MATHÉMATIQUES I - ESSEC E 2015

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

I. Mise en place du problème

1. Avec les constantes introduites par l'énoncé : $v > k + c$ exprime que le prix de vente unitaire est strictement supérieur au coût total unitaire (achat + stockage), donc que l'entreprise ne vend pas à perte, ce qui semble la moindre des choses pour la viabilité de l'affaire !

II. Optimisation du bénéfice moyen sur une période

A. Cas continu

Dans cette partie, on suppose que la variable aléatoire D représentant la demande admet une densité f qui est nulle sur $]-\infty;0]$, et continue et strictement positive sur $]0;+\infty[$.

On note R la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $R(x) = \mathbb{P}(D > x)$.

Les quantités q_i et q_c sont des réels positifs ou nuls.

2. Étude d'une fonction

On définit la fonction φ sur $[0;+\infty[$ par : $\varphi(x) = v\displaystyle\int_0^x R(t)\mathrm{d}t - (k+c)x$.

a) La fonction R est en fait la fonction « d'anti-répartition » puisqu'elle vérifie, pour tout x de $[0;+\infty[$:

$$R(x) = \mathbb{P}(D > x) = 1 - \mathbb{P}(D \leqslant x) = 1 - F_D(x)$$

En tant que fonction de répartition, F_D est continue sur $\mathbb{R}$, notamment en 0 : par conséquent, $F_D(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} F_D(x) = 0$ puisque f est nulle sur $]-\infty;0]$ et ainsi $R(0) = 1 - 0 = 1$.

La fonction de répartition F_D de D est aussi, d'après l'hypothèse faite sur la densité f, strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Par conséquent, R est au contraire strictement décroissante sur cet intervalle.

Toujours d'après les propriétés d'une fonction de répartition : $\lim\limits_{x\to+\infty} F_D(x) = 1^-$, et comme F_D est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, cette limite n'est jamais atteinte.

On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - F_D(x) = 0^+$.

Ainsi : la fonction R est strictement croissante et continue sur $[0;+\infty[$; elle réalise donc, d'après le théorème éponyme, une bijection de $[0;+\infty[$ dans $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} R(x); R(0)\right] =]0;1]$.

On pose dans la suite $S = R^{-1}\left(\dfrac{k+c}{v}\right)$, bien défini puisque $v > k + c \iff 0 < \dfrac{k+c}{v} < 1$.

b) La fonction R étant, comme on l'a vu, continue sur $[0;+\infty[$: la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x R(t)\mathrm{d}t$, qui est en fait La primitive de R qui s'annule en 0, est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, et a pour dérivée sur cet intervalle la fonction R.

La fonction φ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ comme différence de deux fonctions qui le sont, et :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad \varphi'(x) = v.R(x) - (k+c)$$

c) On détermine le sens de variation de φ sur $[0;+\infty[$ en résolvant l'inéquation d'inconnue $x \in [0;+\infty[$:

$$\varphi'(x) > 0 \iff v.R(x) > k+c \iff R(x) > \frac{k+c}{v} \iff x < R^{-1}\Big(\frac{k+c}{v}\Big) \iff x < S$$

parce que $v > 0$ et R est une bijection strictement décroissante de $[0;+\infty[$ dans $]0;1]$, auquel $\dfrac{k+c}{v}$ appartient d'après la question 1.

La fonction φ est donc strictement croissante sur $[0;S]$, puis strictement décroissante sur $[S;+\infty[$.

d) D'après ce qui précède : la fonction φ admet sur $[0;+\infty[$ un maximum strict et global en S, ce qui signifie effectivement que pour tout réel x positif et différent de S, $\varphi(x) < \varphi(S)$.

3. Calcul approché de S avec `Scilab`

On suppose que l'on a défini une fonction d'en-tête `function r = R(x)` qui renvoie la valeur de R au point x. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

a) Puisque $\dfrac{k+c}{v}$ est une constante appartenant à $]0;1]$, et puisque R est une bijection continue, strictement décroissante de $[0;+\infty[$ dans $]0;1]$:

$$\mathbb{P}\Big(R(X) \leqslant \frac{k+c}{v}\Big) = \mathbb{P}\Big(X \geqslant R^{-1}\big(\frac{k+c}{v}\big)\Big) = \mathbb{P}(X \geqslant S) = \mathbb{P}(X > S) = 1 - F_X(S) = 1-(1-e^{-S}) = e^{-S}$$

parce que X est à densité, et d'après le cours sur la loi exponentielle suivie par X.

b) Le script suivant évalue alors la probabilité précédente par la fréquence de réalisation de l'événement $\Big[R(X) \leqslant \dfrac{k+c}{v}\Big]$ à partir d'un échantillon de 1000 variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X, c'est-à-dire exponentielle de paramètre 1.

