



N5-00277

332878

Maths S

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2019

Épreuve de : Mathématique S & DH&C

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 2Partie I

1a $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Autan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1b $\text{Autan}(1) = \frac{\pi}{4}$

On pose $g(x) = \text{autan}(x) + \text{autan}\left(\frac{1}{x}\right)$

g est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ en tant que somme de fonctions de classe C^1 .

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1 \cdot x^2}{x^2(x^2+1)}$$

$$\boxed{g'(x) = 0} \quad \forall x > 0$$

Donc g est une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$

Re plus, $g(1) = \text{Autan}(1) + \text{Autan}(1) = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

On déduit $g(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

Donc $\boxed{\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$

1c

On a $\text{Arctan}(0) = 0$

et $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc $\text{Arctan}'(0) = 1$

On a $\frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{Arctan}'(0) = 1$

Donc $\text{Arctan}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

On peut alors conclure

$\boxed{\text{Arctan}(x) \sim x \text{ quand } x \rightarrow 0}$

2c On pose $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- f est bien continue sur $\mathbb{R}$

- f est positive sur $\mathbb{R}$

Pour $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \frac{1}{\pi(x^2+1)} dx = \frac{1}{\pi} [\text{Arctan}(x)]_a^b \\ &= \frac{1}{\pi} [\text{Arctan}(b) - \text{Arctan}(a)] \end{aligned}$$

Or $\text{Arctan}(b) \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ et $\text{Arctan}(a) \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2}$

Donc $\frac{1}{\pi} [\text{Arctan}(b) - \text{Arctan}(a)] \xrightarrow[b \rightarrow +\infty]{a \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{\pi} = 1$

Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et on a

$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1}$

Donc f est une densité d'une certaine variable aléatoire X

2b On a $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (f est continue sur $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad F(x) = P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{d'après le calcul précédent}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \right)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3a - g est continue sur $\mathbb{R}$ (sauf peut-être en 0)
- g est positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-}$
donc g est positive

($B > 0$)

$$\begin{aligned} \text{le plus :} \quad \int_0^B g(x) dx &= \int_0^B \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}x} dx \\ &= \left[e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^B \\ &= e^{-\frac{1}{2}B} - e^{-\frac{1}{2} \cdot 0} \end{aligned}$$

$$\text{Or} \quad e^{-\frac{1}{2}B} \xrightarrow[B \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad \frac{1}{B} \xrightarrow[B \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{et} \quad e^{-\frac{1}{2}a} \xrightarrow[a \rightarrow 0]{} 1 \quad \text{car} \quad -\frac{1}{2} \xrightarrow[a \rightarrow 0]{} -\infty$$

$$\text{Donc} \quad e^{-\frac{1}{2}B} - e^{-\frac{1}{2}a} \xrightarrow[B \rightarrow +\infty, a \rightarrow 0]{} 1$$

L'intégrale $\int_a^B g(x) dx$ possède donc une limite finie quand B tend vers $+\infty$ et a vers 0

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ converge et on a

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1}$$

g peut donc être considérée comme une densité d'une variable T à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

(car g nulle sur $\mathbb{R}^-$)

?b déterminons la fonction de répartition G

$$F_G(x) = P(G \leq x) = \int_{-\infty}^x g(u) du$$

$$= \int_0^x g(u) du$$

$$= \int_0^x \frac{1}{u^2} e^{-\frac{1}{u}} du$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} \quad (\text{d'après les calculs précédents})$$

Donc

$$F_G(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie II

Pour $x \in \mathbb{R}$

$$4a \quad F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x)$$

$$= P(\max(x_1, \dots, x_n) \leq x)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^n \{x_i \leq x\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^n P(x_i \leq x) \quad \text{par indépendance des } (x_1, \dots, x_n)$$

$$= (P(x_1 \leq x))^n \quad \text{car } x_1, \dots, x_n \text{ suivent la même loi}$$

$$\text{Donc } \boxed{F_{M_n}(x) = \frac{1}{2^n} \left(\text{Auctan}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \right)^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4b $\forall x \in \mathbb{R}$

$$G_n(x) = P(Y_n \leq x) = P\left(\frac{M_n}{n} \leq \frac{nx}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n} \left(\text{Auctan}\left(\frac{nx}{n}\right) + \frac{1}{2} \right)^n \quad (4a)$$

$$= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} \text{Auctan}\left(\frac{nx}{n}\right) + \frac{1}{2} \right)^n$$

$$\boxed{G_n(x) = \left(\frac{1}{2} \text{Auctan}\left(\frac{nx}{n}\right) + \frac{1}{2} \right)^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 72

Session : 2019

Épreuve de : Mathématique EDHOC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5a $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\frac{nx}{a} \rightarrow -\infty$
 $\frac{nx}{a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$

