Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 32 | Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques S BSSBC / HBC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

N5-00277 332878 Maths S

Partie I

$a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$

$$A = \frac{1}{1-a}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

1 On observe que les deux colonnes de la matrice A sont proportionnelles, ($C_2 = -C_1$) donc on peut affirmer :

$$\boxed{rg(A) = 1}$$

De plus :

$$A^2 = \frac{1}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-a)^2}\begin{pmatrix} 1-a & -1+a \\ a-a^2 & -a+a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-a}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

$$= A$$

Donc $\boxed{A^2 = A}$

Par conséquent $P(X) = X^2 - X = X(X-1)$ est un ~~endomor~~ polynome annulateur de A, donc les valeurs propres de A sont inclus dans les racines de ce polynome, c'est à dire ;

$$Sp(A) \subset \{0;1\}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

De plus, on sait $rg(A) = 1$, donc d'après le théorème du rang comme $A \in M_2(\mathbb{R})$ on déduit

$$\boxed{\dim(\text{Ker}(f)) = \dim E_0(f) = 1}$$

Le sous espace $E_0(f)$ étant non vide, 0 est bien valeur propre de A

- Montrons que 1 est valeur propre de A et déterminons le sous espace propre associé.

Soit $X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tel que $AX = X$ (X est non nul)

$$AX = X \iff \frac{1}{1-a}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \frac{1}{1-a}\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ ax_1 - ax_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{1-a}(x_1 - x_2) = x_1 \\ \frac{a}{1-a}(x_1 - x_2) = x_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 = x_1 - ax_1 \\ ax_1 - ax_2 = x_2 - ax_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ax_1 = x_2 \end{cases}$$

Donc $AX = X \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ax_1 \end{pmatrix}$ donc $X \in \text{Vect}(1; a)$

De plus, si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ on a bien $AX = X$

Il existe donc un vecteur non nul X tel que $AX = X$ donc 1 est bien valeur propre et on a alors :

$\boxed{1 \text{ est valeur propre et } E_1(f) = \text{Vect}(1, a)}$

On sait que A et f ont les mêmes sous espaces propres et les mêmes valeurs propre

$\boxed{\text{A possède donc deux valeurs propres distinctes et } A \in M_2(\mathbb{R}) \text{ donc on peut dire que A est diagonalisable et donc f est diagonalisable}}$

Déterminons le sous espace propre de 0.

$X \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ | $AX = 0$ (X non nul)

$AX = 0 \Leftrightarrow \left\{ x_1 - x_2 = 0 \right.$ (Calcul réalisé précedemment donne cette égalité)

Donc $\boxed{E_0(f) = E_0(A) = \text{Vect}(1;1)}$

2 $M = {}^tA A$

$$= \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1+a^2 & -1-a^2 \\ -1-a^2 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1+a^2 & -(1+a^2) \\ -(1+a^2) & (1+a^2) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M = \frac{1+a^2}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$BX = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{BX = 2X}$

Donc $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ainsi on peut affirmer que

$\frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2}$ est valeur propre de M et on a (et donc de φf) $\boxed{E_{\frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2}}(\varphi f) = \text{Vect}(1;-1)}$

Déterminons $\mathrm{Ker}(sf)$

Soit X tel que $MX=0$ avec $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ X non nul

$$
\begin{aligned}
MX=0 &\Leftrightarrow {}^tAAX=0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1+a^2}{(1-a)^2}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1+a^2}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1 = x_2
\end{aligned}
$$

Donc si $X \in \mathrm{Ker}(sf)$ (on confond $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Ker}(sf)$) alors $X \in \mathrm{Vect}(1,1)$

De plus, si $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a ${}^tAAX=0$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(sf) = \mathrm{Vect}(1,1) = \mathrm{Ker}(f)}$$

On peut donc affirmer que 0 est valeur propre de M et donc de sf et on a comme sous espace propre :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(sf) = E_0(sf) = \mathrm{Vect}(1,1)}$$

Donc $M \in M_2(\mathbb{R})$ et possède deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable

3 Déterminons une condition nécessaire et suffisante tel que M soit la la matrice d'un projecteur

M est la matrice d'un projecteur si et seulement si $M^2 = M$

$$
\begin{aligned}
\cancel{M^2 = {}^tAA{}^tAA} \\
\cancel{= \left(\frac{1+a^2}{(1-a)^2}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \\
\cancel{= \left(\frac{1+a^2}{(1-a)^2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

Si ${}^tA = A$ on a

$$
\begin{aligned}
M^2 &= {}^tAA{}^tAA \\
&= {}^tAA^2A \qquad \text{or } A^2 = A \\
&= {}^tAA^2 \\
&= {}^tAA = M
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{Si } {}^tA = A \text{ alors } M^2 = M}$$

Réciproquement, si $M^2 = M$, montrons ${}^tA = A$

$M^2 = M \iff M^2 - M = 0 \iff \left(\frac{1+a^2}{(1-a)^2}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{(1+a^2)}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$\iff \begin{cases} 1 = a^4 \\ a = -1 \end{cases}$ par des calculs intermédiaires

$\iff a = -1$

$\iff {}^tA = A$

Finalement on peut conclure <u>M est la matrice d'un projecteur si et ${}^tA = A$</u>

<u>Partie II</u>

<u>4a</u> $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

Donnons l'expression de $tr({}^tAB)$

$({}^tAB)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = \sum_{k=1}^{n} (A_{i,k})^t (B_{k,j}) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} B_{k,j}$

Donc : $\boxed{tr({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} B_{k,i}}$

4b Montrons que l'application $(A,B) \to tr({}^tAB)$ est un produit scalaire.