La boucle `for` compte le nombre de réalisations de l'événement via la bien-nommée variable `compt` ; il suffit ensuite de diviser ce nombre par l'effectif 1000 pour obtenir la fréquence.

On obtient alors une valeur approchée de e^{-S}, dont on extrait une valeur approchée de S en en prenant le logarithme, puis l'opposé :

```
k = input("k = ") ; c = input("c = ") ; v = input("v = ") ;
compt = 0;
for i = 1:1000 do
    X = grand(1,1,"exp",1)
    if R(X) <= (k+c)/v then
        compt = compt + 1
    end
end

disp("S = "); disp(-log(compt/1000));
```

4. Espérance de vente

La variable aléatoire V représente la quantité de produit vendue sur la période.

On rappelle que $q = q_i + q_c$ est la quantité de produit disponible à la vente.

Le minimum de deux réels a et b est noté dans la suite $\min(a,b)$.

a) Au cours de la période écoulée, deux options seulement se présentent :

- Soit le stock disponible excède la demande D, qui n'atteint pas dans ce cas les limites du stock et est alors pleinement satisfaite.

  Pour une telle éventualité $\omega \in \Omega$: $\quad D(\omega) < q$ et $V(\omega) = D(\omega) = \min\big(D(\omega), q\big)$.

- Soit la demande $D(\omega)$ atteint ou dépasse la quantité maximale disponible q ; dans ce cas, $D(\omega) \geqslant q$, et toute la quantité disponible est vendue : $V(\omega) = q = \min\big(D(\omega), q\big)$.

On peut donc écrire : $\forall \omega \in \Omega, \quad V(\omega) = \min\big(D(\omega), q\big)$, ce qui signifie bien l'égalité de variables aléatoires :

$$V = \min\big(D, q\big)$$

b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \min(x, q)$.

i. La fonction g a pour expression détaillée : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \min(x, q) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant q \\ q & \text{si } x > q \end{cases}$.

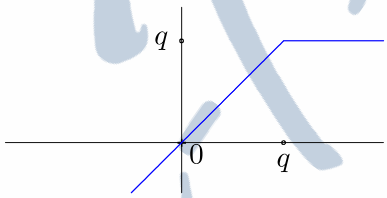
De la sorte : sur $]q; +\infty[$, g est continue comme fonction constante, et sur $]-\infty; q[$, g est continue comme fonction affine.

Les limites au point q donnent :
$\lim\limits_{x \to q^-} g(x) = \lim\limits_{x \to q^-} x = q = g(q)$ et $\lim\limits_{x \to q^+} g(x) = \lim\limits_{x \to q^+} q = q = g(q)$, donc g est aussi continue en q.

Finalement, g est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque : si on connaît la formule : $\forall x \in \mathbb{R},\ \min(x, q) = \dfrac{x + q - |x - q|}{2}$, la fonction g apparaît directement continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Surtout, il faut pouvoir se convaincre de la continuité de cette fonction en traçant son allure, très simple :



ii. La fonction f est supposée continue, strictement positive sur $]0; +\infty[$; de plus l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, puisque f est une densité.

Il n'est pas certain que f admette une limite finie en 0^+, mais au voisinage de 0^+, x est compris entre 0 et 1, donc : $0 \leqslant xf(x) \leqslant f(x)$.

Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives assure alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge. Par continuité de la fonction $x \mapsto xf(x)$ sur $]0; +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^q xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x + \int_1^q xf(x)\mathrm{d}x$, est bien convergente.

iii. D'après le théorème de transfert : g étant continue sur $\mathbb{R}$, la variable aléatoire $V = \min(D, q) = g(D)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x).f(x)\mathrm{d}x$, est absolument convergente.

Or f est nulle sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $]0; +\infty[$. De son côté, g est positive sur $[0; +\infty[$ ($g(x)$ y est égal à x ou à q), il suffit donc de vérifier la convergence simple de :

$$\int_0^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^q xf(x)\mathrm{d}x + \int_q^{+\infty} qf(x)\mathrm{d}x$$

On a établi la convergence de la première intégrale à la question précédente. Comme f est une densité de probabilité, la deuxième intégrale converge aussi et vaut :

$q\displaystyle\int_q^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = q\mathbb{P}(D > q) = qR(q)$ d'après les propriétés de calcul avec les variables à densité.