Donc $\text{Arctan}\left(\frac{nx}{a}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2}$

On a :

$$\exp(\ln(G_n(x))) = \exp\left(n \ln\left(\frac{1}{a} \left(\text{Arctan}\left(\frac{nx}{a}\right) + \frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

Donc $\frac{1}{a} \text{Arctan}\left(\frac{nx}{a}\right) + \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Par composition des $\ln\left(\frac{1}{a} \text{Arctan}\left(\frac{nx}{a}\right) + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$

Donc $n \ln\left(\frac{1}{a} \text{Arctan}\left(\frac{nx}{a}\right) + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$

et finalement $\exp\left(n \ln\left(\frac{1}{a} \text{Arctan}\left(\frac{nx}{a}\right) + \frac{1}{2}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

On peut alors
conclure

$$G_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

5b $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a $\frac{x}{a} > 0$

donc
$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \text{Arctan}\left(\frac{nx}{a}\right) + \frac{1}{2} &= \frac{1}{a} \left[\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{a}{nx}\right) \right] + \frac{1}{2} \quad (1b) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{a}{nx}\right) \\ &= 1 - \text{Arctan}\left(\frac{a}{nx}\right) \end{aligned}$$

Donc, d'après l'égalité 4b on déduit finalement:

$$\forall x > 0 \quad G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{n}}{x} \right) \right)^n$$

5c $\forall x > 0$

$$G_n(x) = \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{n}}{x} \right) \right) \right)$$

D'après 1c on sait $\operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{n}}{x} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{x}$ car $\frac{\sqrt{n}}{nx} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0^+$

$$\text{donc } \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{n}}{x} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

$$\text{Donc } \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{n}}{x} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} - \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{n}}{x} \right)$$

$$\text{D'après 1c} \quad \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{n}}{x}$$

$$\text{Donc } n \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{n}}{x} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} - \frac{1}{x}$$

Or, ($x > 0$), x est "fixé" donc on a

$$n \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{n}}{x} \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} - \frac{1}{x}$$

Comme $-\frac{1}{x}$ ne dépend pas de n , on a

$$\exp \left(n \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{n}}{x} \right) \right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\text{Donc } G_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^{-\frac{1}{x}}$$

Soit on sait
$$G(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On sait que $G_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ si $x \leq 0$

$$G_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-x} \quad \text{si } x > 0$$

Donc en tout point de continuité de G , on a :

$$\boxed{G_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(x)}$$

On peut donc conclure que $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers T

Exercice 3

$$n \in \mathbb{N}^* \quad B = (e_1, \dots, e_n)$$

Partie I

$$u \in \mathcal{L}(E)$$

1a Supposons que u^* existe. (u^* un endomorphisme)
($e_1, \dots, e_n$) est une base orthonormale de E , donc pour $y \in E$ quel que
 $u^*(y) \in E$

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^n e_i \langle u(y), e_i \rangle$$

$$\boxed{u^*(y) = \sum_{i=1}^n e_i \langle y, u(e_i) \rangle} \quad \text{par définition de } u^*$$

1b Supposons qu'il existe un autre endomorphisme v^* vérifiant les conditions de $u^*(y)$, on aurait alors

$$\begin{aligned} u^*(y) &= v^*(y) \quad \forall y \in E \\ \sum_{i=1}^n e_i \langle y, u(e_i) \rangle &= \sum_{i=1}^n e_i \langle y, v(e_i) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Or aurait donc } \langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, v^*(y) \rangle \quad \forall (x, y) \in E^2$$

$$\text{Donc } \langle x, u^*(y) - v^*(y) \rangle = 0 \quad \forall (x, y) \in E^2$$

Donc $u^*(y) - v^*(y) \perp E$ ($\forall y \in E$) or le seul vecteur orthogonal à tout vecteur de E est le vecteur nul donc

$$\begin{aligned} u^*(y) - v^*(y) &= 0 \quad \forall y \in E \\ \text{donc } u^*(y) &= v^*(y) \quad \forall y \in E, \text{ ainsi } u^* = v^* \end{aligned}$$

Par conséquent, si u^* existe, $\boxed{u^* \text{ est unique}}$

2a Montrons que u^* est bien un endomorphisme.

$$\text{On a } u^*(y) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i \text{ d'après 1a}$$

$$\text{Or: } \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Par stabilité de E :

$$e_i \in E \text{ donc } \langle u(e_i), y \rangle e_i \in E \quad (\forall y \in E)$$

$$\boxed{u^*(y) \in E \quad \forall y \in E}$$

Code épreuve : 297

Nombre de pages :

Session : 2019

Épreuve de : Mathématique S BDHBC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

le plus, pour $x \in \mathcal{O}$, $y \in \mathcal{O}$, $1 \in \mathcal{R}$

$$u^*(x+y) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), x+y \rangle e_i$$

