MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2013

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Partie I - Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

On considère l'application $g: \ [0;1] \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0;1]$, par :

$$g(t) = \begin{cases} -t\ln t & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. La fonction g est d'abord continue sur $]0;1]$, comme produit de fonctions de référence continues sur cet intervalle.
De plus : $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ par croissances comparées, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = 0 = g(0)$, ce qui prouve que g est aussi continue en 0.
Finalement, g est continue sur $[0;1]$.

2. Soit $x \in]0;1[$, on pose :

$$\begin{aligned} u(t) = \ln t \quad &\longrightarrow \quad u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = -t \quad &\longrightarrow \quad v(t) = -\frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1]$, donc d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_x^1 g(t)\mathrm{d}t &= \left[-\frac{t^2}{2}\ln t\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{1}{t}.\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{1}{2}.x^2\ln x + \frac{1}{2}\int_x^1 t\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}.x^2\ln x + \frac{1}{2}.\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 \boxed{= \frac{1}{2}.x^2\ln x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}.x^2} \end{aligned}$$

3. Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures :
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2.\ln x = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{4}.x^2 = 0$, donc :
$\lim\limits_{x\to 0^+} \int_x^1 g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$, ce qui exprime bien que $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$

Partie II - Exemple de densité

On considère l'application $f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} -t\ln t + t^{1/3} & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. La fonction f est évidemment continue sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]1;+\infty[$ comme fonction constante (nulle), elle est également continue sur $]0;1[$ comme somme et produit de fonctions de référence continues sur cet intervalle.

$\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0$ comme on l'a déjà dit, et $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{1/3} = \lim\limits_{t\to 0^+} e^{\frac{1}{3}\ln t} = 0$ puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{3}\ln t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$.

Ainsi : $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0 = f(0) = \lim\limits_{t\to 0^-} f(t)$, donc f est aussi continue en 0 ; par conséquent, elle est continue sur tout l'intervalle $]-\infty;1[$.

$\lim\limits_{t\to 1^-} t\ln t = 1\times 0 = 0$, et $\lim\limits_{t\to 1^-} t^{1/3} = \lim\limits_{t\to 1^-} e^{\frac{1}{3}\ln t} = e^0 = 1$, donc $\lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$.
La fonction f n'est donc pas continue en 1.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge, puisque f est nulle en-dehors de $]0;1[$.

On a déjà vu que $\displaystyle\int_0^1 -t\ln t\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{4}$.

Pour tout $x\in]0;1]$: $\displaystyle\int_x^1 t^{1/3}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1/3+1}}{1/3+1}\right]_x^1 = \frac{3}{4}.\left[1-x^{4/3}\right] \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{3}{4}$, donc $\displaystyle\int_0^1 t^{1/3}\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{3}{4}$.

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge, et vaut :
$\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 -t\ln t\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{1/3}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}+\frac{3}{4}$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

3.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en un seul point : $x=1$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
- Sur $]-\infty;0]$ et $[1;+\infty[$, f est nulle donc positive, et pour tout $t\in]0;1[$: $\ln t$ étant négatif, $-t\ln t>0$, de plus $t^{1/3}>0$ donc par somme de réels positifs, $f(t)>0$.
  Ainsi, f est positive sur tout $\mathbb{R}$.

Ces trois propriétés font bien de f une densité de probabilité.

4. a. La fonction f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;1[$ comme somme et produit de fonctions de référence, de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle.

$\forall t\in]0;1[,\ f'(t) = -\ln t - t.\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{3}.t^{1/3-1} = -\ln(t) - 1 + \dfrac{1}{3}.t^{-2/3}$.