La variable aléatoire V admet donc une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^q xf(x)\mathrm{d}x + qR(q)$$

iv. Soit $\varepsilon > 0$: pour prendre toutes nos précautions, on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^q xf(x)\mathrm{d}x$, en posant :

$$\begin{aligned} u(x) = x \quad &\longrightarrow \quad u'(x) = 1 \\ v'(x) = f(x) \quad &\longrightarrow \quad v(x) = F(x) \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0+\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\int_\varepsilon^q xf(x)\mathrm{d}x = \Big[xF(x)\Big]_\varepsilon^q - \int_\varepsilon^q F(x)\mathrm{d}x = qF(q) - \varepsilon.F(\varepsilon) - \int_\varepsilon^q F(x)\mathrm{d}x$$

Or lorsque ε tend vers 0^+ : $\varepsilon.F(\varepsilon)$ tend, par continuité de F sur $\mathbb{R}$, vers $0.F(0) = 0$.

La continuité de F sur $\mathbb{R}$ assure aussi que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^q F(x)\mathrm{d}x = \int_0^q F(x)\mathrm{d}x$, ce qui donne finalement la relation :

$$\int_0^q xf(x)\mathrm{d}x = qF(q) - \int_0^q F(x)\mathrm{d}x$$

Remarque : on a ici pris toutes les précautions concernant la gestion du point 0, en lequel la fonction f n'admet pas forcément de limite finie ; cette seule hypothèse supplémentaire aurait permis de travailler directement sur des intégrales de 0 à q, faussement impropres en 0.

En reprenant alors la formule précédente pour l'espérance de V, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V) &= qF(q) - \int_0^q F(x)\mathrm{d}x + qR(q) = q - \int_0^q F(x)\mathrm{d}x = \int_0^q \big(1 - F(x)\big)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^q R(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

5. Bénéfice espéré

Le bénéfice net sur la période est une variable aléatoire B ; on note $\beta(q_i, q_c) = \mathbb{E}(B)$ l'espérance de B.

a) Si on ne commande pas de produit ($q_c = 0$) : le bénéfice net est la différence entre le produit de la vente et le coût total du stockage, puisque comme le précise l'énoncé, le coût d'achat du stock initial n'est ici pas comptabilisé :

$$B = v.V - q_i.k$$

La linéarité de l'espérance donne alors :

$$\beta(q_i, 0) = \mathbb{E}(B) = v.\mathbb{E}(V) - q_i.k = v\int_0^{q_i} R(x)\mathrm{d}x - (k+c).q_i + c.q_i = \varphi(q_i) + c.q_i$$

b) Si on commande une quantité strictement positive de produit, on rajoute le coût d'achat et de stockage de la quantité q_c, donc la formule devient :

$$B = v.V - q_i.k - q_c.(k+c) - c_F$$

Et dans ce cas :

$$\beta(q_i,q_c)=\mathbb{E}(B)=v.\mathbb{E}(V)-q_i.k-q_c.(k+c)-c_F=v.\int_0^{q_i+q_c}R(x)\mathrm{d}x-(k+c).(q_i+q_c)+c.q_i-c_F$$
$$=\varphi(q_i+q_c)+c.q_i-c_F$$

6. Optimisation

On cherche à déterminer, en fonction d'une valeur donnée q_i du stock initial, quelle est la quantité de produit q_c à commander afin d'optimiser l'espérance de bénéfice.

a) On suppose $q_i \geqslant S$. La fonction φ étant strictement décroissante sur $[S;+\infty[$, et puisque $q_i+q_c>q_i$ pour $q_c>0$:

$$\varphi(q_i+q_c)<\varphi(q_i)\Longrightarrow\varphi(q_i+q_c)+c.q_i-c_F<\varphi(q_i+q_c)+c.q_i<\varphi(q_i)+c.q_i\Longrightarrow\beta(q_i,q_c)<\beta(q_i,0).$$

Ce résultat signifie que quelle que soit la quantité initiale q_i, tout achat supplémentaire diminue strictement le bénéfice moyen : la meilleure stratégie lorsque $q_i\geqslant S$ est certainement de ne pas acheter de produit.

b) On suppose ici $q_i<S$.

i. Si on achète une quantité non nulle de produit ($q_c>0$) : le bénéfice espéré est alors de toute façon $\varphi(q_c+q_i)+cq_i-c_F\leqslant\varphi(S)+c.q_i-c_F$. On peut atteindre cette valeur maximale du bénéfice espéré si et seulement si : $\quad q_c+q_i=S\iff q_c=S-q_i$.