Par bilinéarité du produit scalaire

$$= \sum_{i=1}^n (\langle u(e_i), x \rangle + \langle u(e_i), y \rangle) e_i$$

$$u^*(x+y) = u^*(x) + u^*(y) \quad \text{donc } u^* \text{ est linéaire}$$

Donc u^* est effectivement un endomorphisme de $\mathcal{O}$

2b On sait déjà que u^* est un endomorphisme de $\mathcal{O}$, et on sait que u^* si il existe, est unique

le plus; $\forall (x, y) \in \mathcal{O}^2$

$$\langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), y \rangle e_i \rangle \quad (1a)$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle u(e_i), y \rangle \quad \text{et } \langle u(e_i), y \rangle = \langle u^*(y), e_i \rangle$$

$$\text{Or } u(x) \in \mathcal{O} \text{ donc } u(x) = \sum_{i=1}^n \langle u(x), e_i \rangle e_i$$

$$\text{Donc comme } \langle u(x), e_i \rangle = \langle u^*(e_i), x \rangle$$

On obtient bien: $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

Partie II

$u \in \mathcal{L}(E)$ normal quand $u \circ u^* = u^* \circ u$

3. f un endomorphisme symétrique de E
 Donc $\langle f(x), y \rangle = \langle f(y), x \rangle \quad \forall (x, y) \in E^2$

Donc d'après 2b on a $f^* = f$

Pu conséquent $f \circ f^* = f^* \circ f$

Donc f est normal

4a $\forall x \in E$

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \langle u(x), u(x) \rangle \\ &= \langle x, u \circ u^*(x) \rangle \quad \text{d'après 2b} \end{aligned}$$

De plus:

$$\begin{aligned} \|u^*(x)\|^2 &= \langle u^*(x), u^*(x) \rangle \\ &= \langle x, u \circ u^*(x) \rangle \quad (2b) \end{aligned}$$

$$= \langle x, u \circ u^*(x) \rangle \quad \text{car } u \text{ un endomorphisme normal}$$

on obtient alors :

$$\boxed{\|u\| = \|u^*\|} \quad \forall u \in \mathcal{F}$$

4b Soit $x \in \ker(u)$ alors $u(x) = 0$

Donc

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow \|u(x)\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \|u^*(x)\| = 0 \quad (4a)$$

$$\Leftrightarrow u^*(x) = 0 \quad \text{donc } x \in \ker(u^*)$$

$$\text{Si } x \in \ker(u) \text{ alors } x \in \ker(u^*)$$

$$\ker(u) \subset \ker(u^*)$$

Réciproquement

$$\text{Si } x \in \ker(u^*) \text{ alors } u^*(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \|u^*(x)\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \|u(x)\| = 0$$

$$\Leftrightarrow u(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \ker(u)$$

$$\ker(u^*) \subset \ker(u)$$

$$\text{Donc } \boxed{\ker(u) = \ker(u^*)}$$

5 Supposons que F est stable par u

Alors si $x \in \mathcal{F}$ alors $u(x) \in \mathcal{F}$

Soit $y \in F^\perp$

$$\text{Si } x \in \mathcal{F}, y \in F^\perp \text{ on a } \langle x, y \rangle = 0$$

Or si $x \in \mathcal{F}$, $u(x) \in \mathcal{F}$ donc

$$\langle u(x), y \rangle = 0$$

D'après 2b

$$0 = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

$$\text{Donc pour } x \in \mathcal{F} \quad \langle x, u^*(y) \rangle = 0$$

$$\text{Donc } \boxed{u^*(y) \in \mathcal{F}^\perp} \quad \text{donc } \boxed{F^\perp \text{ stable par } u^*}$$

6a On suppose que u possède une valeur propre

$$\exists x \in \mathcal{O} \setminus \{0\} \quad u(x) = dx$$

$$\text{Soit } x \in \mathcal{O}_d \text{ on a } u(x) = dx$$

$$\text{or } x \in \mathcal{O}_d \text{ donc } u(x) \in \mathcal{O}_d$$

Ainsi, $\mathcal{O}_d$ est stable par u

$$\text{Si } x \in \mathcal{O}_d$$

$$\text{on a } u(x) = dx$$

$$\text{Donc } u^*(u(x)) = d u^*(x)$$

$$u(u^*(x)) = d u^*(x) \quad \text{car } u \text{ normal}$$

Il existe donc un vecteur $(u^*(x))$ tel que

$$u(u^*(x)) = d u^*(x), \text{ donc}$$

$$u^*(x) \in \mathcal{O}_d$$

Enfinement $\mathcal{O}_d$ est stable par u^*

6b On applique l'inégalité $\|u\|$ à l'endomorphisme u^* , on a donc

$$\forall x \in \mathcal{O} \quad \|u^*(x)\| = \|u^*(x)\| \quad \text{or} \quad \|u^*(x)\| = \|u(x)\| \quad \forall x \in \mathcal{O}(\|u\|)$$

$$\text{donc} \quad \|u(x)\| = \|(u^*(x))^*\| \quad \forall x \in \mathcal{O}$$

On a alors $(u^*)^* = u$ (on l'admet)