$\forall t\in]0;1[,\ f''(t) = -\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{3}.\left(-\dfrac{2}{3}\right).t^{-2/3-1} = -\dfrac{1}{t} - \dfrac{2}{9}.\dfrac{1}{t^{5/3}}$.

b. Sur l'intervalle $]0;1[$, on a clairement $f''(t)<0$, donc f' est une fonction continue (car f est de classe $\mathcal{C}^2$), strictement décroissante sur $]0;1[$.
De plus, $\lim\limits_{t\to 0^+} -\ln t = +\infty = \lim\limits_{t\to 0^+} t^{-2/3}$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f'(t) = +\infty$,
et $\lim\limits_{t\to 1^-} f'(t) = 0 - 1 + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{3} < 0$, donc f' change de signe sur $]0;1[$.
Cest trois hypothèses et le *théorème de la bijection*, permettent d'affirmer que l'équation $f'(t)=0$ admet une unique solution α sur $]0;1[$.
Comme de plus : $f'(\frac{1}{e}) = f'(e^{-1}) = -\ln e^{-1} + \dfrac{1}{3}.e^{-\frac{2}{3}.\ln(e^{-1})} = 1 + \dfrac{1}{3}.e^{2/3} > 0$, alors $f'(e^{-1}) > 0 = f'(\alpha)$, ce qui entraîne : $e^{-1}<\alpha$ par stricte décroissance de f' sur $]0;1[$, et donne bien : $\dfrac{1}{e}<\alpha<1$.

c. L'encadrement précédent fournit l'intervalle de départ $\left[\frac{1}{e};1\right]$ pour l'algorithme de dichotomie :

```
function y=fprime(t)
    y=-log(t)-1+t^(-2/3)/3
endfunction

a=exp(-1); b=1;
err=b-a; eps = 1e-3
while err > eps
    m=(a+b)/2
    if fprime(a)*fprime(b)>0 then
        a=m
    else
        b=m
    end
    err = err/2
end
disp('une valeur approchée de alpha à 10^(-3) près est '+string((a+b)/2))
```

À l'exécution, l'algorithme retourne la valeur approchée : $\alpha \approx 0.525$ à 10^{-3} près

Partie III - Calcul d'une fonction de répartition

On admet qu'il existe une variable aléatoire réelle X ayant f pour densité (l'application f a été définie au début de la partie II) et on note F la fonction de répartition de X.

1. Soit $x \in]0;1]$. Grâce aux calculs précédents, on peut écrire :

$$\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_x^1 -t\ln t\mathrm{d}t + \int_x^1 t^{1/3}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.x^2\ln x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}.x^2 + \frac{3}{4}.\left(1 - x^{4/3}\right) = 1 + \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}.x^2 - \frac{3}{4}.x^{4/3}.$$

2. La densité f étant nulle sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$, on a donc $X(\Omega) \subset [0;1]$ et on peut déjà écrire :

$\forall x \in]-\infty;0],\ F(x) = 0$ et $\forall x \in [1;+\infty[,\ F(x) = 1$.
Pour tout $x \in]0;1[$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}.x^2 - \frac{1}{2}x^2.\ln x + \frac{3}{4}.x^{4/3}$$

d'après les calculs précédents.

3. La fonction de répartition n'a pas ici une expression simple... il était donc principalement attendu ici, de donner une allure de sa courbe représentative cohérente avec ses propriétés connues :
F est continue sur $\mathbb{R}$, nulle ici sur $]-\infty;0]$, strictement croissante sur $]0;1[$, égale à 1 sur $[1;+\infty[$.

Partie IV - Étude d'extrémum local pour une fonction de deux variables réelles

On note D l'ensemble des couples (x,y) appartenant à $]0;+\infty[^2$ tels que : $x+y<1$ et $2x<1$.
On considère l'application $G:\ D \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert D, définie, pour tout $(x,y) \in D$, par :

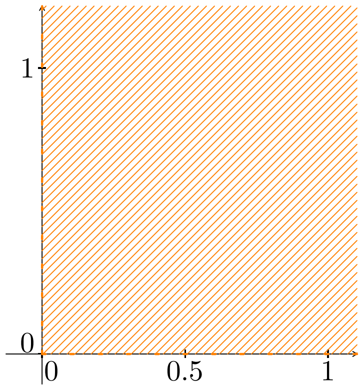
$$G(x,y) = f(x+y) - \frac{1}{2}.f(2x)$$

l'application f ayant été définie au début de la partie II.

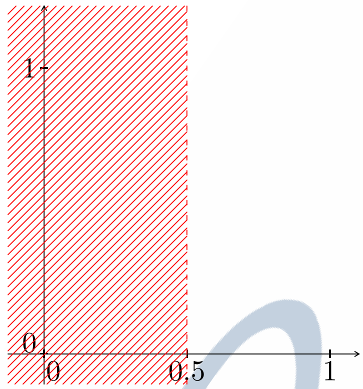
1. L'ensemble D est déjà constitué de points $M(x,y)$ dont les deux coordonnées sont strictement positives, on se restreint donc au quart de plan supérieur droit.