Tout d'abord :

$tr({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} B_{k,i} = tr\left(\left(\sum_{k=1}^{n} B_{k,j} A_{k,i}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}\right) = tr({}^tBA)$

les termes à l'intérieur des sommes sont des <u>réels</u>

Donc $(\cdot|\cdot)$ est <u>bien symétrique</u> car $\boxed{(A|B) = (B|A)}$

(On sait aussi $tr({}^tA) = tr(A)$ donc $tr({}^tAB) = tr({}^tBA)$)

- De plus, soit $A_1 \in M_n(\mathbb{R})$, $A_2 \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$tr({}^t(\lambda A_1 + A_2)B) = tr(\lambda({}^tA_1 B) + ({}^tA_2 B))$
$= \lambda\, tr({}^tA_1 B) + tr({}^tA_2 B)$ par linéarité de la trace
$(\lambda A_1 + A_2 / B) = \lambda(A_1/B) + (A_2/B)$

Donc $(\cdot/\cdot)$ est linéaire à gauche et par symétrie on déduit qu'il est linéaire à gauche et donc
$(\cdot/\cdot)$ est bilinéaire

- De plus $(A/A) = tr({}^tAA)$
$= \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq k\leq n}} (A_{k,i})^2 \geq 0$

Or, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls

Donc $\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq k\leq n}} (A_{k,i})^2 = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1;n]\!], \forall k \in [\![1;n]\!]\ A_{k,i}^2 = 0$

$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1;n]\!], \forall k \in [\![1,n]\!]\ A_{k,i} = 0$

Donc finalement $\boxed{\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq k\leq n}} (A_{k,i})^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0}$

Donc $(A/A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$
Par conséquent $(\cdot/\cdot)$ est défini positif et positif
On peut donc conclure :
$\boxed{(\cdot/\cdot) \text{ est bien un produit scalaire}}$

4c D'après l'inégalité de Cauchy - Schwarz dans l'espace de $M_n(\mathbb{R})$, on a :

$\langle A, B\rangle \leq \|A\|\,\|B\|$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$

On sait $\sqrt{tr({}^tAA)} = \|A\|$

Donc pour la première matrice prenons ${}^tA$ et la seconde A.
On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA \in M_n(\mathbb{R})$)

$$\langle {}^tA, A \rangle \leq \|A\| \|{}^tA\|$$

Donc

$$tr(AA) \leq \sqrt{tr({}^tAA)} \sqrt{tr({}^tAA)}$$

donc

$$tr(A^2) \leq (tr({}^tAA))^{\frac{1}{2}} (tr({}^tAA))^{\frac{1}{2}}$$

Donc finalement : $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$ $\boxed{tr(A^2) \leq tr({}^tAA)}$

De plus, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si les deux familles de vecteurs sont liées c'est à dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$A = \lambda {}^tA$ de plus si ${}^tA = A$ on a bien $tr(A^2) = tr({}^tAA)$

Autrement dit ; $tr(A^2) = tr({}^tAA) \Leftrightarrow A = {}^tA$
$\Leftrightarrow A \in S_n(\mathbb{R})$

On conclut :

$$\boxed{tr(A^2) = tr({}^tAA) \Leftrightarrow A \in S_n(\mathbb{R})}$$

5a f^* l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice ${}^tA$
$B' = (e_1', \dots e_n')$ une base orthonormée

5a On a $A = Mat(f, B_0)$ $A' = Mat(f, B')$
$P = Pass(B_0 \to B')$
$P^{-1} = Pass(B' \to B_0)$

Or a
$Mat(f, B_0) = A = Pass(B_0 \to B')\, Mat(f', B')\, Pass(B' \to B_0)$
Donc $\boxed{A = PA'P^{-1}}$

5b P est une matrice de changement de base, c'est la matrice représentative d'une base orthonormale dans une autre base orthonormale, par conséquent on peut affirmer que ses colonnes forment une base orthonormale et donc finalement :

$\boxed{P \text{ est une matrice orthogonale}}$

5c On a donc ${}^tP = P^{-1}$

Donc comme

$$A = P A' {}^tP$$

On a

$${}^tA = P\, {}^tA' {}^tP$$

donc

$${}^tP\, {}^tA\, P = {}^tA'$$

Ce qui permet finalement d'affirmer :

${}^tA'$ est la matrice de f^* dans la base B'.