D'après 6a $\mathcal{O}_d$ est stable par u^*

Donc d'après 5 $\mathcal{O}_d^+$ est stable par $(u^*)^*$

$$\text{or on veut d'avoir } (u^*)^* = u$$

donc $\mathcal{O}_d^+$ est stable par u

Enfinement :

$\mathcal{O}_d^+$ est stable par u

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2019

Épreuve de : Mathématique S B D H S C

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème
Partie I

$$n \in \mathbb{N}^*, \quad X(n) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad G(t) = \sum_{k=1}^n P(X=k) t^k$$

$$\underline{1} \quad G(1) = \sum_{k=1}^n P(X=k) \quad \text{ou} \quad (X=k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \text{ forme un système complet d'événement}$$

$$\boxed{G(1) = 1}$$

$$\underline{2} \quad B(x) = \sum_{k=1}^n k P(X=k)$$

On cherche à exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G .

On a déjà $B(t^x) = \sum_{k=1}^n t^k P(X=k)$ d'après le théorème de transfert

$$\boxed{B(t^x) = G(t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

le même $G'(t) = \sum_{k=1}^n k P(X=k) t^{k-1}$, donc $G'(1) = \sum_{k=1}^n k P(X=k)$

Donc $\boxed{G'(1) = B(x)}$

3 on cherche à établir la relation demandée

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^n P(X=k) t^k = G(t) \quad (G \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R})$$

$$G'(t) = \sum_{k=1}^n k P(X=k) t^{k-1}$$

$$G''(t) = \sum_{k=1}^n k(k-1) P(X=k) t^{k-2}$$

Donc $G'(1) = E(X)$

$$G''(1) = \sum_{k=1}^n k(k-1) P(X=k)$$

$$G''(1) = E(X^2) - E(X) \quad (\text{par linéarité de l'espérance})$$

le plus d'après la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - E(X) + E(X) - (E(X))^2 \\ V(X) &= G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 \end{aligned}$$

Donc $V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$

Autre dt

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

4a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k; k+1]$, par décroissance de la fonction inverse

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant)

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t-1} dt$$

Donc

$$\frac{(x_{k+1} - x_k)}{x_{k+1}} \leq \ln(x_{k+1}) - \ln(x_k) \leq \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k}$$

Donc :

$\forall x \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}}$$

4b $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on somme membre à membre les termes des inégalités pour k allant de 1 à $n-1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(x_{k+1}) - \ln(x_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_k}$$

la télescope

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_{k+1}} \leq \ln(x_n) - \ln(1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_k}$$

On pose $x_{k+1} = j$ dans la somme de gauche

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{x_k} \leq \ln(x_n) - \ln(1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x_k}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} - 1 \leq \ln(x_n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_n}$$

$$-\ln(x_n) - 1 \leq -\ln(x_n) \leq -\ln(x_n) - \frac{1}{x_n}$$

$$\boxed{\ln(x_n) + \frac{1}{x_n} \leq \ln(x_n) \leq \ln(x_n) + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}}$$

4c on a $\ln(x_n) > 0$ car $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ donc

$$1 + \frac{1}{x_n \ln(x_n)} \leq \frac{\ln(x_n)}{\ln(x_n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(x_n)}$$

car $\ln(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et $n \ln(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc $1 + \frac{1}{x_n \ln(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ (par somme de limites)

$$\text{et } 1 + \frac{1}{\ln(x_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

donc d'après le théorème d'encadrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n)} \rightarrow 1$$

On peut alors conclure :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = \infty$$

5a On sait que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente d'après la règle de Riemann, par conséquent la suite de ses sommes partielles est aussi convergente, donc $\left(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge et donc :

$$(\ln m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ est } \underline{\text{convergente}}$$

Partie III

6

7a A chaque fois on prend soit la valeur qu'elle avait avant, soit elle prend une valeur $A[j]$ ($j \in [1, m]$) où $A[j]$ était supérieur à la valeur qu'elle prenait avant, on sait donc que $m \geq A[j]$ ($\forall j \in [1, m]$) et il y a égalité pour le maximum de $(A[j])_{j \in [1, m]}$, or, on sait qu'il existe j_0 tel que :

$m = A[j_0] > A[j]$ $\forall j \in [1, m]$ par conséquent à la fin de la boucle on a $m = m$ car on prend la valeur maximal des $A[j]$ à la fin de la boucle.

