb{I}0; m\mathbb{I}}}$$

3b D'après 3a, on observe que 0 n'est pas valeur propre de φ_a , par conséquent $\boxed{\text{Ker}(\varphi_a) = \{0\}}$, donc φ_a est un endomorphisme de $R_n[X]$ et φ_a est injective: on peut conclure que $\boxed{\varphi_a \text{ est un automorphisme de } R_n[X]}$

$$\exists c \quad \forall h \in \mathbb{I}0; n\mathbb{I}$$

$$\psi_a(Q_2) = \psi_a((X-a)^2)$$

$$= \lambda (X-a)^2 + h(X-a)(X-a)^{2-1}$$

$$\psi_a(Q_2) = (2+h)(X-a)^2$$

$$\text{Donc: } \forall h \in \mathbb{I}0; n\mathbb{I} \quad \psi_a(Q_2) = (2+h) Q_2$$

3d

De plus, on voit que ψ_a possède $n+1$ valeurs propres distinctes; par conséquent on peut affirmer que ses sous-espaces propres sont des droites (on est dans un espace de dimension $n+1$), ainsi comme

$$\forall h \in \mathbb{I}0; n\mathbb{I} \quad \psi_a(Q_2) = (2+h) Q_2$$

On peut affirmer $Q_2 \in \mathcal{E}_{2+h}(\psi_a)$ où $\mathcal{E}_\lambda(\psi_a)$ est le sous-espace propre de ψ_a associé à la valeur propre λ .

$$\text{Ainsi on a } Q_2 \in \mathcal{E}_{2+h}(\psi_a) \text{ et } \dim(\mathcal{E}_{2+h}(\psi_a)) = 1 \quad \forall h \in \mathbb{I}0; n\mathbb{I}$$

On déduit alors qu'une base de chacun des sous-espaces propres de ψ_a est $(X-a)^2$ (pour $h \in \mathbb{I}0; n\mathbb{I}$)

$$\text{On d'autre part: } \mathcal{E}_2(\psi_a) = \text{Vect}(Q_0) \dots \mathcal{E}_{2+n} = \text{Vect}(Q_n)$$

$$\psi_a \quad \forall P \in R_n[X] : ((X-a)^2 P(X))' = 2(X-a)P(X) + (X-a)^2 P'(X)$$

$$= (X-a)(2P(X) + (X-a)P'(X))$$

Donc:

$$\forall P \in R_n[X]; \quad [(X-a)^2 P(X)]' = (X-a) \psi_a(P)$$

$$4b \quad \forall P \in R_n[X]$$

$$\text{Pour } x \neq a \quad \psi_a(\psi_a(P))_{x^2} = \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a) \psi_a(P)(t) dt$$

$$= \frac{1}{(x-a)^2} [(t-a)^2 P(t)]_a^x \text{ d'où } \psi_a$$

$$\phi_a(\psi_a(P))(x) = \frac{1}{(x-a)^2} (x-a)^2 P(x) = 0$$

$$\phi_a(\psi_a(P))(x) = P(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ $\phi_a(\psi_a(P))(x) = P(x)$

Pour $x=a$ $\phi_a(\psi_a(P))(a) = \frac{\psi_a(P)(a)}{2} = \frac{2P(a) + 0}{2} = P(a)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \phi_a(\psi_a(P))(x) = P(x)$

On peut conclure $\phi_a(\psi_a(P)) = P$ $\forall P \in R_n[X]$

de $R_n[X]$

4c Montrons ϕ_a un endomorphisme. Soit $P \in R_n[X]$, $R \in R_n[X]$, $1 \in R$
 Par linéarité de l'intégrale : $\phi_a(P+R)(x) = \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)(P+R)(t) dt \quad (x \neq a)$

$$= \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)P(t) dt + \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)R(t) dt = \phi_a(P) + \phi_a(R)$$

ϕ_a linéaire (même pour $x=a$)

De plus $(t-a)P(t) \in R_{n+1}[X]$, donc $\frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)P(t) dt \in R_n[X]$

On déduit : $\forall P \in R_n[X]$, $\phi_a(P) \in R_n[X]$ (on confond ici polynôme et fonction polynomiale). Donc ϕ_a un endomorphisme de $R_n[X]$

Il existe alors un automorphisme (3b) ψ_a de $R_n[X]$ tel que $\phi_a \circ \psi_a(P) = P \quad \forall P \in R_n[X]$

Donc $\phi_a \circ \psi_a = \text{id}$, on peut donc conclure que ϕ_a est un automorphisme de $R_n[X]$ (car ψ_a en est un) et que $\phi_a^{-1} = \psi_a$