En effet ${}^tA = Mat(f^*, B)$ ${}^tP = Pass(B' \to B_0)$ $P = Pass(B_0 \to B')$

Donc

$$Mat(f^*, B') = Pass(B' \to B_0)\, Mat(f^*, B)\, Pass(B_0 \to B')$$

Finalement :

$\boxed{{}^tA' \text{ est la matrice } f^* \text{ dans la base } B'}$

6a $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ $\|AX\|^2 = \langle AX, AX \rangle$

$$= {}^tX\, {}^tA\, AX$$

$\boxed{\|AX\|^2 = {}^tX({}^tAA)X}$ $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

6b Montrons $Ker(f) = Ker(f^* f)$ (on montre $Ker(M) = Ker(A)$ même si les notations sont abusives car on ne parle pas de noyau de matrice mais de noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice)

Soit $X \in Ker(A)$ donc $AX = 0$

ainsi ${}^tA\, AX = 0$

alors $X \in Ker({}^tAA)$

$\boxed{Ker(A) \subset Ker({}^tAA)}$

De plus si $X \in Ker({}^tAA)$ alors ${}^tAAX = 0$

donc ${}^tX\, {}^tA AX = 0$

ainsi $\|AX\|^2 = 0$ (6a)

or $\|AX\|^2 = 0 \iff AX = 0$ donc $X \in Ker(A)$

par conséquent $\boxed{Ker({}^tAA) \subset Ker(A)}$

Finalement on peut conclure $\boxed{Ker({}^tAA) = Ker(A)}$

Et comme M représente sf et A représente f en base canonique :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(sf)}$$

De plus, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + rg(f) = n$$
$$\dim(\mathrm{Ker}(sf)) + rg(sf) = n$$

Donc on peut conclure :

$$\boxed{rg(sf) = rg(f)}$$

6c On a $sf = f^* \circ f$ où sf est représenté par la matrice ${}^tAA$

Or a

$${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tA\,A$$

Donc ${}^t({}^tAA) = {}^tAA$ et ${}^tAA \in M_n(\mathbb{R})$

La matrice représentative de sf est donc une matrice symétrique ainsi :

$$\boxed{sf \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathbb{R}^n}$$

6d Soit λ une valeur propre de sf, par conséquent, ~~sf est~~ λ est aussi une valeur propre de la matrice ${}^tAA$, donc, il existe un vecteur X non nul tel que :

$${}^tAAX = \lambda X$$

Donc ${}^tX{}^tAAX = \lambda\,{}^tXX$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

ainsi $\boxed{\frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} = \lambda}$ (X non nul)

On peut alors conclure que

$\boxed{\lambda \geq 0}$ Les valeurs propres de ${}^tAA$ et donc de sf sont positives ou nulles

6c sf est un endomorphisme ~~diagonali~~ symétrique réel, par conséquent sf est diagonalisable et il existe alors une base orthonormale de C formée de vecteurs propres de l'endomorphisme sf.

On pose $C = (\varepsilon_1, \dots \varepsilon_i, \dots \varepsilon_n)$

On a $1 = rg(f)$, d'après le théorème du rang, on a alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n-1$, par conséquent, comme d'après 6b on a $rg(f) = rg(sf)$, on peut déduire

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(sf)) = \dim(E_0(sf)) = n-1}$$

Par conséquent, il existe $n-1$ vecteurs de la base C tel que $sf(\varepsilon_i) = 0$

De plus, d'après la formule de changement de base, il existe une matrice de passage P inversible (base $B_0 \to C$) et une matrice diagonale D (la matrice de sf dans C) tel que

$${}^tAA = PDP^{-1}$$

La matrice de sf dans C est diagonale donc elle est de la forme

$$\mathrm{Mat}_C(sf) = \begin{pmatrix} D_1 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & D_2 \end{pmatrix}$$

Or, il existe $n-1$ vecteurs tel qu'ils appartiennent au noyau de sf, donc, en plaçant les 1 premiers vecteurs de la base canonique en tant que vecteurs appartenant à l'image de sf, et les $n-1$ autres vecteurs comme des vecteurs appartenant au noyau de sf, on peut affirmer que D_1 est une matrice diagonale avec des coefficients non nuls et D_2 est la matrice nulle.

Finalement : $\boxed{Mat_C(sf) = \begin{pmatrix} D & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,r} \end{pmatrix}}$

On sait $rg(f) = r$, par conséquent il existe r vecteurs dans la base C tel qu'ils appartiennent à l'image de f. Donc, on pose $(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_r) \in Im(f) \times \dots Im(f)$, donc les r premières colonnes de la matrice représentative de f dans C sont toutes non nulles.

De fait, les $n-r$ autres vecteurs de cette base appartiennent au noyau de f, en effet d'après 6b $\boxed{Ker(f) = Ker(sf) = E_0(sf)}$ donc $(\varepsilon_{r+1}, \dots \varepsilon_n) \in Ker(f) \times \dots Ker(f)$

Donc : $\forall i \in [\![n-r ; n]\!]$, $f(\varepsilon_i) = 0$, par conséquent les $n-r$ autres colonnes de la matrice f dans la base C sont toutes nulles. De fait, les r premières colonnes sont non nulles et $n-r$ suivantes le sont.

Finalement

$$\boxed{Mat_C(f) = \begin{pmatrix} A_1 & O_{r,n-r} \\ A_3 & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix}}$$

D'après 5c, par des calculs intermédiaires on obtient ce résultat

$$\boxed{{}^tA_1 A_1 + {}^tA_3 A_3 = D}$$

7 Soit A^tA

On sait que le rang est conservé avec la transposition.