Autrement dit, on complète le stock à la quantité S.

On définit sur $[0;S[$ la fonction ψ par $\psi(x)=\beta(x,S-x)-\beta(x,0)$.

ii. Pour tout x de $[0;S[$: $\quad 0<S-x\leqslant S$, donc :

$$\psi(x)=\varphi(x+S-x)+c.x-c_F-\varphi(x)-c.x=\varphi(S)-\varphi(x)-c_F$$

iii. La fonction φ est strictement croissante sur $[0;S[$, donc la fonction $-\varphi$ est strictement décroissante sur ce même intervalle. L'ajoute de la constante $\varphi(S)-c_F$ ne change pas le sens de variation, donc ψ est strictement décroissante sur $[0;S[$.

iv. Si $c_F\geqslant\varphi(S)$, alors par décroissance de ψ sur $[0;S[$:

$$\forall x\in[0;S[,\quad\psi(x)\leqslant\psi(0)\iff\psi(x)\leqslant\varphi(S)-c_F\leqslant 0$$

La fonction ψ est bien, dans ce cas, négative sur $[0;S[$, c'est-à-dire que :

$$\forall x\in[0;S[,\ \beta(x,S-x)\leqslant\beta(x,0).$$

Dans ce cas, ne rien acheter est encore plus avantageux que de compléter le stock à S.

v. Si par contre $c_F<\varphi(S)$: la fonction ψ est alors strictement décroissante sur $[0;S[$, elle est aussi continue sur cet intervalle (car φ l'est), avec :

$\psi(0)=\varphi(S)-\varphi(0)-c_F=\varphi(S)-c_F>0$ et $\psi(S)=-c_F<0$.

Le théorème de la bijection assure alors qu'il existe un unique réel $r\in]0;S[$ en lequel ψ s'annule en changeant de signe : $\psi(x)$ est positif pour tout x de $]0;r]$, et négatif pour tout x de $]r;S[$.

Par conséquent : si $r\leqslant q_i<S$, alors $\psi(q_i)\leqslant 0\iff\beta(q_i,S-q_i)\leqslant\beta(q_i,0)$ et la bonne stratégie est effectivement de ne rien commander dans ce cas.

Si par contre $q_i<r<S$, alors $\psi(q_i)>0\iff\beta(q_i,S-q_i)>\beta(q_i,0)$ et il est alors plus avantageux de compléter le stock jusqu'à r dans ce cas.

Conclusion de cette partie : on a mis en place une stratégie à deux seuils : r (seuil de renouvellement) et S (stock optimal). La stratégie consiste à ne rien commander si le stock initial est au moins égal à r, et sinon à acheter la quantité qui complète le stock à la valeur S.

B. Cas discret

Dans cette partie, on suppose que la variable aléatoire D qui représente la demande est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Sa loi est définie par la donnée de la suite de nombres $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $p_n = \mathbb{P}(D=n)$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N},\ p_n > 0$ et on pose $R_n = \mathbb{P}(D \geqslant n)$.

Les quantités $q_i,\ q_c$ sont maintenant des entiers naturels.

7. On définit la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\varphi_n = v\displaystyle\sum_{k=1}^{n} R_k - (k+c)n \quad$ si $n \geqslant 1$ et $\varphi_0 = 0$.

a) Puisque D est à valeurs entières, alors on peut écrire l'égalité d'événements :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [D \geqslant n] = [D = n] \cup [D > n] = [D = n] \cup [D \geqslant n+1]$$

et par union disjointe : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(D \geqslant n) = \mathbb{P}(D = n) + \mathbb{P}(D \geqslant n+1) \iff p_n = R_n - R_{n+1}$.

b) L'hypothèse : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n > 0$ assure alors que pour tout $n \in \mathbb{N},\ R_n > R_{n+1}$, et donc que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

$R_0 = \mathbb{P}(D \geqslant 0) = 1$ puisque D est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \mathbb{P}(D < n) = 1 - 1 = 0$ d'après les propriétés des fonctions de répartition.

c) Pour tout $n \geqslant 1$:

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} = v\sum_{k=1}^{n} R_k - (k+c)n - v\sum_{k=1}^{n-1} R_k - (k+c)(n-1) = vR_n - (k+c)$$

Le sens de variation de la suite (φ_n) dépend du signe de $\varphi_n - \varphi_{n-1}$:

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} \geqslant 0 \iff vR_n \geqslant k + c \iff R_n \geqslant \frac{k+c}{v}$$

Puisque $0 < \dfrac{k+c}{v} < 1,\ R_0 = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, et puisque (R_n) est une suite décroissante :

il existe un premier entier S tel que : $\quad \forall n \leqslant S,\ \varphi_n - \varphi_{n-1} \geqslant 0$ et $\forall n > S,\ \varphi_n - \varphi_{n-1} \leqslant 0$.