4d Montrons ϕ_a diagonalisable

$$\forall h \in \mathbb{I}0; m\mathbb{I} \quad \phi_a(\psi_a(Q_h)) = Q_h$$

$$\Leftrightarrow \phi_a((2+h)Q_h) = Q_h$$

$$\Leftrightarrow (2+h) \phi_a(Q_h) = Q_h$$

et ϕ_a un endomorphisme d'après 4c

Donc finalement.

$$\forall h \in \mathbb{I}0; m\mathbb{I} \quad \phi_a(Q_h) = \frac{1}{2+h} Q_h$$

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2019

Épreuve de : Mathématique S Emlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

ϕ_a possède donc $n+1$ valeurs propres distinctes et c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ par conséquent, ($\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$)

ϕ_a est diagonalisable

Or a alors

$$\text{Sp}(\phi_a) = \left\{ \frac{1}{2+k} \mid k \in \{0, \dots, n\} \right\}$$

Partie B

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \phi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

5a f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, par conséquent.

$g: t \mapsto t f(t)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$

En posant G la primitive de la fonction g , qui est donc dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$, on a alors

$$h(x) = G(x) - G(0)$$

Donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$h'(x) = G'(x) = g(x)$$

Ainsi h' est continue sur $\mathbb{R}$, donc

h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

Et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \boxed{h'(x) = x f(x)}$

5b Soit $x \in \mathbb{R}^+$

f est continue sur le segment $[0; x]$, par conséquent f admet un minimum sur le segment $[0; x]$, qu'elle atteint en deux points de $[0; x]$.

On nomme a_x et b_x les points en lesquels f atteint respectivement son minimum et son maximum.

Donc :

$$\forall t \in [0; x] \quad f(a_x) \leq f(t) \leq f(b_x)$$

or $t \geq 0$ donc

$$t f(a_x) \leq t f(t) \leq t f(b_x)$$

Par croissance de l'intégrale on obtient finalement : (les bornes sont dans l'ordre croissant)

$$\boxed{f(a_x) \int_0^x t \, dt \leq \int_0^x t f(t) \, dt \leq f(b_x) \int_0^x t \, dt}$$

$$(a_x, b_x) \in [0; x]^2$$

5c On sait $\int_0^x t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2}$

On a donc :

$$f(a_x) \frac{x^2}{2} \leq h(x) \leq \frac{f(b_x) x^2}{2}$$

Donc $\frac{f(a_x)}{2} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{f(b_x)}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

Or on a $a_x \in [0; x]$, par conséquent, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, on peut affirmer que le réel a_x tend vers 0 lui aussi (il dépend de x au sens où il appartient à un intervalle borné par x .) De même $b_x \in [0; x]$

Donc $B_n \xrightarrow[n > 0]{x \rightarrow 0} 0$ et $A_n \xrightarrow[n > 0]{x \rightarrow 0} 0$

Par continuité de la fonction f $f(a_n) \xrightarrow[n > 0]{x \rightarrow 0} f(0)$ et $f(b_n) \xrightarrow[n > 0]{x \rightarrow 0} f(0)$

Ainsi, par encadrement (d'après le théorème d'encadrement pour la question 5b, les termes de droite et de gauche tendent tous les deux vers $\frac{f(0)}{2}$ lorsque x tend vers 0)

On a alors

$$\boxed{\frac{h(a_n)}{x^2} \xrightarrow[n > 0]{x \rightarrow 0} \frac{f(0)}{2}}$$

5d Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on considère l'intervalle $[x; 0]$

Pour les mêmes raisons que précédemment, il existe des réels c_x et d_x tels que

$$f(c_x) \leq f(t) \leq f(d_x) \quad \forall t \in [0, x]$$

ou $t \leq 0$ donc

$t f(c_x) \geq t f(t) \geq t f(d_x)$ donc $-t f(c_x) \leq -t f(t) \leq -t f(d_x)$
puis par encadrement de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant)

$$-\int_x^0 t f(c_x) dt \leq -\int_x^0 t f(t) dt \leq -f(d_x) \int_x^0 f(t) dt$$

$$\text{Donc} \quad \int_0^x t f(c_x) dt \leq \int_0^x t f(t) dt \leq f(d_x) \int_0^x f(t) dt$$

Comme précédemment $f(x) \xrightarrow[x < 0]{x \rightarrow 0} f(0)$ (f étant continue sur $\mathbb{R}$)

$$\text{Le même} \quad f(d_x) \xrightarrow[x < 0]{x \rightarrow 0} f(0)$$

Enfin, d'après le théorème d'encadrement on déduit :

$$\boxed{\frac{h(a_n)}{x^2} \xrightarrow[n < 0]{x \rightarrow 0} \frac{f(0)}{2}}$$

6 D'après 5c et 5d, on peut affirmer $\frac{\int_0^x t f(t) dt}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{f(0)}{2}$
 (En effet c'est une p.p.v. par valeurs supérieures et par valeurs inférieures)