Donc $\boxed{m = m}$ à la fin de la boucle for

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 72

Session : 2019

Épreuve de : Mathématique S O DHOC

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

7. La ligne pour la variable c affichée à la fin de cette commande est la "rang" où le coefficient du vecteur A qui est maximal
donc si $A = (1, 3, \dots, n, \dots, 2)$ on a $c = i$

1^{ère} colonne

Donc le contenu de c est le numéro de la colonne du vecteur ligne A où le coefficient est le plus grand de la ligne

$$c = \text{find}(\max(A_i), 1) \\ \text{disp}(c)$$

8. On note G_n la fonction génératrice de X_n
 X_n est le nombre d'affectations concernant la variable informatique c effectuées au cours du script présenté au début de la 7.
Le vecteur A est rempli de façon aléatoire par les entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$

Donc $A_1, \dots, A_n$ sont des variables aléatoires suivant une loi uniforme de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$$A_i(2) = \llbracket 1, i \rrbracket$$

et suit une loi

9. X_1 est une variable certaine égale à 1 car pour $n=1$ c ne peut avoir qu'une seule affectation

9a Montrer par récurrence la propriété demandée
pour $n=1$ vraie d'après ?

On suppose que c'est vraie au rang n , montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$

Dans le scripte, pour $n+1$. $m = A(1)$
 $c = 1$
 for $k = 2..n$
 if $A(k) > m$ then $m = A(k)$
 $c = k$
 end
 disp(c)

Si $A(n+1) > m$, on a alors $c = n+1$, donc c peut prendre la valeur $n+1$.

Le plus, si $A(i) > m$ et $A(i) > A(j) \forall (j) \in [0; n+1]$ on a $c = i$ donc c peut prendre ses valeurs dans $[1; n+1]$

Par conséquent X_{n+1} peut prendre ses valeurs dans $[1; n+1]$

$$\text{Donc } X_{n+1}(\Omega) = [1; n+1]$$

D'après le principe de récurrence, la propriété étant vraie au rang n , on peut alors affirmer que

$$X_n(\Omega) = [1; n] \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$9b \quad [X_{n=1}] = \bigcap_{i=1}^n [A_1 > A_i] \text{ de même } [X_{n=m}] = \bigcap_{i=1}^m [A_m > A_i]$$

$$P(X_{n=1}) = P\left(\bigcap_{i=1}^n (A_1 > A_i)\right) \text{ et } P(X_{n=m}) = P\left(\bigcap_{i=1}^m (A_m > A_i)\right)$$

$A_1, \dots, A_n$ suivant la même loi (mais les variables $A_1, \dots, A_n$ ne prennent pas les mêmes valeurs)

On a $\boxed{P(X_1=1) = P(A_1=m) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad P(X_m=m) = P(A_m=m) = \frac{1}{2(n)}}$

On a alors, comme $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$ (g_2)

$\boxed{P(X_2=1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X_2=2) = \frac{1}{2}}$

De plus $X_3(\Omega) = \{1, 2\}$

~~$P(X_3=1) = \frac{1}{3} \quad P(X_3=3) = \frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad P(X_3=2) = 1 - P(X_3=1) - P(X_3=3) = \frac{1}{3}$~~

~~$\boxed{P(X_3=1) = P(X_3=2) = P(X_3=3) = \frac{1}{3}}$~~

$P(X_3=1) = \frac{1}{3}$

$P(X_3=2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P(X_3=3) = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$

3c Pour $n \geq 2, j \in \{2, n\}$, on considère le système complet d'événement $((A_m=m), (A_m < m))$ car $A_m(\Omega) = \{1, n\}$ où A_m suit une loi uniforme sur $\{1, n\}$

D'après la formule des probabilités totales

$P(X_m=j) = P(A_m=m) \times P_{A_m=m}(X_m=j) + P(A_m < m) \times P_{A_m < m}(X_m=j)$

or A_m suit une loi uniforme sur $\{1, n\}$ donc

$P(A_m=m) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad P(A_m < m) = 1 - P(A_m=m) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$

On a alors

$$P(X_n = j) = \frac{1}{n} P_{A_n = n}(X_n = j) + \frac{n-1}{n} P_{A_n < n}(X_n = j)$$

Or, si $A_n < n$, et qu'on a $X_n = j$, cela revient à dire que l'ang^u no^u 1, c'était la même valeur.