En écrivant les équivalences : $\quad x+y<1 \iff y<1-x$ et $2x<1 \iff x<1/2$, on trace ensuite les droites d'équations $y=1-x$ et $x=\dfrac{1}{2}$, qui délimitent chacune deux demi-plans.

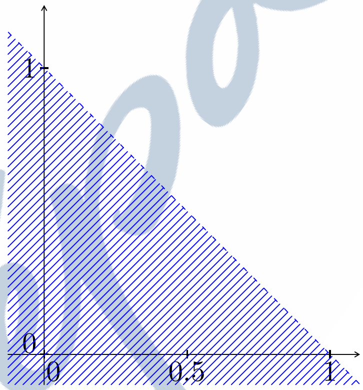
On identifie auxquels correspondent $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ x+y<1\}$ et $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ 2x<1\}$ en constatant par exemple, que l'origine $O(0,0)$ appartient à chacun d'entre eux :



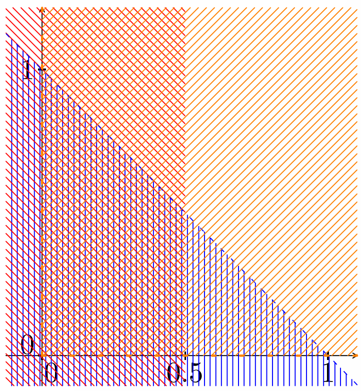
$]0;+\infty[^2$



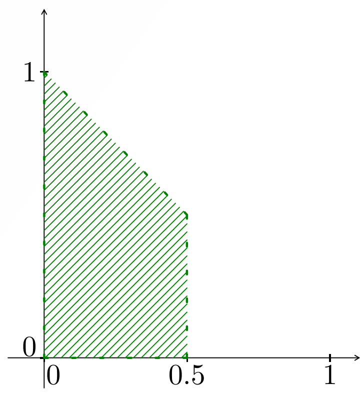
$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big|\ x<1/2\big\}$



$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big|\ x+y<1\big\}$



L'ensemble D est alors l'intersection de ces trois domaines, soit :



2. La fonction G est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, puisque $(x,y)\mapsto x+y$ et $(x,y)\mapsto 2x$ sont deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur D, à valeurs dans $]0;1[$, f étant aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;1[$.

Pour tout couple $(x,y)\in D$:

$$\partial_1(G)(x,y) = 1.f'(x+y) - \frac{1}{2}.2.f'(2x) = f'(x+y) - f'(2x)$$

$$\partial_2(G)(x,y) = 1.f'(x+y) + 0 = f'(x+y)$$

3. $M(x_0,y_0)$ est un point critique de G si et seulement si :

$$\begin{cases}\partial_1(G)(x_0,y_0)=0\\ \partial_2(G)(x_0,y_0)=0\end{cases} \iff \begin{cases}f'(x+y)-f'(2x) &=0\\ f'(x+y) &=0\end{cases} \iff \begin{cases}f'(x+y) &=0\\ f'(2x) &=0\end{cases}.$$

4. On sait par définition que, pour tout couple $(x,y)\in D$, $0<x+y<1$ et $0<2x<1$.

D'après la question 4.a) de la partie II, on peut donc dire que, pour $(x,y)\in D$:

$$\begin{cases}f'(x+y) &=0\\ f'(2x) &=0\end{cases} \iff \begin{cases}x+y &=\alpha\\ 2x &=\alpha\end{cases} \iff \begin{cases}x &=\dfrac{\alpha}{2}\\ y &=\dfrac{\alpha}{2}\end{cases},$$

et G admet bien pour seul point critique, le point $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$.