Le nombre φ_S est alors la valeur maximale de la suite (φ_n).

8. Calcul de S avec `Scilab`

On suppose que l'on a défini une fonction d'en-tête `function r = p(n)` qui renvoie la valeur de p_n.

Le script qui suit affiche $\varphi_0, \ldots, \varphi_S$ puis la valeur de S :

```
k = input("k = ") ; c = input("c = ") ; v = input("v = ") ;
n = 0; phi = 0 ; R = 1-p(0) ; disp(phi);

while R >= (k+c)/v
    n = n+1;
    phi = phi + v*R - (k+c);
    disp(phi)
    R = R - p(n);
end

disp("S = "); disp(n);
```

9. On rappelle que $V = \min(D, q)$ où $q = q_i + q_c$.

a) La variable aléatoire V est donc à valeurs dans $[\![0; q]\!]$; c'est une variable aléatoire finie, qui admet donc une espérance donnée par le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{+\infty} \min(n,q).\mathbb{P}(D=n) = \sum_{n=1}^{q-1} n\mathbb{P}(D=n) + \sum_{n=q}^{+\infty} q.\mathbb{P}(D=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{q-1} np_n + q\sum_{n=q}^{+\infty} \mathbb{P}(D=n) = \sum_{n=1}^{q-1} np_n + q\mathbb{P}(D \geqslant q)$$

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{n=1}^{q-1} np_n + qR_q$$

b) En reprenant la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = R_n - R_{n+1}$, la formule précédente devient :

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{n=1}^{q-1} n(R_n - R_{n+1}) + qR_q = \sum_{n=1}^{q-1} nR_n - \sum_{n=1}^{q-1} nR_{n+1} + qR_q$$

$$= \sum_{n=1}^{q-1} nR_n - \sum_{k=2}^{q}(k-1)R_k + qR_q = \underbrace{\sum_{n=1}^{q-1} nR_n - \sum_{k=2}^{q} kR_k}_{\text{télescopage}} + \sum_{k=2}^{q} R_k + qR_q$$

$$\mathbb{E}(V) = R_1 - qR_q + \sum_{k=2}^{q} R_k + qR_q = \sum_{n=1}^{q} R_n$$

10. On note, comme dans la partie II, $\beta(q_i, q_c)$ l'espérance du bénéfice B en fonction de q_i et q_c.

a) Si $q_c = 0$: alors $q = q_i$ et comme auparavant, $B = v.V - q_i.k$

et $\mathbb{E}(B) = v.\mathbb{E}(V) - q_i.k = v\sum_{j=1}^{q_i} R_j - (k+c)q_i + c.q_i = \varphi_{q_i} + c.q_i$.

b) Si $q_c > 0$: alors $q = q_i + q_c$ et $B = v.V - q_i.k - q_c.(k+c) - c_F$

et $\mathbb{E}(B) = v.\mathbb{E}(V) - (q_i + q_c).k - q_c.c - c_F = v\sum_{j=1}^{q_i+q_c} R_j - q.(k+c) + q_i.c - c_F = \varphi_{q_i+q_c} + q_i.c - c_F$.

Les formules obtenues étant très analogues à celles de la partie A, on peut établir que la stratégie à deux seuils reste valable dans le cas discret, les seuils étant alors des entiers.

c) En utilisant le script de la question 8 pour certaines valeurs de k, c et v, on a obtenu les valeurs suivantes, arrondies à deux chiffres après la virgule pour $\varphi_0, \ldots, \varphi_S$:

0 4 7.9 11.94 15.77 19.34 22.40 24.75 26.16 26.51

et $S = 9$. Sachant que $c_F = 2.5$: alors $c_F < \varphi_S$, et on cherche le premier entier r compris entre 0 et 9 tel que $\varphi_S - c_F < \varphi_r \iff 24.01 < \varphi_r$.

On obtient donc $r = 7$, valeur de q_i à partir de laquelle il est préférable de ne pas commander dans ce cas particulier.

