MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2014

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère l'application $\varphi :]0;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet : $2 < e < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. La fonction φ est de classe C^3, et même de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$ comme somme, produit et composée de fonctions de classe C^∞.

$$\forall x > 0 : \varphi'(x) = e^x - (e^{\frac{1}{x}} + x.(-\frac{1}{x^2})e^{\frac{1}{x}}) = e^x + (\frac{1}{x} - 1)e^{\frac{1}{x}}$$

$$\forall x > 0 : \varphi''(x) = e^x + (-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + (\frac{1}{x} - 1).(-\frac{1}{x^2})e^{\frac{1}{x}}) = e^x - \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$$

$$\forall x > 0 : \ \varphi'''(x) = e^x - (-\frac{3}{x^4}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3}(-\frac{1}{x^2})e^{\frac{1}{x}}) = e^x + (\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5})e^{\frac{1}{x}} = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$$

2. D'après l'expression précédente : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \varphi'''(x) > 0$, donc la fonction φ'' est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Comme : $\varphi''(1) = e^1 - \frac{1}{1^3}e^{\frac{1}{1}} = e - e = 0$, on en déduit que $\forall x \in]0;1[,\ \varphi''(x) < 0$
et $\forall x \in]1;+\infty[,\ \varphi''(x) > 0$. Ainsi, la fonction φ' est strictement décroissante sur $]0;1[$, puis strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

Donc φ' admet un minimum en $x = 1$, qui vaut : $\varphi'(1) = e^1 + (\frac{1}{1} - 1)e^{\frac{1}{1}} = e$, on a bien :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant e$$

3. $\lim_{x\to 0^+} e^x = e^0$ par continuité de exp en 0.

Quand $x \to 0^+$: $X = \frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, et : $xe^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{X}e^X$, où $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty = \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$ par croissances comparées.
D'où : $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$ par différence.

4. $\forall x > 0 : \dfrac{\varphi(x)}{x} = \dfrac{e^x}{x} - e^{\frac{1}{x}}$, où :

$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to 0^+} e^u = e^0 = 1$, et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$ par croissances comparées, donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{x} = +\infty$.

On peut alors écrire : $\forall x > 0,\ \varphi(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} \times x$, d'où : $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ par produit de deux limites égales à $+\infty$.

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. On définit la fonction f sur $[3;+\infty[$ par : $f(x) = \varphi(x) - ex$.
La fonction f est bien dérivable sur $[3;+\infty[$,avec :

$$\forall x \geqslant 3,\ f'(x) = \varphi'(x) - e \geqslant 0$$

d'après la question **2.** !
La fonction f est donc croissante sur $[3;+\infty[$, donc :

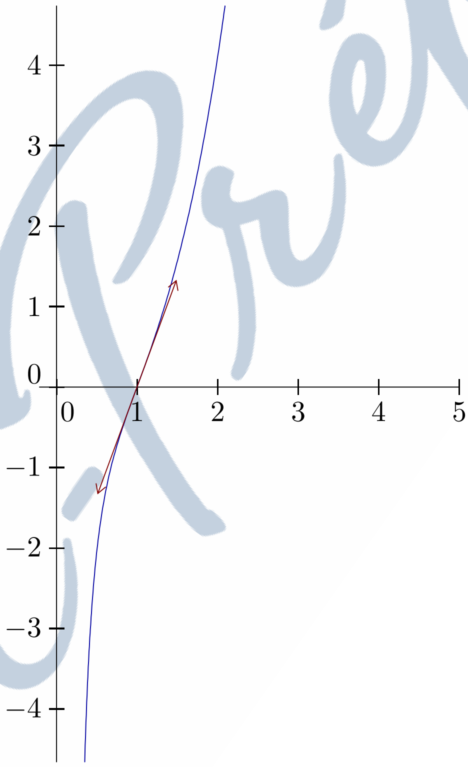
$$\forall x \geqslant 3,\ f(x) \geqslant f(3) = \varphi(3) - 3e > 15 - 3e > 6, \text{ soit : } \quad \forall x \geqslant 3,\ \varphi(x) - ex > 0 \iff \varphi(x) > ex$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

6. La fonction φ est bien de classe C^2, et on a vu que φ'' est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et change de signe en 1 : la courbe $\mathcal{C}$ admet donc un unique point d'inflexion, d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée : $\varphi(1) = e^1 - e^1 = 0$.
La tangente à $\mathcal{C}$ en ce point a pour équation :
$y = \varphi'(1)(x-1) + \varphi(1) \iff y = e(x-1)$ car $\varphi'(1) = e^1 + (\frac{1}{1} - 1)e^{\frac{1}{1}}$.