5. Pour savoir si cet unique point critique est un extrémum local, on calcule les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction G, de classe C^2 sur l'ouvert D :

$$\forall (x,y) \in D, \quad \partial^2_{1,1}(G)(x,y) = 1.f''(x+y) - 2f''(2x),$$

$$\partial^2_{2,2}(G)(x,y) = 1.f''(x+y),$$

$$\partial^2_{1,2}(G)(x,y) = \partial^2_{2,1}(G)(x,y) = 1.f''(x+y) - 0 \quad \text{d'après le théorème de Schwarz}$$

La Hessienne de G au point critique $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$ est donc :

$$H = \begin{pmatrix} -f''(\alpha) & f''(\alpha) \\ f''(\alpha) & f''(\alpha) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de H sont les réels λ tels que $H - \lambda.I_2$ est non-inversible ; comme c'est une matrice carrée d'ordre 2, cela revient à chercher les réels λ tels que :

$$\det(H - \lambda.I_2) = 0 \iff (-f''(\alpha) - \lambda)(f''(\alpha) - \lambda) - [f''(\alpha)]^2 = 0 \iff \lambda^2 - 2[f''(\alpha)]^2 = 0$$

La Hessienne H admet donc les deux valeurs propres opposées : $\lambda_1 = \sqrt{2}.f''(\alpha)$ et $\lambda_2 = -\sqrt{2}.f''(\alpha)$. Comme f'' est strictement négative sur $]0,1[$, on peut en déduire que H admet deux valeurs propres de signes opposés :

On conclut donc que G n'admet pas d'extrémum en $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$, mais un point col ; elle n'admet donc pas d'extrémum du tout sur l'ouvert D.

Exercice 2

Dans cet exercice, on note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est clairement symétrique à coefficients réels : par conséquent, elle est diagonalisable d'après le théorème du cours.

2. On peut chercher la réduite de Gauss de la matrice $A - \lambda.I_4$, on peut aussi directement trouver les valeurs propres en devinant les vecteurs propres associés ; on constate ainsi que :
$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que 2 est valeur propre de A avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur propre associé.
De même, $A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que les réels $-2, 1$ et -1 sont aussi valeurs propres de A.
Or $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et on vient de lui trouver 4 valeurs propres distinctes : d'après le critère *suffisant*, il n'y a pas d'autre valeur propre pour A : $\text{Sp}(A) = \{-2, -1, 1, 2\}$, et les 4 sous-espaces propres sont

dans ce cas, tous de dimension 1. Comme on dispose pour chacun d'un vecteur propre, il forme à chaque fois une base de l'espace, c'est-à-dire que :

$$E_{-2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right),\ E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right),\ E_{1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right),\ E_{2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

3. Les 4 vecteurs propres précédents étant associés à des valeurs propres distinctes, ils forment une famille libre de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$: c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$, et A est semblable à la matrice

$$D = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

via la *formule de changement de base* : $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

On a bien respecté ici les conditions de l'énoncé pour les matrices D (diagonales à coefficients diagonaux - les valeurs propres ! - rangés dans l'ordre croissant) et P (matrice inversible - car c'est une matrice de passage - à coefficients diagonaux tous égaux à 1).

Le calcul par la méthode de Gauss donne : $P^{-1} = \dfrac{1}{2}.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Remarque : en fait, $P^{-1} = \dfrac{1}{2}.\,{}^tP$...

On appelle *commutant* de A, et on note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

On appelle *commutant* de D, et on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $DN = ND$.

4. C_A est d'abord une partie non vide de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, puisque la matrice nulle commute évidemment avec A ($A.0_4 = 0_4 = 0_4.A$).
Remarquons aussi que I_4, A et plus généralement toute puissance de A, commute avec A !!
Soient maintenant M et M' deux matrices de C_A, et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel quelconque.
Alors : $A(\lambda.M + M') = \lambda.AM + AM' = \lambda.MA + M'A = (\lambda.M + M')A$, donc $\lambda.M + M'$ appartient à C_A, ce qui prouve que cet ensemble est stable par combinaison linéaire : c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Selon la suite d'équivalence très classique :
$M \in C_A \iff AM = MA \iff P^{-1}AMP = P^{-1}MAP \iff DP^{-1}PN = NP^{-1}PD$
$\iff DN = ND \iff N \in C_D$, puisque :
$A = PDP^{-1} \iff AP = PDP^{-1}P = PD$ et aussi $P^{-1}A = P^{-1}PDP^{-1} = DP^{-1}$.
De même, $N = P^{-1}MP$ donne $PN = MP$ et $NP^{-1} = P^{-1}M$.