On admet $rg(f) = rg(Tf)$

D'après le théorème du rang

$$rg(f) + \dim(\ker f) = n$$
$$rg(Tf) + \dim(\ker(Tf)) = n$$

on déduit alors :

$$\boxed{\dim(\ker(f)) = \dim \ker(Tf)}$$

7b Soit $\lambda \in Sp(f)$ et $x \in E_\lambda(f)$

On a $f(x) = \lambda x$

donc $f^* \circ f(x) = \lambda x$

ainsi par composition $f \circ f^* \circ f(x) = \lambda f(x)$

donc

$$Tf \circ f(x) = \lambda f(x)$$

par conséquent $\boxed{f(x) \in E_\lambda(Tf)}$ et λ est bien valeur propre de Tf

Donc si $x \in E_\lambda(f)$ alors $f(x) \in E_\lambda(Tf)$

Par conséquent, pour tous les vecteurs propres de f, chacun composé par f appartient à $E_\lambda(Tf)$, ainsi ~~tous~~ $E_\lambda(Tf)$ possède au moins tous les éléments de $E_\lambda(f)$ ($E_\lambda(Tf)$ possède les vecteurs appartenant à $E_\lambda(f)$ composés par f)

On peut déduire

$$\boxed{\dim(E_\lambda(f)) \leq \dim(E_\lambda(Tf))}$$

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 32 | Session : 2019

Épreuve de :

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

7c On sait que sf est un endomorphisme diagonalisable et qu'il existe une base C formée de vecteurs propres de sf (6e)

Donc on a $\boxed{\sum_{\lambda \in Sp(sf)} \dim E_\lambda(sf) = n}$

D'après 7b on a alors

$$\sum_{\lambda \in Sp(sf)} \dim E_\lambda(sf) = n \leq \sum_{\lambda \in Sp(sf)} E_\lambda(\tau f) \leq n$$

On déduit

$$\boxed{\sum_{\lambda \in Sp(sf)} \dim E_\lambda(\tau f) = n}$$

Ceci permet d'affirmer que τf est bien diagonalisable et que τf possède exactement les même valeurs propres de sf

Par conséquent ces deux affirmations et le fait que $\sum_{\lambda \in Sp(sf)} \dim E_\lambda(\tau f) = \sum_{\lambda \in Sp(sf)} \dim E_\lambda(sf)$

permet de conclure :

$$\boxed{\dim(E_\lambda(sf)) = \dim(E_\lambda(\tau f))}$$

7d On peut donc affirmer qu'il existe deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres respectivement de sf et de τf (7c) (on sait que A^tA est diagonalisable car symétrique réelle) ainsi en nommant B_1 et B_2 ces bases orthonormales, on peut affirmer d'après la formule de changement de base qu'il existe une matrice Ω orthogonale (~~car~~ c'est une matrice de passage entre deux bases orthonormées, justification de 5b pour affirmer que c'est une matrice orthogonale.

On a alors

$$\boxed{A^tA = \Omega\,({}^tAA)^t\,\Omega}$$ d'après la formule de changement de base

8a $W = \{(x_1, \dots x_n) \in V \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$

W est une partie fermée en tant que ligne de niveau de la fonction φ continue sur le fermé V, $\varphi(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

(Cette fonction est continue en tant que somme de fonction polynomiale)

Donc :

W est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$

De plus, si $X \in W$, $\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 1 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in [\![1; n]\!] \end{cases}$

On déduit que

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq 1$$

Donc $\boxed{\|X\| \leq 1}$ si $X \in W$

Donc $\boxed{\text{W est une partie fermée bornée de } \mathbb{R}^n}$

8b φ est une fonction continue sur le fermé W en tant que produit de fonctions polynomiales, de plus W est un borné, on peut alors affirmer que φ admet un minimum et un maximum sur W, donc en particulier :

$\boxed{\varphi \text{ admet un maximum global sur } W}$

7c Donc $(x_1, \dots x_n) \in V \setminus U$

$\varphi(x_1, \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n \quad > 0$ car aucun des termes n'est nul et ils sont tous positifs

On a donc $\boxed{\varphi(x_1, \dots x_n) > 0}$ pour $(x_1, \dots x_n) \in V \setminus U$

8d sur U sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = 1$, φ prend soit la valeur 0 (si un seul terme est nul, en tout cas un seul terme suffit mais il peut y en avoir plusieurs) soit φ prendra valeur non nulle, et cette valeur maximale est M.

Donc $\boxed{\text{M est le maximum de } \varphi \text{ sur U sous la contrainte } x_1 + \dots + x_n = 1}$

8e Déterminons la valeur du maximum M et déterminons en quel vecteur de U il est atteint.

- U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et φ est continue sur R

La contrainte $\{x_1 + \dots + x_n = 1\}$ définit une ligne de niveau de la fonction $\psi(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Or a $\nabla \psi(x_1, \dots x_n) = (1, \dots 1) \neq 0$, la contrainte est donc non critique

Si φ admet un maximum M sur U sous la contrainte $\{x_1 + \dots + x_n = 1\}$, c'est forcemment en un point critique, tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que.