De fait, on a alors $\phi(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \phi(f)(0)$

Donc $\phi(f)$ est continue en 0

- De plus, $x \mapsto \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt = \frac{h(x)}{x^2}$ est une fonction continue
sur $\mathbb{R}^*$ (on l'a justifiée pour h et ici c'est un quotient de fonctions continues qui ne s'annulent pas)

Donc:

$\phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$

- De plus, $h(x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ donc on

déduit:

$\phi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} (\phi(f))'(x) &= \frac{1}{x^2} \times x f(x) - \frac{2}{x^3} \int_0^x t f(t) dt \\ &= \frac{1}{x} \left[f(x) - \frac{2}{x^2} \int_0^x t f(t) dt \right] \end{aligned}$$

Donc: $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$(\phi(f))'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - 2\phi(f)(x))$$

7a Soit f une fonction paire

$$\begin{aligned} \phi(f)(-x) &= \frac{1}{(-x)^2} \int_0^{-x} t f(t) dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^{-x} t f(t) dt \end{aligned}$$

On pose le changement de variable affine $t \mapsto u = -t$ (c'est strictement monotone)

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2019

Épreuve de : Mathématique S Em Lyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\begin{aligned}\phi(f)(x) &= \frac{1}{x^2} \int_0^x (-u) f(-u) du \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u) du\end{aligned}$$

Si f paire donc :

$$\phi(f)(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x u f(u) du$$

$$\boxed{\phi(f)(-x) = \phi(f)(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Donc si f paire alors $\phi(f)$ est encore une fonction paire

A l'aide du même raisonnement on obtient (on posait là aussi le même type de changement de variable)

Si f impaire alors $\phi(f)$ est encore une fonction impaire

7b Soit f une fonction positive, - pour $x > 0$

Alors : $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad f(t) \geq 0$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad t f(t) \geq 0$

et par croissance de l'intégrale : $\int_0^x t f(t) dt \geq 0$

et finalement

$$\boxed{\phi(f)(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+}$$

- Pour $x < 0$: $t f(t) < 0 \quad \forall t \in [x; 0]$

Donc $\int_x^0 t f(t) dt < 0$ et donc $\int_0^x t f(t) dt > 0$

On conclut: f est une fonction positive $\Rightarrow \phi(f)$ est encore une fonction positive

So Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\phi(f)) = 0$

Soit $l \in \mathbb{R}$ On pose $g(x) = f(x) - l$
On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ si $f(x) \rightarrow l$

On:

$$\begin{aligned}\phi(g)(x) &= \frac{1}{x^2} \int_0^x t g(t) dt + (f(x) - l) \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt - \frac{l}{x^2} \int_0^x t dt\end{aligned}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}\phi(f)(x) &= \phi(g+l)(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t g(t) dt + \frac{1}{x^2} \int_0^x t l dt \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x t g(t) dt + \frac{1}{x^2} \times \frac{lx^2}{2} \\ &= \frac{1}{x^2} \int_0^x t g(t) dt + \frac{l}{2}\end{aligned}$$

Ainsi:

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = 0$ donc d'après le résultat admis:

$$\boxed{\frac{1}{x^2} \int_0^x t g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$$

Donc si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\phi(f)) = \frac{l}{2}$ par somme de limites

8b Soit $l \in \mathbb{R}$, On suppose $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$
On pose $h(x) = f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Or, d'après 8a, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = l$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(f) = \frac{l}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$$

Or si $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ alors d'après 8a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(h) = \frac{l}{2}$

$$\text{Donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(f) = \frac{l}{2}}$$

On peut donc conclure

$$\boxed{\text{Si } \lim_{x \rightarrow -\infty} f = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(f) = \frac{l}{2}}$$

Partie C

F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} \int_0^x t F(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

9 $\forall x \in \mathbb{R}^+$, on veut que la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité est croissante

Donc $F(t) \leq F(x) \quad \forall t \in [0; x]$

Donc

$$t F(t) \leq t F(x) \quad \forall t \in [0; x]$$

Par croissance de l'intégrale on a alors ($x \in \mathbb{R}^+$) (les bornes sont dans l'ordre croissant)

$$\int_0^x t F(t) dt \leq F(x) \int_0^x t dt$$

puis pour $x \neq 0$ on a :

$$\frac{2}{x^2} \int_0^x t F(t) dt \leq \frac{2F(x)}{x^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x$$

Donc finalement :

$$G(x) \leq F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Le plus : F une fonction de répartition donc $F \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$ ainsi $F(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0; x]$
donc

$t F(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0; x]$ et donc par croissance et positivité
de l'intégrale, puis en multipliant par un terme positif on obtient

$$0 \leq G(x)$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq G(x) \leq F(x)}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^-$ sur $[x; 0]$: $\forall t \in [x; 0] \quad 0 \leq F(x) \leq F(t)$

donc

$$t F(x) \geq t F(t) \geq 0$$

ainsi

$$\int_x^0 t F(x) dt \geq \int_x^0 t F(t) dt \geq 0$$

par conséquent

$$0 \leq \int_x^0 t F(x) dt \leq \int_x^0 t F(t) dt$$

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2019

Épreuve de : Mathématique 5 Emlyon

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

et comme $\frac{2}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq F(x) \leq G(x)$$

10 Justifions que $\phi(F)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$

F est une fonction de répartition, d'une variable aléatoire à densité, par conséquent elle est continue sur $\mathbb{R}$.