III. Évolution du stock dans le temps

11. Soit n un entier naturel.

a) La variable aléatoire X_n prend comme valeur l'état du stock en fin de période n : comme il commence à $X_0 = 0$, et puisqu'il est toujours complété à la valeur S lorsqu'il est passé sous le seuil de renouvellement, il est certain que le stock sera à tout instant un entier compris entre 0 et S : $X_n(\Omega) \subset [\![0, S]\!]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = S) \end{pmatrix}$ qui représente la loi de X_n.

b) Par définition : pour tout couple (i,j) de $[\![0; S]\!]^2$, le coefficient $m_{i,j}$ représente la probabilité que le stock passe de j à i entre le début et la fin de la période n.

On peut donc écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (i,j) \in [\![0; S]\!]^2,\ m_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_n=j]}(X_{n+1} = i)$, sous réserve que l'événement $[X_n = j]$ par lequel on conditionne, n'est pas de probabilité nulle.

La forme de la relation voulue est bien connue : la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_n, donne :

$$\forall i \in [\![0; S]\!], \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{S} \mathbb{P}\big([X_n = j] \cap [X_{n+1} = i]\big)$$

⚠ La formule des probabilités composées qui donne :
$\mathbb{P}\big([X_n = j] \cap [X_{n+1} = i]\big) = \mathbb{P}(X_n = j) \times \mathbb{P}_{[X_n=j]}(X_{n+1} = i)$ ne peut s'écrire que si $\mathbb{P}(X_n = j) \neq 0$.

Si $P(X_n = j) = 0$, alors $P([X_n = j] \cap [X_{n+1} = i]) = 0$ (car $[X_n = j] \cap [X_{n+1} = i] \subset [X_n = j]$), mais la relation $\mathbb{P}\big([X_n = j] \cap [X_{n+1} = i]\big) = m_{i,j}.\mathbb{P}(X_n = j)$ est alors encore vraie puisque les deux membres sont nuls. L'égalité qu'on vient d'écrire est donc valable pour tout j de $[\![0; S]\!]$.

Bref : $\forall i \in [\![0; S]\!], \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{S} m_{i,j}.\mathbb{P}(X_n = j).$

Remarque : la digression concernant la validité de la formule suivant que $\mathbb{P}(X_n = j)$ est nul ou pas, peut paraître s'embarrasser de bien des détails... l'exactitude mathématique est à ce prix ! Il est peu probable cependant que l'on soit lourdement sanctionné si on applique directement et dans tous les cas, mais dans l'autre sens, comprendre et faire cette distinction subtile aura forcément un impact favorable sur le correcteur... !

La relation précédente correspond alors bien à la définition du produit matriciel : pour tout i de $[\![0; S]\!]$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = i)$ qui est la coefficient de ligne i de U_{n+1}, est la somme des produits de chaque élément $m_{i,j}$ de la i-ème ligne, j-ième colonne de la matrice M, avec l'élément de ligne j de la matrice U_n, ce qui justifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = MU_n$$

12. Étude d'un cas particulier

Dans cette question, on suppose que les constantes k, v, c, c_F sont telles que les seuils sont $r = 2$ et $S = 3$.

a) On peut alors évaluer $m_{i,j}$ pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 0 et 3 :

- ⋆ $\boxed{m_{0,0} = R_3}$: sachant que le stock est nul à l'instant n, il a été recomplété à la valeur 3 en fin de période n ; il est donc nul à nouveau à la fin de la période $n+1$ si et seulement si la demande lors de la période $n+1$, a été supérieure ou égale à 3 (tout est aussitôt vendu).
- ⋆ $\boxed{m_{0,1} = R_3}$: sachant que $[X_n = 1]$, le stock est recomplété à 3 en fin de période n, et est vide en fin de période $n+1$ à la même condition que précédemment.
- ⋆ $\boxed{m_{0,2} = R_2}$: sachant $[X_n = 2]$, alors on n'est pas sous le seuil de renouvellement ; rien n'est racheté, il n'y a que deux unités disponibles, ce qui justifie qu'il ne reste rien en fin de période $n+1$ si et seulement si la demande a été supérieure ou égale à 2.
- ⋆ $\boxed{m_{0,3} = R_3}$: sachant $[X_n = 3]$, rien n'a été rajouté ; le stock est alors vide à l'instant $n+1$ si et seulement si la demande a été supérieure ou égale à 3.
- ⋆ $\boxed{m_{1,0} = p_2}$: sachant $[X_n = 0]$, le stock a été complété à 3, et $[X_{n+1} = 1]$ est alors réalisé si et seulement si $[D_{n+1} = 2]$, dont la probabilité est p_2.
- ⋆ $\boxed{m_{1,1} = p_2}$: sachant $[X_n = 1]$, le stock est complété, donc comme précédemment $\mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(D_{n+1} = 2)p_2$.
- ⋆ $\boxed{m_{1,2} = p_1}$: sachant $[X_n = 2]$, le stock n'est pas complété, donc $\mathbb{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(D_{n+1} = 1) = p_1$.
- ⋆ De même, $m_{1,3} = \mathbb{P}_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(D_{n+1} = 2) = p_2$.
- ⋆ Selon des arguments tout à fait analogues aux précédents :