En effet selon le script pour n on a

$m = A(1)$

$c = 1$

for $i = 2, n$

if $A(i) > m$ then $A(i) < m$

$c = i$

end

end

disp(c)

On voit d'après π que si la fond^e la boucle, m contient la valeur n , mais donc

si $A(n) < n$, alors

$c \neq n$ car $m = n$ à la fin de la boucle, en

d'autre terme si $A(n) < n$ alors

X_{n-1} et X_n prennent la même valeur. donc.

$$P_{A_n < n}(X_n = j) = P(X_{n-1} = j)$$

Cependant, si on a $A_n = n$, comme $X_n(2) = [1, n]$ d'après g_a , on

sait que (si $A_n = n$) et $X_n = j$, alors $(X_{n-1}(2) = [1, n])$ on a X_n qui prend une valeur d'un entier inférieur pour $n-1$, car X_{n-1} ne peut pas prendre la valeur n et donc prend $j-1$ si X_n prend la valeur j .

$$\text{Donc } P_{A_n = n}(X_n = j) = P(X_{n-1} = j-1)$$

Finalement, en remplaçant

$$P(X_n = j) = \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j)$$

qd Donnons la loi de X_4

$$P(X_4 = 1) = \frac{1}{4} P(X_3 = 0) + \frac{3}{4} P(X_3 = 1) = \frac{1}{4}$$

$$P(X_4 = 2) = \frac{1}{4} P(X_3 = 1) + \frac{3}{4} P(X_3 = 2) = \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session : 2019

Épreuve de :

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$P(X_4=3) = \frac{1}{4} P(X_3=2) + \frac{3}{4} P(X_3=3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$P(X_4=4) = \frac{1}{4} P(X_3=3) + \frac{3}{4} P(X_3=4) = \frac{1}{12} \quad \text{car } P(X_3=4)=0$$

On voit $X_4 \in \{1, 4\}$

Voir feuille annexée

$$\begin{aligned} \text{10a Pour } j=1 \quad P(X_m=1) &= \frac{1}{m} P(X_{m-1}=0) + \frac{m-1}{m} P(X_{m-1}=1) \\ &= \frac{m-1}{m} P(X_{m-1}=1) \quad \text{car } X_{m-1} \in \{1, m-1\} \end{aligned}$$

Pour les cas $m=2, 3, 4$ c'est vrai d'après 9b et 9d

$$\text{10b} \quad \text{On a } G_m(t) = \sum_{k=0}^m P(X_m=k) t^k$$

$$\begin{aligned} G_m(t) &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{m} P(X_{m-1}=k-1) t^k + \frac{m-1}{m} \sum_{k=0}^m P(X_{m-1}=k) t^k \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{m} P(X_{m-1}=k-1) t^k + \frac{m-1}{m} G_{m-1}(t) \end{aligned}$$

On pose $k-1=j$ dans la somme de gauche

$$G_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1}=k) t^{k/n} + G_{n-1}(t) \frac{n-1}{n}$$

or $P(X_{n-1}=n) = P(X_{n-1}=0) = 0$ donc on peut ajouter ces termes :

$$G_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(X_{n-1}=k) t^{k/n} + G_{n-1}(t) \frac{n-1}{n} \text{ et donc}$$

$$\boxed{G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t)} \quad \forall n \geq 2, \forall t \in \mathbb{R}$$

10c On cherche à montrer la propriété par récurrence
 - Pour $n=1$ $G_1(t) = 1$ (valeur d'après 1)

On suppose la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$
 montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$

$$G_{n+1}(t) = \frac{t+n}{n} G_n(t) \text{ d'après (10b)}$$

$$= \frac{t+n}{n} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} (t+j) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$G_{n+1}(t) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^n (t+j)$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$, d'après le principe de récurrence on peut donc affirmer :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R} \quad G_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} (t+j)}$$

11 G_n est C^2 sur $\mathbb{R}$:

$$G_n'(t) = \frac{t+n-1}{n} (G_{n-1}'(t)) + \frac{1}{n} G_{n-2}(t)$$

Donc comme $G'_n(1) = \delta_n$

On a alors (pour $t=1$)

$$\delta_n = \frac{n-1+1}{n} \delta_{n-1} + \frac{1}{n} G_{n-1}(1)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\delta_n - \delta_{n-1} = \frac{1}{n}$ car $G_{n-1}(1) = 1$ (par changement de variable)

Ainsi : $\delta_i - \delta_{i-1} = \frac{1}{i} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$

Donc

$$\sum_{i=2}^n (\delta_i - \delta_{i-1}) = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Par télescopage

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \delta_n = \ln n$ car $\delta_n - \delta_1 = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}$

$\Leftrightarrow \delta_n - 1 = \ln n - 1$
 $\Leftrightarrow \delta_n = \ln n$

12a On dérive une seconde fois :

$$G''_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G''_{n-1}(t) + \frac{1}{n} G'_{n-1}(t) + \frac{1}{n} G'_{n-1}(t)$$

Donc $t=1$

$$G''_n(1) = G''_{n-1}(1) + \frac{2}{n} G'_{n-1}(1)$$

$$\text{Or } V_n = G''_n(1) + G'_n(1) - (G'_n(1))^2$$
$$= G''_n(1) + \delta_n - (\delta_n)^2$$