6. On détermine ici le commutant C_D en partant d'une matrice quelconque $D = \begin{pmatrix}a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ i & j & k & l\\ m & n & o & p\end{pmatrix}$, et en écrivant l'équation :

$$DN = ND \iff \begin{pmatrix}-2a & -2b & -2c & -2d\\ -e & -f & -g & -h\\ i & j & k & l\\ 2m & 2n & 2o & 2p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2a & -b & c & 2d\\ -2e & -f & g & 2h\\ -2i & -j & k & 2l\\ -2m & -n & o & 2p\end{pmatrix}.$$

L'identification des coefficients donne alors : $-2a = -2a$ qui est toujours vrai, a est donc variable libre, puis $-2b = -b \iff -b = 0 \iff b = 0$, puis $-2c = c \iff -3c = 0 \iff c = 0$, et ainsi de suite : à chaque fois que le coefficient de l'inconnue diffère entre DN et ND, celle-ci est nulle.

Tous comptes faits, les matrices qui commutent avec D sont de la forme : $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$, ce sont donc les matrices diagonales de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Remarque : il faut bien résoudre complètement l'équation matricielle, il n'est pas du tout évident que le commutant d'une matrice diagonale D est l'ensemble des matrices diagonales. En fait, ce n'est vrai *que* si les coefficients diagonaux de D sont tous distincts deux à deux !

7. Reprenons l'enchaînement des questions précédentes :
$\star$ une matrice M appartient à C_A si et seulement si $N = P^{-1}MP$ appartient à C_D.
$\star$ une matrice N appartient à C_D si et seulement si elle est diagonale.
$\star$ La relation : $N = P^{-1}MP$ étant équivalente à : $M = PNP^{-1}$, on en déduit que l'ensemble C_A est constitué des matrices :

$$M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a+p}{2} & 0 & 0 & \frac{-a+p}{2} \\ 0 & \frac{f+k}{2} & \frac{-f+k}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-f+k}{2} & \frac{f+k}{2} & 0 \\ \frac{-a+p}{2} & 0 & 0 & \frac{a+p}{2} \end{pmatrix}$$ où a, f, k, p sont des réels quelconques.

Les matrices de C_A sont bien toute de la forme : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Réciproquement, toute matrice de cette forme avec a, b, c, d réels quelconques, appartiennent bien à C_A comme le prouve un calcul direct.

8. L'écriture : $C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} |(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$ permet d'écrire :

$$C_A = \left\{ a. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

qui prouve que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$ est génératrice de C_A.

Et comme :

$$a. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_4 \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0_4$$

$\iff \quad a = b = c = d = 0$, la famille génératrice est aussi libre, donc une base de C_A, et : $\boxed{\dim(C_A) = 4}$.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1;n]\!]$ un entier fixé : puisque X_i compte le nombre de fois où on obtient la boule i dans la répétition de k épreuves de Bernoulli (tirages d'une boule) identiques et indépendantes (car les tirages se font avec remise), cette variable aléatoire suit une loi **binomiale** de paramètres k et $\dfrac{1}{n}$ qui est la probabilité de succés (tirer la boule i).

Ainsi, $X_i(\Omega) = [\![0;k]\!]$, et $\forall \ell \in [\![0;k]\!],\ P(X_i = \ell)\binom{k}{\ell}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\ell}.\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-\ell}.$

De plus, d'après le cours : $\boxed{E(X_i) = k.\dfrac{1}{n} = \dfrac{k}{n}}$, et $\boxed{V(X_i) = k.\dfrac{1}{n}.\dfrac{n-1}{n} = \dfrac{k(n-1)}{n^2}}$.

2. Bien entendu, pour i et j deux entiers distincts de $[\![1;n]\!]$, les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes, puisque plus on obtient la boule i, moins on obtient la boule j...
On le voit en écrivant que : $P([X_i = k] \cap [X_j = k]) = 0$ (en k tirages, on ne peut pas obtenir $2k$ numéros), alors que $P([X_i = k]) \times P([X_j = k]) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^k.\left(\dfrac{1}{n}\right)^k = \dfrac{1}{n^{2k}} \neq 0$.

3. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$.

a) La variable aléatoire somme $X_i + X_j$ compte, au final, le nombre d'obtentions d'une boule qui porte soit le numéro i, soit le numéro j. On est donc une fois de plus dans le cas d'une répétion d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, où le succès est cette fois de probabilité $\dfrac{2}{n}$, et où $X_i + X_j$ compte le nombre de succès en k épreuves.
Ainsi : $X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}(k, \dfrac{2}{n})$, avec : $V(X_i + X_j) = k.\dfrac{2}{n}.\dfrac{n-2}{n} = \dfrac{2k(n-2)}{n^2}$.
<u>Remarque</u> : on vérifie ici que $V(X_i + X_j) \neq V(X_i) + V(X_j)$, ce qui confirme que ces deux v.a.r. ne sont pas indépendantes.

b) On rappelle la formule : $V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2.\text{cov}(X_i, X_j)$, qui donne :
$\text{cov}(X_i, X_j) = \dfrac{1}{2}\big(V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j)\big) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2k(n-2)}{n^2} - 2.\dfrac{k(n-1)}{n^2}\right)\boxed{= \dfrac{-k}{n^2}}$.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $E(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

1. Avec un seul tirage, on a forcément obtenu un numéro et un seul, donc Z_1 est la variable constante égale à 1 : $P(Z_1 = 1)$ et $E(Z_1) = 1$.
En deux tirages, on a pu : tirer deux numéros distincts, ou tirer deux fois le même numéro.
Donc $Z_2(\Omega) = \{1;2\}$, et :
$P(Z_2 = 1) = \dfrac{n.1}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ (n possibilités pour le premier numéro, une seule ensuite pour le deuxième),
d'où $P(Z_2 = 2) = 1 - P(Z_2 = 1) = \dfrac{n-1}{n}$.
$E(Z_2) = 1.P(Z_2 = 1) + 2.P(Z_2 = 2) = \dfrac{1}{n} + 2.\dfrac{n-1}{n}\boxed{= \dfrac{2n-1}{n}}$.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

   a) L'univers des possibles, lors de k tirages avec remise dans l'urne $\mathcal{U}$, est l'ensemble des k-listes de numéros de $[\![1;n]\!]$: $\text{Card}(\Omega) = n^k$.
   L'événement $[Z_k = 1]$ est réalisé si et seulement si on tire k fois le même numéro : il y a n possibilités pour le premier numéro tiré, tous les suivants doivent être le même : $\text{Card}([Z_k = 1]) = n$.

   D'où : $P(Z_k = 1) = \dfrac{n}{n^k} \boxed{= \dfrac{1}{n^{k-1}}}$.

   L'événement $[Z_k = k]$ est, par contre, réalisé si et seulement si les k tirages ont donné des numéros tous différents :
   on remarque d'abord que c'est impossible si $k > n$, car il n'y a alors pas assez de numéros différents dans l'urne !
   Si $k \leqslant n$: un cas favorable à $[Z_k = k]$ est une k-liste d'éléments distincts de $[\![1;n]\!]$, c'est-à-dire un arrangement d'ordre k : $\mathcal{C}\dashv\nabla\lceil([Z_k = k]) = A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Ainsi :

   $$P([Z_k = k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dfrac{n!}{(n-k)!n^k} = \dfrac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}} & \text{si } k \leqslant n \end{cases}.$$

   b) Soit $\ell \in [\![1;n]\!]$:
   Pour que l'événement : $[Z_{k+1} = \ell]$ soit réalisé, c'est-à-dire qu'on ait obtenu ℓ numéros distincts en $k+1$ tirages, il y a deux situations possibles lorsqu'on fait le bilan après k tirages (un tirage de moins donc) :

   - soit les k premiers tirages ont déjà fait apparaître ℓ numéros distincts : événement $[Z_k = \ell]$, dans ce cas le $(k+1)$-ième tirage ne doit aps fait apparaître un nouveau numéro, et doit plutôt reprendre l'un des ℓ numéros déjà tirés.
   - Soit les k premiers tirages n'ont donné que $\ell - 1$ numéros distincts : événement $[Z_k = \ell - 1]$, et il faut que le $(k+1)$-ième tirage fasse apparaître un nouveau numéro encore jamais obtenu, donc pris parmi $n - (\ell - 1) = n - \ell + 1$ numéros possibles.