D'après la partie B 6, si F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, alors $\phi(F)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$.

Ainsi comme $G = 2\phi(F)$ on peut conclure :

$$G \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } \mathbb{R}^-$$

De plus, d'après B6

$$(\phi(F))'(x) = \frac{1}{x} (F(x) - 2\phi(F)(x))$$

Donc

$$G'(x) = 2(\phi(F))'(x) = \frac{2}{x} (F(x) - 2\phi(F)(x))$$

$$G'(x) = \frac{2}{x} (F(x) - G(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

11 g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} G'(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrons que g est une densité de probabilité

- D'après 10

$$G'(x) = \frac{2}{x} (F(x) - G(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Où, si $x \in \mathbb{R}^+$ $G(x) \leq F(x)$ donc $F(x) - G(x) \geq 0$
Ainsi

$$G'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

De plus, si $x \in \mathbb{R}^+$ $F(x) - G(x) \leq 0$ donc

$$\frac{F(x) - G(x)}{x} \geq 0$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad G'(x) \geq 0$ et on a $g(0) = 0 \geq 0$

Donc g est positive sur $\mathbb{R}$

- le plus, G est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$ donc g est continue sur $\mathbb{R}$

- enfin, montrons $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$
On travaille sur le segment $[a, b]$

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &= \int_a^b G'(x) dx = \int_a^b \frac{2}{x} (F(x) - G(x)) dx \\ &= \int_a^b G'(x) dx = [G(F)]_a^b \\ &= G(b) - G(a) \\ &= 2 [\Phi(F(b)) - \Phi(F(a))] \end{aligned}$$

Où F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité donc
 $F(b) \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 1$ et $F(a) \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} 0$

D'après 8a si $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1$ alors $\phi(f)(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$

D'après 8b si $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$ alors $\phi(f)(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$

Ainsi, on peut déduire que l'intégrale $\int_A^B g(t) dt$ converge

et de plus $\int_A^B g(t) dt \xrightarrow[A \rightarrow -\infty]{B \rightarrow +\infty} (2(\frac{1}{2} - 0))$

Donc

$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 1}$ et g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et positive sur $\mathbb{R}$

Donc g est une densité d'une variable aléatoire V .

Enfin on peut prendre G comme fonction de répartition car
 $G(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$, G étant C sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$ et
 G étant croissante sur $\mathbb{R}$

Enfin grâce à 8a et 8b on voit $G(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 1$ et $G(x) \xrightarrow[x \rightarrow -\infty]{} 0$

Donc $\boxed{G}$ est la fonction de répartition de V

12a $\forall x \in \mathbb{R} \quad h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2xe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- h_1 est continue sur $\mathbb{R}$ ($2xe^{-x^2} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 2x \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0 = h_1(0)$)

- h_1 est positive sur $\mathbb{R}$ ($xe^{-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$)

le plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx = [-e^{-x^2}]_0^{+\infty}$$

$$\text{Or } e^{-x^2} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx = 1$ (l'intégrale est donc bien convergente) et on a :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x) dx = 1}$$

Donc h_1 est une densité de probabilité

12b Montrons que X_1 admet une espérance

Sous réserve de convergence:

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x h_1(x) dx = \int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x \times 2x e^{-x^2} dx$$

On travaille sur le segment $[0; B]$

$$u(t) = 2t e^{-t^2}$$

$$v(t) = t$$

$$u'(t) = -e^{-t^2}$$

$$v'(t) = 1$$

u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$

$$\int_0^B x 2x e^{-x^2} dx = [e^{-t^2} t]_0^B + \int_0^B e^{-t^2} dt \quad (1)$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2\pi}} dt = 1$ car c'est une densité d'une loi normale centrée réduite

Or la fonction est paire ainsi:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

On pose $t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{2}} = u$ (un changement de variable affine (donc conserve la nature de l'intégrale))

ainsi

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Donc en faisant tendre B vers $+\infty$ dans l'expression (1), sachant que par comparaison, $e^{-t^2} t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ on a alors:

$$\int_0^{+\infty} x h_1(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc X_1 admet une espérance et

$$\boxed{E(X_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2019

Épreuve de : Mathématique S Orléans

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

12c H_1 la fonction de répartition de X_1 et $H_2 = 2 \phi(H_1)$

$$\text{On a } H_2'(x) = 2 \phi'(H_1(x)) \\ = \frac{2}{\pi} [H_1(x) - H_2(x)] \quad \text{d'après 11}$$