7. Le tableau de variation est donné par l'étude précédente :

x	0	1	$+\infty$
φ	$-\infty$	0	$+\infty$
	concave	convexe	



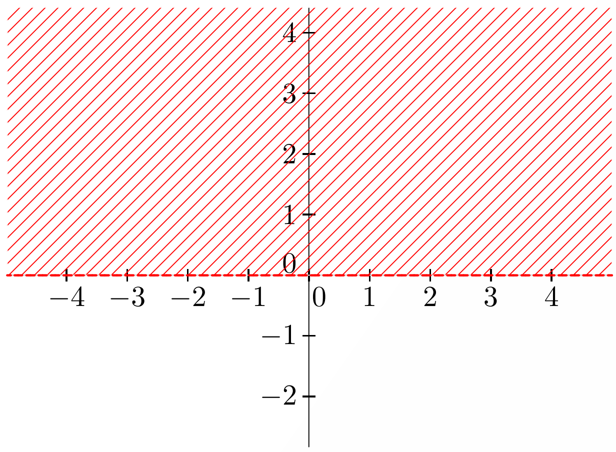
Les calculs de limites précédents prouvent que $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une branche parabolique d'axe (Oy) en $+\infty$.

Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et on considère l'application :

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy - e^x \ln(y)$$

8. L'ouvert U est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) du plan tels que $y > 0$: il s'agit donc du demi-plan ouvert situé au-dessus de l'axe des abscisses, privé de ce dernier :



9. Les fonctions *coordonnées* $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont toutes les deux de classe C^2 sur l'ouvert $U = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$, à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$ sur lequel exp est de classe C^2, et $]0, +\infty[$ sur lequel ln est de classe C^2.
Donc par composition, produit et somme de fonction de classe C^2 sur U, f est bien de classe C^2 sur cet ouvert, avec :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \partial_1(f)(x, y) = y - e^x \ln(y) \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = x - \frac{e^x}{y}$$

Puis :

$$\forall (x, y) \in U, \quad \partial^2_{1,1}(f)(x, y) = -e^x \ln(y), \quad \partial^2_{2,2}(f)(x, y) = \frac{e^x}{y^2}$$

et

$$\forall (x, y) \in U, \quad \partial^2_{1,2}(f)(x, y) = \partial^2_{2,1}(f)(x, y) = 1 - \frac{e^x}{y}$$

10. Un couple $(x, y) \in U$ est un point critique de f si et seulement si :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x, y) & = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - e^x \ln(y) & = 0 \\ x - \dfrac{e^x}{y} & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - xy\ln(y) = 0 \\ e^x = xy \end{cases}$$

Puisque $(x, y) \in U$: alors $y > 0$ donc la condition $e^x = xy$ implique bien $x > 0$, et la deuxième ligne peut être simplifiée par y :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x, y) & = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - x\ln(y) = 0 \\ e^x = xy \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(y) = \dfrac{1}{x} \\ e^x - xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = e^{\frac{1}{x}} \\ e^x - xe^{\frac{1}{x}} = 0 \end{cases}$$

On a bien montré que (x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad y = e^{\frac{1}{x}}$$

11. L'étude de φ faite en partie I a montré que : $\varphi(1) = 0$ et comme φ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, cette application est injective, ce qui garantit que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet pour unique solution $x = 1$.
Il en résulte une unique valeur $y = e^{\frac{1}{1}} = e$ qui fait du couple $(1, e)$ l'unique point critique de f sur U.