Donc $G''_n(1) = V_n - \delta_n + (\delta_n)^2$

Donc

$$V_n - \delta_n + (\delta_n)^2 = V_{n-1} - \delta_{n-1} + (\delta_{n-1})^2 + \frac{2\delta_{n-1}}{n}$$

On admet l'égalité

12b D'après 12a $\forall i \geq 2, V_i - V_{i-1} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2}$

Donc
$$\sum_{i=2}^n V_i - V_{i-1} = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i^2}$$

Par télescopage $V_n - V_1 = u_n - 1 - h_n + 1$

Or $\exists m$ x1 une variable certaine donc $V_1 = 0$

Donc $V_n = u_n - h_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

12c On a $\frac{V_n}{u_n} = 1 - \frac{h_n}{u_n}$

Or $u_n \sim \ln(n)$ et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite convergente (5)

donc $\frac{h_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc par somme de limites.

$$\frac{V_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi $V_n \sim u_n$ et $u_n \sim \ln(n)$

Finalement

$$V_n \sim \ln(n)$$

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 72

Session :

Épreuve de :

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ensemble 1

$$1a \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

On observe alors $A^2 = 3A - 2I_3$

Donc $P(X) = X^2 - 3X + 2$

$P(X) = (X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A

1b On observe que les racines du polynôme annulateur de A sont 1 et 2

Donc les valeurs propres possibles sont $\begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix}$

1c On observe que $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$

et donc que $\text{rg}(A - I_3) \neq 3$ et $\text{rg}(A - 2I_3) \neq 3$

On peut donc conjecturer que 1 et 2 sont bien valeurs propres, que les dimensions de ses sous espaces propres sont respectivement 2 (pour E_{λ_1} car $\lambda_1 = 1$) et 1 pour E_{λ_2} car $\lambda_2 = 2$)

et donc cette la somme des dimensions des sous espaces propres est 3 et donc A , et donc f , est diagonalisable

1d) A étant la matrice représentative de f dans la base canonique, donc on peut chercher des bases des noyaux $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ à l'aide de la matrice

Sont $X \in \text{Ker}(f - \text{id}) \setminus \{0\}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX = X$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = x_2 \\ -x_1 + x_2 = x_3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ -2x_1 + 3x_3 + 3x_1 - 2x_3 = x_2 \\ x_2 = x_3 + x_1 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_3 + x_1 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$X \in \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$
 $\text{Ker}(f - \text{id}) \subset \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$

Par conséquent si $X \in \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$ on a bien

$AX = X$

Donc $\boxed{\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))}$

De même pour $X \in \text{Ker}(f - 2\text{id})$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$Ax = 2x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2x_2 \\ -x_1 + x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = x_2 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

Donc $x \in \text{Vect}(0; 2; 1)$

Respectivement, si $x \in \text{Vect}(0; 2; 1)$ on a bien $Ax = 2x$

Donc $\boxed{\text{Ker}(f - 2\text{id}) = \text{Vect}(0; 2; 1)}$

2a On a $\dim \text{Ker}(f - 2\text{id}) + \dim(\text{Ker}(f - 1\text{id})) = 2 + 1 = 3 = \dim M_{3,1}(\mathbb{R})$

est donc diagonalisable, il existe une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de f , autrement dit il existe formée par concaténation des bases de $\text{Ker}(f - \text{id})$ et $\text{Ker}(f - 2\text{id})$

En prenant $u_1 = (1; 1; 0)$ et $v_2 = (0; 2; 1)$
 $v_1 = (0; 1; 1)$

On obtient une base de $\mathbb{R}^3$ où (u_1, v_1) est une base de $\text{Ker}(f - \text{id})$ et où v_2 est une base de $\text{Ker}(f - 2\text{id})$

2b

Partie II $n \geq p \geq 2$

3.9 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de f

Soit B une base de E formée de vecteurs propres de f on a une matrice diagonale (D la matrice représentative de f dans cette base)
On a (pour $n_1 = \dim(\ker(f - d_1 \text{id}))$)

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_p & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

On a donc

$$D - d_1 I_n = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_2 - d_1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Pour

$$(D - d_1 I_n)(D - d_2 I_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & (\lambda_3 - d_1)(\lambda_3 - d_2) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Ainsi de suite, le produit de deux matrices diagonales donnant une matrice diagonale, or, le produit d'une matrice diagonale dont les $n-1$ premiers coefficients diagonaux sont nuls

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 37

Session :

Épreuve de :

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

avec une matrice de p derniers coefficients diagonaux nuls donne une matrice nulle.