   Avec des événements, cela s'écrit : $[Z_{k+1} = \ell] = ([Z_k = \ell] \cap [Z_{k+1} = \ell]) \cup ([Z_k = \ell - 1] \cap [Z_{k+1} = \ell])$.
   Lorsqu'on passe aux probabilités : les deux événements dont $[Z_{k+1} = \ell]$ est la réunion, étant incompatibles :

   $$\begin{aligned} P(Z_{k+1} = \ell) &= P([Z_k = \ell] \cap [Z_{k+1} = \ell]) + P([Z_k = \ell - 1] \cap [Z_{k+1} = \ell]) \\ &= P(Z_k = \ell).P_{[Z_k = \ell]}(Z_{k+1} = \ell) + P(Z_k = \ell - 1).P_{[Z_k = \ell - 1]}(Z_{k+1} = \ell) \\ &= \frac{\ell}{n}.P(Z_k = \ell) + \frac{n - \ell + 1}{n}.P(Z_k = \ell - 1) \end{aligned}$$

   c) On utilise la relation précédente pour en déduire une relation entre $E(Z_{k+1})$ et $E(Z_k)$; sachant que : $Z_{k+1}(\Omega)$ et $Z_k(\Omega)$ sont inclus dans $[\![1,n]\!]$ (plus précisément : $Z_k(\Omega) = [\![1; \min(k,n)]\!]$), on peut toujours écrire :

   $$\begin{aligned} E(Z_{k+1}) &= \sum_{\ell=1}^{n} \ell.P(Z_{k+1} = \ell) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell.\left[\frac{\ell}{n}.P(Z_k = \ell) + \frac{n - \ell + 1}{n}.P(Z_k = \ell - 1)\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \ell^2.P(Z_k = \ell) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell(n - \ell + 1)}{n}.P(Z_k = \ell - 1) \\ &\overset{[j = \ell - 1]}{=} \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \ell^2.P(Z_k = \ell) + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)(n-j).P(Z_k = j) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \ell^2.P(Z_k=\ell) + \frac{1}{n}.\sum_{j=\cancel{0}1}^{n}(j+1)(n-j)P(Z_k=j) - \frac{1}{n}.(n+1)(n-n).P(Z_k=n)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left[\ell^2+(\ell+1)(n-\ell)\right]P(Z_k=\ell) = \frac{1}{n}.\sum_{\ell=1}^{n}\left[\ell^2+n\ell-\ell^2+n-\ell\right]P(Z_k=\ell)$$

$$= \frac{1}{n}.\sum_{\ell=1}^{n}[(n-1)\ell+n].P(Z_k=\ell) = \frac{n-1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\ell.P(Z_k=\ell)+\sum_{\ell=1}^{n}P(Z_k=\ell)$$

On retrouve bien : $\boxed{E(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}E(Z_k)+1}$; noter le regroupement des deux sommes, après avoir compensé le terme manquant pour $j=n$, qui s'avère au final nul, tout comme $P(Z_k=0)$.

3. a) Pour tout entier naturel k, on pose $v_k = E(Z_k)-n$ (n est toujours fixé dans cet exercice) :
$\forall k \geqslant 1,\ v_{k+1} = E(Z_{k+1})-n = \frac{n-1}{n}E(Z_k)+1-n = \frac{n-1}{n}.(v_k+n)+1-n = \frac{n-1}{n}v_k+n-1+1-n$,
ie : $\boxed{\forall k \geqslant 1,\ v_{k+1} = \frac{n-1}{n}.v_k}$. La suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ est donc géométrique, de raison $q = \frac{n-1}{n}$ (bien constante !), et de premier terme : $v_1 = E(Z_1)-n = 1-n$.
On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $v_k = (1-n).\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$, et puisque $v_k = E(Z_k)-n$:
$$E(Z_k) = n+v_k = n+(1-n)\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\times\frac{n}{n-1} = n-n.\left(\frac{n-1}{n}\right)^k \boxed{= n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)}$$

Partie III

On suppose maintenant que $n=4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient quatre boules numérotées de 1 à 4. Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

1. Pour $n=4$, on a alors $P(Z_k=1) = \frac{1}{4^{k-1}}$ d'après les calculs de la partie II.
Évidemment, avec 4 boules dans l'urne, on ne peut pas obtenir 5 numéros différents ou plus, quel que soit le nombre de tirages : $P(Z_k\geqslant 5)=0$.