12. On écrit la Hessienne de la fonction f au point $(1, e)$:

$$H = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(1, e) & \partial^2_{1,2}(f)(1, e) \\ \partial^2_{2,1}(f)(1, e) & \partial^2_{2,2}(f)(1, e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{e} \end{pmatrix}$$

Cette matrice diagonale a clairement pour valeurs propres $-e < 0$ et $\dfrac{1}{e} > 0$, de signes opposés : ainsi donc, $(1, e)$ est un point-col pour f, et cette dernière n'admet pas d'extrémum local en ce point.

13. La fonction f étant de classe C^1 sur U : son unique point critique $(1, e)$ est le seul en lequel la fonction f est susceptible d'admettre un extremum local.

Comme on vient de le voir, f n'admet pas d'extremum local en $(1, e)$: elle n'admet donc pas d'extremum local du tout sur U.

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrons par récurrence sur n que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3e^n$.
$\boxed{\text{I.}}$ La propriété est évidemment initialisée, avec $u_0 = 3 \geqslant 3e^0$ donné par l'énoncé.
$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$.
Alors au rang suivant :
$u_n \geqslant 3$, donc $u_n \in \mathcal{D}\varphi$, et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ est bien défini, et :
puisque $u_n \geqslant 3$, $u_{n+1} = \varphi(u_n) \geqslant e.u_n \geqslant e.3e^n = 3e^{n+1}$ d'après l'inégalité obtenue à la question **5.**, et l'hypothèse de récurrence.
$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

15. À la question précédente, on a écrit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant e.u_n$, donc $u_{n+1} > u_n$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
L'inégalité : $u_n \geqslant 3.e^n$, où $\lim\limits_{n\to+\infty} 3e^n = +\infty$ donne aussi, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

16.

```
u=3
n=0
while u < 1e3
    u = exp(u)-u*exp(1/u)
    n = n+1
end
disp(n)
```

17. On repart ici de l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 3e^n$, qui par inverse donne :
$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{3e^n} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$, où : la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\dfrac{1}{e} \in]0; 1[$.

Le *théorème de comparaison des séries à termes positifs* assure donc que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{u_n}$ est convergente.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. L'ensemble $\mathcal{E}$ (des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, au passage) peut s'écrire :
$\mathcal{E} = \left\{ a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathrm{Vect}\,(A,B,C)$, c'est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices A, B, C et à ce titre, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
La famille (A,B,C) est génératrice de $\mathcal{E}$, elle est aussi libre comme sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; c'est donc une base de $\mathcal{E}$, qui est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3.
2. On redémontre rapidement cette propriét de cours selon laquelle le produit de deux matrices triangulaires supérieures, est encore triangulaire supérieure :
$\forall (a,b,c,a',b',c') \in \mathbb{R}^6, \ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in \mathcal{E}.$
3. Une matrice triangulaire supérieure $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $c \neq 0$, avec, selon la formule d'inversibilité des matrices 2×2 :
$M^{-1} = \dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/ac \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}$ appartient bien encore à $\mathcal{E}$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Tout d'abord : pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, $f(M) = TMT$ appartient encore à $\mathcal{E}$ comme produit de trois matrices de cet espace stable pour le produit matriciel (q.2.).
Ensuite, pour toutes matrices M et N de $\mathcal{E}$, et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, d'après les règles du calcul matriciel :
$f(M+N) = T(M+N)T = TMT + TNT = f(M) + f(N)$
et $f(\lambda.M) = T(\lambda.M)T = \lambda.TMT = \lambda.f(M)$, donc f est une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans lui-même : c'est bien un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
5. La matrice T est évidemment inversible selon le critère rappelé à la question 3., d'inverse : $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Pour toute matrice N de $\mathcal{E}$, on peut alors résoudre l'équation matricielle : $f(M) = N$ d'inconnue $M \in \mathcal{E}$:
$f(M) = N \iff TMT = N \iff M = T^{-1}NT^{-1}$, on trouve bien une unique matrice solution, appartenant à $\mathcal{E}$ puisque $T^{-1} \in \mathcal{E}$, et toujours par stabilité pour le produit matriciel de cet espace.
On vient donc de montrer que f est une aplication bijective (tout élément de $\mathcal{E}$ possède un unique antécédent par f dans $\mathcal{E}$), c'est-à-dire que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.
6. La matrice T est déjà triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux : le spectre de T est donc réduit à $\{1\}$.
Comme $T - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1, d'après le théorème du rang :
$\dim \mathrm{Ker}(T - I_2) = 2 - \mathrm{rg}(T - I_2) = 1 \neq 2$, le seul sous-espace propre n'est pas de dimension 2, donc T n'est pas diagonalisable.