On a

$$(D-d_1 I_m) \dots (D-d_{p-1} I_m) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \prod_{i=0}^{p-1} (d_p - d_i) \end{pmatrix}$$

et comme $(D-d_p I_m) = \begin{pmatrix} d_1 - d_p & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

On obtient finalement :

$$(D-d_1 I_m) \dots (D-d_p I_m) = 0_{m \times m}$$

3b) D est la matrice représentative de f dans une certaine base B de $\mathcal{B}$, on peut donc conclure que

$$P(X) = \prod_{i=1}^p (X - d_i)$$

est un polynôme annulateur de f d'après 3a

4a Pour $i = q$
$$L_i(d_i) = \frac{\frac{1}{n}}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^p \frac{d_i - d_j}{d_i - d_j}} = 1$$

Donc $L_i(d_i) = 1$

Pour $i \neq q$
$$L_i(d_i) = \frac{\frac{1}{n}}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^p \frac{d_i - d_j}{d_q - d_j}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q \\ j \neq i}}^p \frac{d_i - d_j}{d_q - d_j}} \left(\frac{d_i - d_i}{d_q - d_i} \right)$$

$L_i(d_i) = 0$

Donc
$$L_i(d_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4b Soit $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \sum_{j=1}^p L_j(x) a_j = 0$ (On veut montrer que cette formule est valide)

Pour $x = d_i$

$$\sum_{j=1}^p L_j(d_i) a_j = 0 \Leftrightarrow L_i(d_i) a_i = 0$$

$$\Leftrightarrow a_i = 0$$

On obtient donc

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p L_j(x) a_j = 0$$

De ceci étant vrai quelque soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on déduit en répétant p fois le dernier processus (c'est à dire en identifiant en $d_1, \dots, d_p$)

$$\sum_{j=1}^p L_j(x) a_j = 0 \Rightarrow a_j = 0 \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$$

Puis conséquemment la famille $(L_1 \dots L_p)$ est une famille libre

De plus, elle est de même cardinal que la dimension de $R_{p-1}[X]$,
on peut donc affirmer que cette famille forme une base
de $R_{p-1}[X]$

Donc $L_1 \dots L_p$ est une base de $R_{p-1}[X]$

lc D'après lb : $\forall P \in R_{p-1}[X], \exists! (d_1, \dots, d_p) \mid P = \sum_{i=1}^p d_i L_i$
 $(L_1 \dots L_p)$ une base

En identifiant on a
 $P(1_1) = \sum_{i=1}^p d_i L_i(1_1)$

$$= 0 + d_1 \times 1$$

$$P(1_1) = d_1$$

Donc $P(1_1) = d_1$

Plus généralement,

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad P(1_i) = \sum_{j=1}^p d_j L_j(1_i)$$

$$P(1_i) = d_i$$

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$$

On peut donc conclure :

$$\forall P \in R_{p-1}[X], \quad P = \sum_{i=1}^p P(1_i) L_i$$

ld Pour $P = L_i$ ($i \in \llbracket 1, p \rrbracket$) l'égalité lc étant vraie pour tout
 $P \in R_{p-1}[X]$, on a

$$L_i(X) = \sum_{k=1}^p L_i(1_k) L_k(X) \text{ donc en sommant sur l'indice :}$$

On

$$\sum_{i=1}^p L_i(X) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^p L_i(1_k) L_k(X) = 1$$

Donc $\boxed{\sum_{i=1}^p L_i = 1}$

5a $\forall x \in \mathcal{B}$

$$L_2(f)(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^p \left(\frac{f(x) - d_j}{d_2 - d_j} \right)$$

Or a

Soit $x \in \mathcal{B} \setminus \{1, \dots, a_p\} \setminus x = \sum_{i=1}^p a_i e_i$ $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathcal{B}$ formée de vecteurs propres de $\mathcal{B}$

Donc $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^p a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^p a_i d_i e_i$

ou $\sum_{j=1}^p L_j(d_i) = 1$

Donc

On déduit :

$$f(L_2(f)(x)) = \sum_{i=1}^p a_i e_i d_2$$

$$= d_2 \sum_{i=1}^p a_i e_i \quad \text{on reconnaît alors } x$$

On a donc $f(L_2(f)(x)) = d_2 L_2(f)(x)$

Donc 1

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 32

Session :

Épreuve de :

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

5b On admet

$$L_2(f)(x) \in \ker(f - d_2 \text{id})$$

$$5b \quad \text{On a } \sum_{i=1}^n L_i(f)(x) = 1 \quad \text{d'après 4d}$$

Feuille annexe : Problème (loi de X_4)

$$P(X_4=1) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{4} \times P(X_3=1) = \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(X_4=2) = \frac{1}{4} \times P(X_3=1) + \frac{3}{4} \times P(X_3=2) = \frac{1}{12} + \frac{3}{8} = \frac{1}{24} + \frac{9}{24} = \frac{10}{24}$$

$$P(X_4=3) = \frac{1}{4} \times P(X_3=2) + \frac{3}{4} \times P(X_3=3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

$$P(X_4=4) = \frac{1}{4} \times P(X_3=3) = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{16}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE