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 1 \\ \nabla \varphi(x_1, \dots x_n) = \lambda \nabla \psi(x_1, \dots x_n) \end{cases}$$

Donc on a

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 1 \\ \left(\prod_{i=2}^{n} x_i, \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} x_i, \dots \prod_{i=1}^{n-1} x_i\right) = \lambda(1, \dots 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i = \lambda \quad \forall j \in [\![1, n]\!] \end{cases}$$

On deduit que tous les $x_1, \dots x_n$ sont égaux et on obtient :

$$x_i = \frac{1}{n} \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$$

Donc $\boxed{U = \frac{1}{n}(1 \dots 1)}$

et on a

$$\varphi(U) = \left(\frac{1}{n}, \dots \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n}$$

Donc $\boxed{M = \frac{1}{n^n}}$

8f Supposons que les valeurs propres de S soient positives ou nulles $(\mu_1, \dots \mu_n)$

D'après 8e sous la contraintes $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ on a

$$\varphi(x_1, \dots x_n) \leq \frac{1}{n^n}$$

De plus on sait que si les valeurs propres de S sont toutes positives on a :

$$\mu_i \leq \mathrm{tr}(S) \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$$

Donc

$$\prod_{i=1}^{n} \mu_i \leq (\mathrm{tr}(S))^n$$

Par conséquent d'après 8e et sous la contraintes linéaires non critique $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$ (On sait que le maximum qu'atteint φ sur W est en réalité aussi le maximum qu'atteint φ sur U sous la contrainte $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$)

donc finalement :

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} \mu_i \leq \left(\frac{\mathrm{tr}\, S}{n}\right)^n}$$

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 31 | Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques BSS BCI HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8g on pose : $\forall x \in \mathbb{R}\ \Delta(x) = \prod_{i=1}^{n} (x+\lambda_i)$

D'après 8f, où $x+\lambda_i$ sont les valeurs propres de la matrice ${}^tAA + I_n x$

En effet, si $\lambda_1, \dots \lambda_n$ les valeurs propres de ${}^tAA$, on a

$${}^tAA = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donc

$$x I_n + {}^tAA = xPP^{-1} + P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} x+\lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & x+\lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donc $x I_n + {}^tAA$ est <u>semblable</u> à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1+x & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n+x \end{pmatrix}$

et ont donc <u>la même trace</u>.

En appliquant le résultat de la question 8f, on obtient finalement : (pour la matrice $xI_n + {}^tAA$)

$$\Delta(x) \leq \left(\frac{\mathrm{tr}\,(xI_n + {}^tAA)}{n} \right)^n$$

On conclut : $\forall x \geq 0$

$$\boxed{\Delta(x) \leq \left(\frac{nx + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \right)^n}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Partie III

$A \in M_n(R)$,

9a f est un projecteur de rang $r \in [\![1; n-1]\!]$

f est un projecteur, donc on a $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = R^n$

donc $\ker(f) \oplus \ker(f - id) = R^n$

Il existe donc une base de R^n formée de vecteurs propres de f, en effet on a

$E_0(f) \oplus E_1(f) = R^n$

De plus $rg(f) = r$ donc $\dim(E_1(f)) = r$

On peut choisir les r premiers vecteurs de la base de R^n comme des vecteurs appartenant à l'image de f et les $n-r$ autres vecteurs comme des vecteurs appartenant au noyau de f.

On pose D cette base avec $D = (e_1', \dots e_n')$

Donc : $\forall i \in [\![1; r]\!] \quad f(e_i) = e_i$

$\forall i \in [\![r+1; n]\!] \quad f(e_i) = 0$

D'après la formule de changement de base, il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale D (D est la matrice représentative de ce projecteur dans la nouvelle base) tel que

$A = PDP^{-1}$ (A la matrice représentative du projecteur en base canonique)

On a donc $A = P \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \overset{r \text{ fois}}{\ddots} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \underset{n-r \text{ fois}}{\ddots} \; 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

Donc

$\mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{r} 1 = r$

Or, D et A sont semblables, et deux matrices semblables ont même trace donc

$\boxed{\mathrm{tr}(A) = r}$

De plus, d'après la formule de changement de base, on obtient la matrice de f dans une nouvelle base qui est là encore semblable à D et a donc même trace.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La trace de toute matrice représentant l'endomorphisme } f \text{ est } 1}$$

<u>9b</u> f est un projecteur donc $Mat_C(f)^2 = Mat_C(f)$

Ainsi

$$Mat_C(f)\, Mat_C(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{1,n-1} \\ A_3 & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{1,n-1} \\ A_3 & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ A_1 A_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc la condition : f un projecteur impose

$$\boxed{A_1^2 = A_1}$$

De plus, $tr(Mat_C(f)) = tr(A_1)$ or d'après <u>9a</u> on peut alors conclure

$$\boxed{tr(A_1) = 1}$$

Par conséquent, les deux conditions précédentes permettent d'affirmer que $\boxed{A_1 \text{ est la matrice d'un projecteur}}$