  $m_{2,0} = \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 2) = \mathbb{P}(D_{n+1} = 1) = p_1 = \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 2) = \mathbb{P}_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 2)$, tandis que $m_{2,2} = \mathbb{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 2) = \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = p_0$: le stock n'étant dans ce cas pas complété, il ne change pas que si la demande est nulle au cours de la période $n+1$.
- ⋆ De même : $m_{3,0} = \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 3) = \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = p_0$: le stock a été complété après la période n mais n'a pas été entamé au cours de la période $n+1$. Pour la même raison, $m_{1,3} = p_0$. On a aussi $m_{3,3} = p_0$ car le stock, déjà complet à la fin de la période n, ne peut le rester à la fin de la période $n+1$ que là encore la demande a été nulle au cours de celle-ci.

  Enfin, $m_{2,3} = 0$ est bien nulle : le stock n'étant pas complété, il ne peut passer de 2 à 3 au cours de la période $n+1$.

Remarque : on a pris le temps de justifier absolument toutes les probabilités conditionnelles ; dans le cadre d'une épreuve en temps limité, on n'a évidemment pas forcément le temps de tout détailler ! On peut considérer que justifier proprement les premières, puis aller de plus en plus à l'essentiel, est bien suffisant.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $b_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$, $c_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et $d_n = \mathbb{P}(X_n = 3)$.

b) i. Au vu des relations précédentes : pour $i = 2$ dans la relation obtenue en 11.b), et vu les valeurs des coefficients de la matrice M dans notre cas particulier :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} &= p_1.a_n + p_1.b_n + p_0.c_n + p_1.d_n = p_1(a_n + b_n + d_n) + p_0.c_n = p_1.(1 - c_n) + p_0.c_n \\ &= (p_0 - p_1).c_n + p_1\end{aligned}$$

Puisqu'en effet, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ par définition de la loi de la variable aléatoire X_n.

ii. La suite (c_n) est donc arithmético-géométrique ; pour la calculer explicitement, on introduit comme toujours une suite auxiliaire, notons-la ici (v_n), de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = c_n - \alpha$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= c_{n+1} - \alpha = (p_0 - p_1).c_n + p_1 - \alpha \\ &= (p_0 - p_1).(v_n + \alpha) + p_1 - \alpha \\ v_{n+1} &= (p_0 - p_1).v_n + (p_0 - p_1 - 1).\alpha + p_1\end{aligned}$$

On cherche un réel α tel que (v_n) soit géométrique, donc tel que :

$$(p_0 - p_1 - 1)\alpha + p_1 = 0 \iff p_1 = (1 - p_0 + p_1)\alpha \iff \alpha = \frac{p_1}{1 - p_0 + p_1}$$

Avec cette valeur de α, (v_n) est géométrique de raison $p_0 - p_1$, et de premier terme $v_0 = c_0 - \alpha = -\alpha$ puisque $c_0 = \mathbb{P}(X_0 = 2) = 0$ (vu que X_0 est certaine égale à 0).
Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = -\alpha.(p_0 - p_1)^n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = v_n + \alpha = \alpha.\big(1 - (p_0 - p_1)^n\big).$$

iii. On sait que p_0 et p_1 sont deux probabilités strictement comprises entre 0 et 1, donc : $0 < p_0 < 1$ et $-1 < -p_1 < 0 \Longrightarrow -1 < p_0 - p_1 < 1$, et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} (p_0 - p_1)^n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \alpha.\big(1 - (p_0 - p_1)^n\big) = \alpha = \frac{p_1}{1 - p_0 + p_1}$$

Limite qu'on note désormais γ.

c) De la même façon, et vu la matrice M :

- La suite (a_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = R_3.(a_n + b_n + d_n) + R_2.c_n = R_3.(1 - c_n) + R_2.c_n = (R_2 - R_3).c_n + R_3$$