On note F la matrice de f dans la base (A,B,C) de $\mathcal{E}$.

7. Les calculs matriciels donnent :

$f(A) = TAT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A + B,\ f(B) = TBT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B,$

$f(C) = TCT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B + C$. On en déduit :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Un réel λ est valeur propre de f si et seulement si $F - \lambda.I_3$ est non-inversible :

$F - \lambda.I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & (1-\lambda)^2 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

La réduite de Gauss obtenue est non-inversible si et seulement si l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul : on en conclut que f admet pour unique valeur propre $\lambda = 1$.

On résout ensuite le système $(F - I_3)X = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dont les solutions sont les vecteurs propres de F associés à la valeur propre 1 :

$(F - I_3)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + z = 0 \iff x = -z.$

On en déduit le sous-espace propre :

$E_1(F) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$, donc le sous-espace propre correspondant de f est, via la représentation dans la base (A, B, C) :

$E_1(f) = \{-z.A + y.B + z.C|\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{z.(-A + C) + y.B|\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(-A + C, B).$

On a obtenu une famille génératrice de $E_1(f)$, constituée de deux vecteurs non-colinéaires ; elle est donc également libre, c'est par conséquent une base du sous-espace propre.

9. L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ admet une seule valeur propre $\lambda = 1$, et le sous-espace propre associé est de dimension $2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ d'après ce qui précède.

   On en conclut que f n'est pas diagonalisable.

10. Soit λ un réel différent de 1. La matrice nulle $M = 0$ est toujours solution de l'équation : $f(M) = \lambda.M$, et toute autre solution non-nulle serait un vecteur propre de f pour la valeur propre λ.

    Comme 1 est la seule valeur propre de f, on en conclut que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(M) = \lambda.M \iff M = 0$$

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. On obtient facilement : $H^2 = 0$. Comme la matrice identité I commute avec n'importe quelle autre matrice carrée de même format, on peut calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, $(I + a.H)^n$ avec la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (I + a.H)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^k \times (a.H)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a.H)^k \times I^{n-k}$$

La deuxième forme est la plus immédiatement intéressante, car puisque $H^2 = 0$, alors pour tout entier $k \geqslant 2$: $(a.H)^k = a^k.H^k = 0$, il ne subsiste donc que les termes d'indices $k = 0$ et $k = 1$ dans la somme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (I + a.H)^n = \binom{n}{0}.(a.H)^0 \times I^n + \binom{n}{1}.(a.H)^1 \times I^{n-1} = I + n.a.H$$

12. En remarquant que $F = I + H = I + 1.H$, le résultat précédent s'applique et donne directement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F^n = (I + 1.H)^n = I + n.H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. On utilise astucieusement à nouveau le résultat de la question 11. :
Avec $a = \dfrac{1}{3}$ et $n = 3$, on obtient : $(I + \frac{1}{3}.H)^3 = I + 3.\frac{1}{3}.H = I + H = F$, donc $G = I + \frac{1}{3}.H$ est solution.

La matrice G représente alors, dans la base (A, B, C), un unique endomorphisme de $\mathcal{E}$, qu'on note g : la relation $G^3 = F$ est alors équivalente à $g \circ g \circ g = f$, et il existe bien un tel endomorphisme.

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable aléatoire X_n prend ses valeurs dans $[\![2; n+1]\!]$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros $5, 3, 2, 2, 4, 3$, alors $X_5 = 4$.
Pour tout k de $[\![1; n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées $1, 2, 3$.