<u>9c</u> On sait que ${}^tA_1 A_1 + {}^tA_3 A_3 = D$ (6d)
et $Mat_C(sf) = \begin{pmatrix} D & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$

On a donc $tr(Mat_C(sf)) = D$ or $D \in M_1(\mathbb{R})$

On a par linéarité de la trace : $tr({}^tA_1 A_1) + tr({}^tA_3 A_3) = tr(D)$
D'après 4c

$tr({}^tAA) = tr(D) \geq tr(A_1^2) + tr(A_3^2)$
et $A_1^2 = A_1$ donc

$$\boxed{tr({}^tAA) \geq tr(A_1)}$$

On peut alors conclure

$$\boxed{tr({}^tAA) \geqslant 1}$$

On a alors $tr(D) \geqslant 1 \times 1$ et $D \in M_r(\mathbb{R})$ où les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres non nulles de $({}^tAA)$, donc comme $D \in M_r(\mathbb{R})$ et $tr(D) \geqslant 1$, on déduit que tous les coefficients diagonaux de D sont supérieurs ou égale à 1 et donc :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres non nulles de } {}^tAA \text{ sont supérieures ou égales à } 1}$$

9d On cherche les projecteurs orthogonaux tels que $tr({}^tAA) = 1$

On sait $tr(A^2) = tr({}^tAA) \Leftarrow A \in S_n(\mathbb{R})$ (4_c)

Or, si f un projecteur orthogonal, on sait que f est un endomorphisme symétrique d'après le cours.

10a On a $f^2 = id$

Donc $A^2 = I_n$

Ainsi ${}^tAA\,A{}^tA = {}^tA\,A^2\,{}^tA = {}^tA\,{}^tA = {}^t(A^2) = I_n$

donc il existe une matrice $A{}^tA$ tel que ${}^tAA\,A{}^tA = I_n$ donc

$$\boxed{{}^tAA \text{ est inversible et } ({}^tAA)^{-1} = A{}^tA}$$

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 31 | Session : 2019

Épreuve de : Mathématiques SBSS BCI MBC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10b ^tAA est inversible donc on peut déduire que 0 n'est pas valeur propre de ^tAA car $\ker(f) = \{0\}$

Soit λ une valeur propre de ^tAA associé à un vecteur propre non nul X, on a :

$$^tAAX = \lambda X$$

donc $^tAAX = \frac{1}{\lambda}X$ en multipliant par l'inverse

donc $\boxed{^tAAX = \frac{1}{\lambda}X}$

On déduit que si λ est valeur propre de ^tAA, alors $\frac{1}{\lambda}$ l'est aussi, et ce quelque soit le vecteur propre associé.

Donc $\boxed{\dim(E_\lambda(^tAA)) = \dim E_{\frac{1}{\lambda}}(^tAA)}$

10c Soit $g(x) = x^2 - 2x + 1$, g dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et g un trinome du second degré. On a $\Delta = 4 - 4 = 0$ et donc

$\boxed{g(x) = (x-1)^2}$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ $g(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

Donc : $\boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Puis on a $g(x) = (x-1)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

donc $g(x) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

Donc $\boxed{x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1}$

10d Soit $\lambda_1, .. \lambda_n$ une liste de valeurs propre de ${}^tAA$

D'après II8 on a pour $(x=1)$ (pour ${}^tAA$ inversible)

$$\prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i) = \left(\frac{n+\lambda_1+..+\lambda_n}{n}\right)^n$$

$$\prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i) = \left(1 + \frac{\lambda_1+..+\lambda_n}{n}\right)^n$$

Or pour tout $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $\frac{\lambda_1+..+\lambda_n}{n} > 0$

donc d'après 10c on a $\left(1+\frac{\lambda_1+\dots+\lambda_n}{n}\right)^n \geqslant 2^n$ (par croissance de la fonction puissance n-ème)

On a alors :

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i) \geqslant 2^n}$$

10e On a égalité dans l'inégalité 10d si et seulement si : $\lambda_i = 1 \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$, ce qui correspond à dire les valeurs propres de ${}^tAA$ sont toutes égales à 1.

Montrons alors que cela correspond au fait que f est une symétrie orthogonale.

f une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow$ f n'admet que 1 et -1 comme valeur propre

Montrons $E_1(f) \perp E_{-1}(f)$

Partie IV

On suppose que A est inversible

11 s_f est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice ${}^tAA$
or, la matrice ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable.
il existe donc une base orthonormale ε formée de vecteurs propres de s_f, c'est à dire tel que (pour $\lambda_1, \dots \lambda_n$ les valeurs propres de s_f) on a

$$s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$$

D'après II 6d, on sait déjà que ces valeurs propres sont positives.
De plus $\quad {}^tAA\,A^{-1}\,{}^t(A^{-1}) = I_n$ donc on peut affirmer que la matrice ${}^tAA$ est inversible
De fait, on sait que $\ker(s_f) = \{0\}$ donc 0 n'est pas valeur propre de s_f, ni de ${}^tAA$.