De plus, comme $H_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On peut déduire $H_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On remarque bien que H_1 possède toutes les caractéristiques d'une fonction de répartition

Déterminons une densité de H_2

$$f_{H_2}(x) = \begin{cases} \frac{2x e^{-x^2} x^2 - 2x(1 - e^{-x^2})}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Partie D

$$E_2: \{ f \in \mathcal{O} \setminus S_0^{+\infty} \mid (f(x))^2 \text{ dx converge.} \}$$

$$\begin{aligned} \underline{13a} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (|x| - |y|)^2 &\geq 0 \\ \text{donc} \quad x^2 + y^2 - 2|x||y| &\geq 0 \\ \text{Ainsi} \quad x^2 + y^2 &\geq 2|xy| \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

$$\underline{13b} \quad \forall x \in]0, +\infty[\text{ on a d'après } \underline{13a}$$

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2} (f(x)^2 + g(x)^2)$$

f et g appartiennent à $\mathcal{O}_2$ donc elles sont continues et on a alors $x \mapsto f(x)g(x)$ continue sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, $f \in \mathcal{O}_2$ donc $\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx$ converge et de même pour $g \in \mathcal{O}_2$.

Donc $\int_0^{+\infty} f(x)^2 dx$ et $\int_0^{+\infty} g(x)^2 dx$ convergent, par conséquent on peut affirmer :

$$\int_0^{+\infty} (g(x)^2 + f(x)^2) dx \text{ converge} \quad \left(\begin{array}{l} \text{somme d'intégrales} \\ \text{convergentes} \end{array} \right)$$

Donc d'après le théorème de comparaison pour des ^{intégrales} de fonctions continues et positives, on peut affirmer que

$$\int_0^{+\infty} |f(x)g(x)| dx \text{ converge et donc que } \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$$

est absolument convergente donc convergente

14 Montrons que E_2 est un sous espace vectoriel

Soit g la fonction nulle

Or a

$$g^2(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} (g(x))^2 dx = 0 \text{ et donc l'intégrale converge}$$

Par conséquent la fonction nulle appartient à E_2

E_2 non vide

Soit $f \in E_2$, $g \in E_2$, $d \in \mathbb{R}$, on a $t \mapsto df(t) + g(t)$ continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que
somme de fonctions continues

$$\int_0^{+\infty} (df(x) + g(x))^2 dx = d^2 \int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx + 2d \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$$

$$+ \int_0^{+\infty} (g(x))^2 dx$$

d'après 13b $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ converge, et on voit $f \in E_2$, $g \in E_2$

Donc $\int_0^{+\infty} (df(x) + g(x))^2 dx$ est une somme d'intégrales convergentes donc converge

Ainsi E_2 est stable par combinaison linéaire

Donc E_2 un sous espace vectoriel de $\mathcal{S}$

15 Pour $(f_1, f_2, g) \in E_2$ et $d \in \mathbb{R}$

L'intégrale étant bien convergente d'après 13b, linéarité de l'intégrale:

$$\begin{aligned} \langle df_1 + f_2, g \rangle &= \int_0^{+\infty} (df_1 + f_2)(x)g(x) dx = d \int_0^{+\infty} f_1(x)g(x) dx \\ &\quad + \int_0^{+\infty} g(x)f_2(x) dx \\ &= d \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle \end{aligned}$$

- Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

$$\text{De plus } \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx = \int_0^{+\infty} g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle$$

- Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique et donc linéaire à droite et bilinéaire

$$\begin{aligned} - \langle f, f \rangle &= \int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx \geq 0 \text{ cette intégrale converge car } f \in \mathcal{B}_2 \\ &\text{et } (f(x))^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

f^2 est continue et positive sur $[0; +\infty[$ par conséquent par stabilité positivité de l'intégrale on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f^2(x) dx = 0 &\Leftrightarrow f^2(x) = 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[\\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[\end{aligned}$$

Or f est définie sur $\mathbb{R}^+$.

On déduit que

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f^2(x) dx = 0 \Leftrightarrow f \text{ est la fonction nulle}$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique, positif et défini positif, on peut donc conclure :

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{B}_2$

16 Soit $f \in \mathcal{B}_2$

16a On pose $h(x) = \int_0^x f(t) dt$

On voit d'après la Rule de l'Hôpital $\frac{h(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{f(0)}{2}$

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2019

Épreuve de :

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $\frac{h(x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{f(0)}{2}$

pu conséquent

$$\left(\frac{h(x)}{x^2}\right)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{f(0)}{2}\right)^2$$

Donc $\boxed{\frac{(h(x))^2}{x^4} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{(f(0))^2}{4}}$

le plus, déterminons la limite de $x \rightarrow \frac{(h(x))^2}{x^4}$ en 0

On sait $\frac{h(x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{f(0)}{2}$

Or a $\frac{(h(x))^2}{x^4} = x \times \frac{(h(x))^2}{x^5}$

Or le terme de droite tend vers un terme constant et $x \rightarrow 0$

Par multiplication de limite on a alors

$$\boxed{\frac{(h(x))^2}{x^4} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0}$$

166 On procède par intégration par parties

On voit $\phi(f)(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ si $x > 0$

le plus on voit $\phi(f)'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - 2\phi(f)(x))$

et $h'(x) = x f(x)$

On pose $u(t) = (h(t))^2$ $u'(t) = 2 h'(t) h(t)$ $u(t) = \frac{1}{t^3}$ $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$

u et u' de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$

On procède par intégrations par parties : ($\forall x > 0$) sur le segment $[a, x]$

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(h(x))^2}{x^4} dx &= \left[-\frac{(h(t))^2}{t^3} \right]_a^x + \frac{2}{3} \int_a^x \frac{h'(t) h(t)}{t^3} dt \\ &= -\frac{(h(x))^2}{3x^3} + \frac{(h(a))^2}{a^3} + \frac{2}{3} \int_a^x \frac{u f(u)}{u^3} \left(\int_0^u x f(x) dx \right) du \\ &= -\frac{(h(x))^2}{3x^3} + \frac{(h(a))^2}{a^3} + \frac{2}{3} \int_a^x f(u) \left(\frac{\int_0^u x f(x) dx}{u^2} \right) du \\ &= -\frac{(h(x))^2}{3x^3} + \frac{(h(a))^2}{a^3} + \frac{2}{3} \int_a^x f(x) \phi(f)(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{(h(a))^2}{a^3} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0 \quad (16a)$$

le plus $x \rightarrow f(x) \phi(f)(x) dx$ est continue en 0 donc l'intégrale

$\int_0^x f(x) \phi(f)(x) dx$ converge

Ainsi, en faisant tendre a vers 0 dans l'expression précédente on obtient finalement,

$\forall x > 0$

$$\boxed{\int_0^x \frac{(h(x))^2}{x^4} dx = -\frac{1}{3} \frac{(h(x))^2}{x^3} + \frac{2}{3} \int_0^x f(x) \phi(f)(x) dx}$$

16c Soit $x > 0$ $x \rightarrow (1f(x) + \phi(f(x))^2)$ est continue sur $[0, x]$
 $\forall d \in \mathbb{R}$, on a $(1f(x) + \phi(f(x))^2) \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale, la fonction n'étant pas identiquement nulle on a $\int_0^x (1f(x) + \phi(f(x))^2) dx > 0$

Ainsi la fonction $g: 1 \rightarrow \int_0^x (1f(x) + \phi(f(x))^2) dx$ est une fonction polynomiale de degré deux positive strictement sur $\mathbb{R}$ donc son discriminant est strictement négatif

$$\text{On a } g(1) = \int_0^x f(x)^2 dx + 2 \int_0^x f(x) \phi(f(x)) dx + \int_0^x (\phi(f(x)))^2 dx$$

Donc le discriminant étant strictement négatif on a

$$4 \left(\int_0^x f(x) \phi(f(x)) dx \right)^2 - \left(\int_0^x f(x)^2 dx \right) \left(\int_0^x (\phi(f(x)))^2 dx \right) < 0$$

Donc par l'inégalité de la fonction valeur carrée on peut conclure (les termes étant bien positifs)

$$\boxed{\int_0^x f(x) \phi(f(x)) dx \leq \left(\int_0^x f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x (\phi(f(x)))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$16d \text{ on a } \int_0^x (\phi(f(x)))^2 dx = \int_0^x \frac{h(x)}{x^3} dx$$

On a donc

$$\int_0^x (\phi(f(x)))^2 dx = -\frac{1}{3} \frac{h(x)}{x^2} + \frac{2}{3} \int_0^x f(x) \phi(f(x)) dx \quad (16b)$$

$$\text{or } \frac{h(x)}{x^3} > 0 \text{ pour } x > 0 \text{ donc}$$

$$\leq \frac{2}{3} \int_0^x f(x) \phi(f(x)) dx$$

$$\left(\int_0^x (\phi(f(x)))^2 dx \right) \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^x f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x (\phi(f(x)))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{16c}$$

Donc comme $\left(\int_0^x (\phi(f(x)))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} > 0$ on peut alors conclure:

$$\boxed{\forall x > 0 \left(\int_0^x (\phi(f(x)))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^x f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}$$