1. a) Les seules séquences de tirages dans une urne avec 3 boules commencent par : $3 - 2 - 1$ dans cet ordre, la quatrième boule peut alors être quelconque.
Ainsi : $[X_3 = 4] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]$, et par indépendance des tirages :

$$P(X_3 = 4) = P(N_1 = 3) \times P(N_2 = 2) \times P(N_3 = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

b) L'événement $[X_3 = 2]$ est réalisé si et seulement si la deuxième boule porte un numéro supérieur à la première :
On peut écrire : $[X_3 = 2] = [N_1 = 1] \cup [N_1 = 2] \cap [N_2 \geqslant 2] \cup [N_1 = 3] \cap [N_2 = 3]$, réunion d'événements disjoints deux à deux ; par indépendance des tirages :

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2) &= P(N_1 = 1) + P(N_1 = 2) \times P(N_2 \geqslant 2) + P(N_1 = 3) \times P(N_2 = 3) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Comme $X_3(\Omega) = \{2, 3, 4\}$, on en déduit :
$P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 2) - P(X_3 = 4) = 1 - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{27} = \dfrac{27 - 18 - 1}{27} = \dfrac{8}{27}$.

2. $X_3(\Omega)$ est fini, donc X_3 admet une espérance qui vaut :

$$E(X_3) = 2 \times P(X_3 = 2) + 3 \times P(X_3 = 3) + 4 \times P(X_3 = 4) = \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{4}{27} = \frac{64}{27}.$$

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout entier $k \in [\![1; n+1]\!]$, N_k suit bien sûr la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$:
$\forall j \in [\![1; n]\!],\ P(N_k = j) = \dfrac{1}{n},\ E(N_k) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(N_k) = \dfrac{n^2-1}{12}$ d'après le cours.

4. L'événement $[X_n = n+1]$ est réalisé si et seulement si les n premiers tirages donnent des résultats dans l'ordre strictement décroissant : la seule possibilité est d'obtenir dans cet ordre, les boules numéros $n,\ n-1, \ldots, 2,\ 1$. Le $(n+1)$-ième tirage peut alors donner n'importe quel résultat. Ainsi :
$P(X_n = n+1) = P(N_1 = n) \times P(N_2 = n-1) \times \ldots \times P(N_{n-1} = 2) \times P(N_n = 1) = \dfrac{1}{n^n}$, toujours par indépendance des tirages.

5. Soit i un entier de $[\![2; n]\!]$: sachant que l'événement $[N_1 = i]$ est réalisé, $[X_n = 2]$ l'est si et seulement si le deuxième tirage donne une boule dont le numéro est compris entre i et n :
$P_{[N_1=i]}(X_n = 2) = P(N_2 \geqslant i) = \dfrac{n-i+1}{n}$ car il y a bien $n-i+1$ entiers dans $[\![i, n]\!]$.

6. On utilise alors, bien sûr, la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à la v.a.r. N_1 :

$$\begin{aligned} P(X_n = 2) &= \sum_{i=1}^{n} P(N_1 = i) \times P_{N_1=i}(X_n = 2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{n-i+1}{n} = \frac{1}{n^2}.\left((n+1).n - \sum_{i=1}^{n} i\right) \\ &= \frac{1}{n^2}.\left(n(n+1) - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

7. Soit $k \in [\![2; n]\!]$: l'événement $[X_n > k]$ est réalisé si et seulement si aucun des k premiers tirages n'a fait apparaître un numéro supérieur ou égal au précédent : ils forment donc une suite strictement décroissante, et on a bien : $[X_n > k] = (N_1 > N_2 > \ldots > N_k)$.

On procède alors à un petit raisonnement de dénombrement : pour obtenir une suite strictement décroissante de k entiers compris entre 1 et n, on commence par choisir k entiers distincts entre 1 et n : il y a $\dbinom{n}{k}$ façons de procéder. Mais il n'y a alors qu'une seule façon de ranger ces k entiers dans l'ordre strictement décroissant !

Comme il y a n^k façons possibles de procéder aux k premiers tirages, par équiprobabilité des issues, on obtient bien : $P(X_n > k) = \dbinom{n}{k}.\dfrac{1}{n^k}$.

Quand $k = 0$: $\dbinom{n}{0}.\dfrac{1}{n^0} = 1$, qui est bien égal à $P(X_n > 0)$ vu que $X_n(\Omega) = [\![2; n+1]\!]$.