Donc $\boxed{\lambda_1, \dots \lambda_n \text{ sont toutes strictement positives}}$

On pose $\quad v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\,\varepsilon_i \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$

$v^2(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\,v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_i}\,\varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i = s(\varepsilon_i) \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$

Donc $\boxed{v^2(\varepsilon_i) = s(\varepsilon_i) \quad \forall i \in [\![1;n]\!]}$

v^2 et sf sont donc égaux pour tous les vecteurs de la base C, on peut alors affirmer que ces endomorphismes sont égaux (~~sitant at~~ que v est bien un endomorphisme)

Montrons que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$

On sait déjà que $v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\, \varepsilon_i \in \mathbb{R}^n \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$

donc <u>v est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$</u>

$C = (\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$

On sait que $\sqrt{\lambda_i} > 0 \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$ donc les valeurs propres de v sont toutes positives strictement.

Justifions alors que v est un endomorphisme symétrique.

Pour $i \neq j$

$\langle v(\varepsilon_i), \varepsilon_j \rangle = \sqrt{\lambda_i} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle$ or $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ sont deux vecteurs orthogonaux car font partie d'une base orthonormale

Donc

$$\boxed{\langle v(\varepsilon_i), \varepsilon_j \rangle = 0 = \langle v(\varepsilon_j), \varepsilon_i \rangle}$$ pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$

Or $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on peut donc affirmer que <u>v est un endomorphisme symétrique</u>

Donc $\boxed{v \in S^+(\mathbb{R}^n) \quad v^2 = sf}$

<u>12</u> $w \in S^+(\mathbb{R}^n) \quad w^2 = sf$

Soit $x \in E_\mu(w)$ on a

$w(x) = \mu(x)$

$w^2(x) = \mu\, w(x)$

$sf(x) = \mu^2 x \qquad$ ainsi $x \in E_{\mu^2}(sf)$

Donc $\boxed{E_\mu(w) \subset E_{\mu^2}(sf)}$

Il existe une base orthonormale de C tel que $w(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\, \varepsilon_i$ (11) donc il existe une base orthonormale de C formée de vecteurs propres de w, par conséquent w est diagonalisable et ses valeurs propres sont $\sqrt{\lambda_1}, \dots \sqrt{\lambda_n}$

Donc

$$\boxed{Sp(w) = \{\sqrt{\lambda} \,;\, \lambda \in Sp(sf)\}}$$

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 31 | Session : 2019

Épreuve de :

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

De plus, on a $n = \sum_{\mu \in Sp(w)} \dim(E_\mu(w)) = \sum_{\mu^2 \in Sp(sf)} \dim(E_{\mu^2}(sf))$

On sait que les valeurs propres de sf sont bien strictement positives (donc $\sqrt{\mu}$ existe)

On déduit $\boxed{\dim(E_{\sqrt{\mu}}(w)) = \dim(E_\mu(sf)) \quad \forall \mu \in Sp(sf)}$

et $E_\mu(w) \subset E_{\mu^2}(sf)$, on peut donc déduire

$\boxed{E_\mu(w) = E_{\mu^2}(sf) \quad \forall \mu \in Sp(sf)}$

13 D'après 12, on a montré qu'il existait un endomorphisme diagonalisable v tel que $v^2 = sf$, $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ ($\sqrt{\lambda} > 0 \quad \forall \lambda \in Sp(sf)$), tel qu'il existait une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de v ($(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$ est cette base) (c'est aussi une famille de vecteurs propres pour sf)
Par conséquent, étant une base de vecteurs propres de v, on peut affirmer que v est diagonale dans cette base
Par conséquent, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de sf, comme les vecteurs propres de sf sont ceux de v, on peut donc conclure que :

$\boxed{\text{v est diagonale dans cette base}}$

- Justifions l'unicité de v.
Soit ρ vérifiant les caractéristiques de v
On aurait $\rho(\varepsilon_i) - v(\varepsilon_i) = 0 \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$
donc $\rho(\varepsilon_i) = v(\varepsilon_i) \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$

Donc les endomorphismes ρ et v sont égaux sur la base C, on peut donc déduire que $\rho = v$

Ainsi $\boxed{\begin{array}{l} v \text{ est unique tel que } v \in S^+(\mathbb{R}) \\ \qquad v^2 = sf \\ \text{la matrice de } v \text{ est diagonale dans toute} \\ \text{base de vecteurs propres de } sf \end{array}}$

14 Soit $P = \sqrt{{}^tA\,A}$

On a $P^2 = {}^tA\,A$

${}^tA A$ est diagonalisable (déjà justifié précédemment) donc semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_i > 0 \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$

et ${}^tA A = Q D Q^{-1} \quad (Q^{-1} = {}^tQ)$

On posant $P = Q \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} Q^{-1}$

On a $\boxed{P^2 = {}^tA\,A}$

$\boxed{{}^tP = P} \qquad P \in S_n(\mathbb{R})$

De plus $\sqrt{\lambda_i} > 0 \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$ donc les valeurs propres de P sont toutes strictement positives et on a alors

$\boxed{P = \sqrt{{}^tA A} \in S_n^+(\mathbb{R})}$

$\boxed{\begin{array}{c} \text{D'après } \underline{13}\text{, on peut alors affirmer qu'il existe une unique matrice} \\ \sqrt{{}^tAA} \text{ tel que } \sqrt{{}^tAA} \in S_n^+(\mathbb{R}) \text{ et } (\sqrt{{}^tAA})^2 = {}^tA A \end{array}}$