16e On sait que $f \in \mathcal{B}_2$ par conséquent $\int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx$ converge

Par conséquent, le membre de droite converge lorsque X tend vers $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx$ est un terme constant pouvant être majoré. Par conséquent dans l'inégalité 16d, comme elle est vraie pour tout $X > 0$, et que l'on a pu observer que cette intégrale était donc majorée (le terme de droite converge et est donc majoré) on peut alors affirmer que cette intégrale converge lorsque X tend vers $+\infty$. Donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (\phi(f)(x))^2 dx \text{ converge}}$$

Donc $\boxed{\phi(f) \in \mathcal{B}_2}$

et donc en faisant tendre X vers $+\infty$ dans l'expression 16d on a

$$\|\phi(f)\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} (\phi(f)(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \|f\|_2$$

Donc :

$$\boxed{\|\phi(f)\| \leq \frac{2}{3} \|f\|}$$

16f Montrons que $X \rightarrow X(\phi(f)(X))^2$ est bornée en $+\infty$
D'après 16e $\phi(f) \in \mathcal{B}_2$ donc $\int_0^{+\infty} (\phi(f))^2 dx$ converge donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\phi(f)(x))^2}{x^4} dx \text{ converge}$$

De plus d'après 13b, si $f \in \mathcal{B}_2$, si $\phi(f) \in \mathcal{B}_2$ donc $\int_0^{+\infty} f(x) \phi(f)(x) dx$ converge.

Donc d'après 16b on a

$$\int_0^X \frac{(\phi(f)(x))^2}{x^4} dx = \frac{2}{3} \int_0^X f(x) \phi(f)(x) dx = -\frac{1}{3} X(\phi(f)(X))^2$$

Les deux membres de gauche convergent d'après ce que l'on a affirmé précédemment, donc le membre de droite converge lorsque X tend vers $+\infty$.

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 32

Session : 2019

Épreuve de :

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

16f On peut alors conclure $x \rightarrow x (f(x))^2$ possède une limite finie en $+\infty$

Montrons que cette limite est nulle

16g D'après 16f, et en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'expression 16f (en effet tous les termes convergent vers une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$)

On obtient alors

$$\|f\|^2 = \frac{2}{3} \langle f, f \rangle$$

Partie 5

17 Suite

fonction v suite $v(n)$

Input n

disp v

$v = \text{cumsum}(u ./ (1:n))$

18a On a une suite réelle positive, avec
un > 0 $\forall n \in \mathbb{N}$, de plus $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante par hypothèse

pu conséquent d'après le théorème de la limite monotone, on peut affirmer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

18b Tout d'abord, on observe que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi.

La convergence de la suite u_n implique celle de la suite v_n

Premier cas $u_n \rightarrow 1$ $v_n \rightarrow \frac{1}{2}$

Second $u_n \rightarrow 0$ $v_n \rightarrow 0$

Troisième $u_n \rightarrow 2$ $v_n \rightarrow 1$

Quatrième $u_n \rightarrow 4$ $v_n \rightarrow 2$

On conjecture que la limite de u_n est égale à la moitié de celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

18c On sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réelles positives

Montrons la propriété par récurrence.

Pour $n=1$ $u_1 = \frac{1}{2} < 1$ donc $v_1 \geq \frac{1}{2} u_1$

On suppose la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$
montrons qu'elle est vraie sur $n+1$.

D'après l'hypothèse de récurrence: $v_n \geq \frac{u_n}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Or } v_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n+1} k u_k \\ &= \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^n k u_k \end{aligned}$$

$$\frac{(n+2)}{n} v_{n+1} = u_{n+1} + v_n$$

$$v_{n+1} + 2v_{n+1} = u_{n+1} + v_n$$

Or $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante
car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n - \frac{u_n}{2} = \frac{\sum_{k=1}^n k u_k}{n(n+1)} - \frac{u_n}{2}$$

On sait que (u_n) est décroissante donc :

$$0 \leq u_n \leq u_k \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$$

$$\text{Donc} \quad u_n \sum_{k=1}^n k \leq \sum_{k=1}^n k u_k$$

$$\text{Donc} \quad \frac{n(n+1) u_n}{2} \leq \sum_{k=1}^n k u_k$$

$$\text{Donc finalement} \quad \frac{u_n}{2} \leq \sum_{k=1}^n k u_k \times \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \boxed{v_n \geq \frac{u_n}{2}}$$

Montrons alors l'autre inégalité :

$$v_{2n} \leq \frac{(n+1)v_n}{2(2n+1)} + \frac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Ad } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n+1} k u_k$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[(n+1) u_{n+1} + \sum_{k=1}^n k u_k \right]$$

$$(n+2) v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k$$

$$\text{Or } v_n = n \times \frac{1}{(n+1)n} \sum_{k=1}^n k u_k, \text{ donc :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \boxed{(n+2) v_{n+1} = n v_n + u_{n+1}}$$

Montrons l'autre égalité

D'après ce qu'on a montré on a :

$$(n+2) v_{n+1} - n v_n = u_{n+1}$$

$$\text{Donc } n v_{n+1} - n v_n = u_{n+1} - 2 v_{n+1}$$

$$\text{Donc } n(v_{n+1} - v_n) = (u_{n+1} - 2 v_{n+1})$$

Ainsi finalement on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} (u_{n+1} - 2 v_{n+1})$$

Démontrons alors les conjectures faites en 2b

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi ?