Quand $k = 1$: $\dbinom{n}{1}.\dfrac{1}{n^1} = \dfrac{n}{n} = 1$ qui là encore, est bien égal à $P(X_n > 1$ pour la même raison.

8. Pour tout entier $k \in [\![2; n+1]\!]$, puisque X_n est à valeurs entières, on peut écrire :

$$[X_n > k-1] = [X_n \geqslant k] = [X_n = k] \cup [X_n > k],$$

réunion disjointe ; par conséquent :

$$P(X_n > k-1) = P(X_n = k) + P(X_n > k) \iff P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k).$$

9. La v.a.r. X_n a un univers-image fini, donc admet une espérance qui vaut :

$$E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} k.P(X_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k(P(X_n > k-1) - P(X_n > k))$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k-1) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k) = \sum_{j=1}^{n} (j+1)P(X_n > j) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} jP(X_n > j) + \sum_{j=1}^{n} P(X_n > j) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k)$$

$$= P(X_n > 1) + \sum_{j=1}^{n} P(X_n > j) - (n+1)P(X_n > n+1)$$

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n > k) \text{ car } P(X_n > 1) = 1 = P(X_n > 0) \text{ et } P(X_n > n+1) = 0$$

Le résultat obtenu à la question **7.** permet le calcul explicite :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n \text{ d'après la formule du binôme de Newton.}$$

10. On procède finalement au calcul explicite à l'aide des questions **7.** et **8.** :

$$\forall k \in [\![2; n+1]\!],\ P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k) = \binom{n}{k-1} . \frac{1}{n^{k-1}} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$= \frac{1}{n^k} . \left[n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k} \right] = \frac{1}{n^k} . \left[n . \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \right]$$

$$= \frac{n!}{n^k} . \frac{n.k - (n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!}{n^k} . \frac{n(k-1) + k - 1}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!.(n+1)(k-1)}{n^k.k!(n+1-k)!} = \frac{k-1}{n^k} . \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$$

Partie III : Étude asymptotique

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2 :

$$P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} = \frac{k-1}{n^k} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{k-1}{k!} \frac{(n+1)n(n-1)...(n+2-k)}{n^k}$$

en simplifiant le quotient $\dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!}$, il reste en effet le produit des entiers de $n+2-k$ à $n+1$, soit k facteurs. En remarquant que chacun de ces facteurs est équivalent à n, et que leur nombre k est fixé, on peut donc écrire :

$$(n+1)n(n-1)...(n+2-k) \underset{n \to +\infty}{\sim} n^k \quad \text{donc :} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)n(n-1)...(n+2-k)}{n^k} = 1$$

Et ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$$

12. On part des sommes partielles de la série considérée :

$$\forall n \geqslant 2,\ S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j!} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

La série est donc convergente, et $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$

On définit donc bien la loi d'une variable aléatoire Z en posant : $\forall k \geqslant 2,\ P(Z=k) = \dfrac{k-1}{k!}$.

13. La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} kP(Z=k)$ est absolument convergente. C'est une série à termes positifs, donc la convergence simple suffit.

$\forall n \geqslant 2,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} kP(Z=k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!}$.

On reconnaît une série exponentielle de paramètre 1, donc la série converge et Z admet une espérance qui vaut : $E(Z) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} kP(Z=k) = e$.

On a trouvé que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(X_n) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, calcul de limite très classique qu'on réalise en écrivant : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1+\frac{1}{n})\right)$, où :

$n.\ln(1+\frac{1}{n})$ est une F.I. $0\times+\infty$ qu'on résout en posant le changement de variable : $X = \dfrac{1}{n}$.

Quand $n\to+\infty,\ X = \dfrac{1}{n} \to 0$ et : $n\ln(1+\frac{1}{n}) = \dfrac{1}{X}\ln(1+X)$.

Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln(1+\tfrac{1}{n}) = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ (limite classique !), d'où :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp(n\ln(1+\tfrac{1}{n})) = e^1$ (par continuité de l'exponentielle en 1). On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = E(Z)$$