15 On sait que $({}^tAA)$ est inversible donc $({}^tAA)^{-1}$ existe

$\boxed{\left(\left(A\sqrt{{}^tAA}\right)^{-1}\right)^{-1} = \sqrt{{}^tAA}\,A^{-1} = {}^t\left(A\left(\sqrt{{}^tAA}\right)^{-1}\right)}$

Partie V $\quad O_n$: l'ensemble des matrices orthogonales

$$d(M) = \inf_{V \in O_n(\mathbb{R})} \| M - V \|_2$$

16. On a $d(M) = \inf_{V \in O_n(\mathbb{R})} \|M - V\|_2 = \| M - p_{O_n(\mathbb{R})}(M) \|_2$

Le projecteur orthogonal d'une matrice inversible sur l'ensemble des matrices orthogonales existe, par conséquent $\boxed{d(M) \text{ est bien définie}}$

17. $R \in O_n(\mathbb{R})$, $\forall N \in M_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|RN\|_2 &= \sqrt{\mathrm{tr}({}^t(RN) RN)} \\ &= \sqrt{\mathrm{tr}({}^tN {}^tR R N)} \\ &= \sqrt{\mathrm{tr}({}^tN N)} \\ &= \|N\|^2 \end{aligned}$$

$\|NR\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}({}^t(NR) NR)} = \|RN\|_2$ par bilinéarité du produit scalaire

$$\boxed{\forall N \in M_n(\mathbb{R}) \quad \|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2}$$

Montrons que ces applications sont injectives.

$\phi_1 : V \to VR^{-1}$ $\quad \phi_2 : V \to R^{-1}V$

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 31 | Session : 2019

Épreuve de :

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

19 $W = \frac{1}{2}(V + {}^tV)$

19a ${}^tW = \frac{1}{2}({}^tV + V) = W$

W est symétrique réelle donc W est diagonalisable

19b $\langle w(x)/x\rangle = \langle WX/X\rangle$
$= {}^tX\, {}^tW X$
$= {}^tX\left(\frac{1}{2}(V + {}^tV)\right)X$
$= \frac{1}{2}({}^tX V X) + \frac{1}{2}\, {}^tX {}^tV X$
$= \frac{1}{2}\langle X, VX\rangle + \frac{1}{2}\langle VX, X\rangle$
$= \langle VX, X\rangle$ par bilinéarité du produit scalaire

Donc

$$\boxed{\langle w(x)/x\rangle = \langle v(x)/x\rangle}$$

$\|v(x)\| = \langle VX, VX\rangle = {}^tX {}^tV V X = {}^tX X$ car $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
$= \|X\|$

donc $\boxed{\|v(x)\| = \|x\|}$

Donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$|\langle w(x)/x\rangle| = |\langle v(x)/x\rangle| \leqslant \|v(x)\|\,\|x\| = \|x\|^2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Donc $\boxed{|\langle W(x) / x \rangle| \leqslant \|x\|^2}$

Donc $\langle x - W(x) / x \rangle = \|x\|^2 - \langle W(x) / x \rangle$

$\geqslant \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0$

Donc :

$\boxed{\langle x - W(x) / x \rangle \geqslant 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

13c Montrons que les valeurs propres de $I_n - W$ sont positives ou nulles

Soit X un vecteur propre de $I_n - W$ associé à une valeur propre λ. (X normal)

On a $(I_n - W)X = \lambda X$

Donc

$^tX (I_n - W_n) X = \lambda \|X\|^2$

On a alors $\lambda = \dfrac{\langle X - WX / X \rangle}{\|X\|^2} \geqslant 0$ d'après 13b

on peut alors conclure $\lambda \geqslant 0$

Donc : $\boxed{\text{les valeurs propres de } I_n - W \text{ sont positives ou nulles}}$

13d Pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $(1, \ldots 0) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - W \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \geqslant 0$ d'après 13b

~~On a~~ $\cancel{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - W \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \middle\backslash \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \geqslant 0}$

Donc, pour $X_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

On a $^tX_j (X_j - W X_j) \geqslant 0$ d'après 13b

Cela revient à écrire

$(1 - w_{j,j}) \geqslant 0$

Ceci étant vrai quelque soit $j \in [\![1 ; n]\!]$, on peut finalement affirmer :

$\forall i \in [\![1 ; n]\!]$ $\boxed{1 - w_{i,i} \geqslant 0}$

19e Si $W = I_n$, alors $w_{i,i} = 1 \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$

Si $w_{i,i} = 1 \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$
alors on peut déduire que les valeurs propres de la matrices
$I_n - W$ sont toutes nulles, car $I_n - W$ est une matrice
symétrique réelle donc diagonalisable.
Par conséquent, la matrice $I_n - W$ est semblable à la matrice
nulle (car toutes ses valeurs propres sont nulles) donc $I_n - W$ est la
matrice nulle donc

$$\boxed{I_n = W}$$

On peut donc conclure : $\boxed{\forall i \in [\![1;n]\!] \ w_{i,i} = 1 \iff W = I_n}$

20 a

/