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} (u_{n+1} - 2 v_{n+1}) \quad \text{Or si } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante on a d'après 1c}$$

$$2 v_n \geq u_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ donc } (2 v_{n+1} - u_{n+1}) \leq 0 \text{ ainsi on a } \boxed{u_{n+1} - v_n \leq 0}$$

$$\text{Donc } \boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroissante} \Rightarrow v_{n+1} \leq v_n \Leftrightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroissante}}$$

- Le fait, comme $v_n \geq \frac{u_n}{2}$ si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante on a

$$v_n \geq \frac{u_0}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ donc si } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante, alors } (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

est décroissante et donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée, d'après le théorème de la limite monotone on peut alors affirmer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

$$\text{Donc on a bien : } \boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ décroissante} \Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}}$$

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = l$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{l}{2}$

$$\text{On a } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} (u_{n+1} - 2 v_{n+1}) \text{ on sait que tous les termes convergent}$$

d'après ce qu'on a affirmé précédemment au vue du fait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que c'est une suite positive.

Code épreuve : 235

Nombre de pages : 32

Session : 2019

Épreuve de :

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On a alors
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} (u_{n+1} - 2u_n)$$

le plus on a

$$u_n \geq \frac{u_n}{2} \text{ et } u_n \leq \frac{n+1}{2(2n+1)} u_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)} u_{n+1}$$

Donc

$$\left(u_n \right)_{n \geq 1} \rightarrow \ell \Rightarrow u_n \rightarrow \frac{\ell}{2}$$

19 Supposons $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge

$$\begin{aligned}
 \text{19a } \forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=1}^N v_n &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n (2u_k) \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \frac{2u_k}{n(n+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=k}^N \frac{2u_k}{n(n+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^N 2u_k \sum_{n=k}^N \frac{1}{n(n+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^N 2u_k \left[\sum_{n=k}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\
 &= \sum_{k=1}^N 2u_k \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^N 2u_k \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right] \quad (\text{sommes télescopiques}) \\
 &= \sum_{k=1}^N 2u_k \frac{1}{k} - \frac{2}{N+1} \sum_{k=1}^N u_k
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{k=1}^N \frac{2u_k}{k} - \frac{2}{N+1} \sum_{k=1}^N u_k$$

19b $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de termes positifs car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de termes positifs donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq 0$

Donc $\sum_{n=1}^N v_n \leq \sum_{k=1}^N \frac{2u_k}{k}$ or la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2u_k}{k}$ converge donc

la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{2u_k}{k}$ est elle aussi une suite convergente par conséquent cette suite est majorée.

En posant $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ on observe que cette suite est minorée (par 0) et majorée par $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, de plus elle est strictement monotone (sa monotonie dépend de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$)

Ainsi, la suite des sommes partielles $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite

convergente d'après le théorème de la limite monotone par conséquent

comme la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente
on peut alors affirmer que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ converge}}$$

19c D'après 19a on a $\sum_{n=1}^N u_n - \sum_{n=1}^M u_n = -N u_N$

or, les deux membres de gauche sont des membres convergents d'après 19b et par hypothèse donc, comme la somme de deux termes convergents on peut affirmer :

$$\boxed{N u_N \text{ possède une limite finie quand } N \text{ tend vers } \infty}$$

Supposons que cette limite ne soit pas nulle.

On peut alors conclure $\boxed{N u_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0}$

19d D'après 19c, on fait tendre N vers ∞ dans l'égalité 19a (on peut le faire car tous les termes convergent), on obtient bien finalement :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n}$$

20a Z_n est bien une variable aléatoire discrète car il s'agit d'une variable

Montrons que $\mathbb{Z}$ n'admet pas d'expérience

On a $n P(\mathbb{Z} \leq n) \sim \frac{B(n)}{n}$, or $B(n) > 0$ car $\gamma(p) \in \mathbb{N}^*$, donc comme

la série $\sum_{n=1,1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge d'après le critère de Riemann, on peut

déduire par comparaison (les termes de la série sont bien positifs) que la
série $\sum_{n=1,1}^{\infty} n P(\mathbb{Z} \leq n)$ diverge

Donc:

$\mathbb{Z}$ n'admet pas d'expérience