2. Il faut ici dénombrer soigneusement les issues possibles, et les cas favorables à l'événement $[Z_k=2]$, réalisé si et seulement si les k tirages ont fait apparaître deux numéros distincts exactement, ni plus, ni moins :

• En k tirages avec remises, il y a $\text{Card}(\Omega)=4^k$ issues possibles à l'expérience (modèle des k-listes).
• Dénombrement des cas favorables à $[Z_k=2]$:
$\to$ Choix des 2 numéros qui seront les seuls à sortir en k tirages : $\binom{4}{2}=6$ possibilités.
$\to$ Nombre de k-listes ne faisant apparaître que ces deux numéros : 2^k auquel il faut retirer les 2 listes particulières où seul un des deux numéros choisi apparaît systématiquement (on veut deux numéros distincts, ni plus, ni moins !) : 2^k-2 possibilités.

Au final, et par choix successifs : $\text{Card}([Z_k=2]) = 6.(2^k-2)$.
L'équiprobabilité des issues est assurée par le fait que chaque numéro est présent sur une seule boule dans l'urne $\mathcal{U}$, et on a bien : $\boxed{P(Z_k=2) = 6.\frac{2^k-2}{4^k}}$.

3. On note, pour tout i de $[\![1;4]\!]$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) L'événement $[Z_k\leqslant 3]$ est réalisé si et seulement si en k tirages, on a eu au plus trois numéros distincts : donc si et seulement si l'un des 4 numéros au moins, n'est jamais sorti.

Ainsi : $[Z_k \leqslant 3] = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Ces 4 événements n'étant pas incompatibles, il faut utiliser la *formule du crible* :

$$\begin{aligned}
P(Z_k \leqslant 3) = &\ P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\
&- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) \\
&+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
&- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
= &\ 4P(A_1) - 6P(A_1 \cap A_2) + 4P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - 0
\end{aligned}$$

car dans chacune des parties de la formule, les rôles des différents numéros sont symétriques et les probabilités identiques par conséquent : $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4)$, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_3 \cap A_4), \dots$ et $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$ puisque les tirages font sortir au moins un numéro !

b) Les cas favorables à A_1 sont les k-listes de $[\![2;4]\!]$, donc : $P(A_1) = \dfrac{3^k}{4^k} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^k$.

Les cas favorables à $A_1 \cap A_2$ sont les k-listes de $\{3;4\}$, donc $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{2^k}{4^k} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

Il n'y a qu'un seul cas favorable à $A_1 \cap A_2 \cap A_3$: c'est la k-liste formée uniquement de numéros 4, et $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dfrac{1}{4^k} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^k$.

c) On en déduit : $P(Z_k \leqslant 3) = 4.\left(\dfrac{3}{4}\right)^k - 6.\left(\dfrac{1}{2}\right)^k + 4.\left(\dfrac{1}{4}\right)^k$.

Or : $[Z_k \leqslant 3] = [Z_k = 1] \cup [Z_k = 2] \cup [Z_k = 3]$, donc par incompatibilité des trois événements :

$$\begin{aligned}
& P(Z_k \leqslant 3) = P(Z_k = 1) + P(Z_k = 2) + P(Z_k = 3) \\
\iff\ & P(Z_k = 3) = P(Z_k \leqslant 3) - P(Z_k = 1) - P(Z_k = 2) \\
& \qquad = \frac{3^k}{4^{k-1}} - \frac{6}{2^k} + \frac{1}{4^{k-1}} - \frac{1}{4^{k-1}} - 6.\left(\frac{1}{2^k} - \frac{2}{2^k}\right) \\
& \qquad = \frac{3^k}{4^{k-1}} + \frac{6}{2^{k-1}}
\end{aligned}$$

Vu que $Z_k(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ (pour $k \geqslant 4$ du moins...) on a aussi :

$$P(Z_k = 4) = P(Z_k > 3) = 1 - P(Z_k \leqslant 3) = 1 - \frac{3^k}{4^{k-1}} + \frac{6}{2^k} - \frac{1}{4^{k-1}}$$