  Cette relation se réécrit aussi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = p_2.c_{n-1} + R_3$ puisque $R_2 - R_3 = p_2$
  Comme également : $R_3 = 1 - p_0 - p_1 - p_2$, alors la suite (a_n) est bien convergente, avec

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = p_2.\gamma + 1 - p_0 - p_1 - p_2$$

- De même : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = p_2(a_n + b_n + d_n) + p_1.c_n = (p_1 - p_2).c_n + p_2$
  donc la suite (b_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = (p_1 - p_2).\gamma + p_2$$

- Enfin : $n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} = p_0(a_n + b_n + d_n) = p_0(1 - c_n)$, donc (d_n) converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = p_0(1 - \gamma).$$

d) Les quatre limites obtenues sont comprises entre 0 et 1 comme limites de suites de probabilités, et de plus leur somme vaut :

$$p_2.\gamma + 1 - p_0 - p_1 - p_2 + (p_1 - p_2).\gamma + p_2 + \gamma + p_0.(1 - \gamma) = (1 + p_1 - p_0).\gamma + 1 - p_1 = p_1 + 1 - p_1 = 1$$

Donc la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui a pour loi :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$p_2.\gamma + 1 - p_0 - p_1 - p_2$	$(p_1 - p_2).\gamma + p_2$	γ	$p_0.(1 - \gamma)$

13. Existence et unicité d'une loi de probabilité invariante par M

On reprend le cas général.

a) Pour tout j de $[\![0;S]\!]$: $m_{0,j}$ est la probabilité que le stock soit vide à la fin de la période n, alors qu'il contenait j unités au début de cette période.

- Si $j<r$, alors le stock a été complété à S au début de la période, et alors $m_{0,j}=\mathbb{P}(D_n=S)=p_S>0$ d'après l'hypothèses faite au début de cette partie III.
- Si $j\geqslant r$, alors le stock n'est pas complété et $m_{0,j}=\mathbb{P}(D_n=j)=p_j>0$ pour la même raison.

Dans tous les cas, $m_{0,j}$ est toujours bien strictement positif.

b) i. Pour tout $j\in[\![0;S]\!]$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{S}m_{i,j}=\sum_{i=0}^{S}\mathbb{P}_{[X_n=j]}(X_{n+1}=i)=1$ car quelle que soit la probabilité choisie (même conditionnelle comme ici), la somme des probabilités de la loi de X_{n+1} vaut 1.

ii. Le résultat précédent peut se traduire matriciellement : si $J=(1\ 1\ \ldots\ 1)$ est la matrice-ligne à $S+1$ colonnes ne contenant que des 1, alors par définition du produit matriciel, la relation démontrée à la question précédente signifie que :

$$JM=J$$

En appliquant l'opération de transposition aux deux membres de cette transposition, l'égalité est conservée :

$${}^{\mathrm{t}}JM={}^{\mathrm{t}}J\iff{}^{\mathrm{t}}M\,{}^{\mathrm{t}}J={}^{\mathrm{t}}J$$

d'après la formule pour la transposée d'un produit (${}^{\mathrm{t}}(AB)={}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A$). Or ${}^{\mathrm{t}}J$ est une matrice colonne non nulle : la dernière relation signifie que 1 est valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}M$, avec ${}^{\mathrm{t}}J$ pour vecteur propre associé.

iii. L'énoncé rappelle le résultat du cours : toute matrice a le même rang que sa transposée.
D'après ce qui précède : 1 étant valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}M$, alors $\mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}M-I_{S+1})<S+1$.
Et comme ${}^{\mathrm{t}}(M-I_{S+1})={}^{\mathrm{t}}M-{}^{\mathrm{t}}I_{S+1}={}^{\mathrm{t}}M-I_{S+1}$ (vu que I_{S+1} est diagonale, donc symétrique) :

$$\mathrm{rg}({}^{\mathrm{t}}M-I_{S+1})<S+1\iff\mathrm{rg}(M-I_{S+1})<S+1\iff 1\text{ est valeur propre de }M$$

c) Soit U un vecteur colonne propre de M associé à la valeur propre 1, de coefficients $u_0,\ldots,u_S$. On sait qu'alors pour tout réel λ non nul, $V=\lambda U$ est encore vecteur propre de M pour la valeur propre 1. Si on note $v_0,\ldots,v_S$ les coefficients de V, on veut plus spécifiquement que :

$$\sum_{j=0}^{S}|v_j|=1\iff|\lambda|\sum_{i=0}^{S}|u_j|=1\iff|\lambda|=\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{S}|u_j|}$$

Comme U est non-nul, on est sûr que $\displaystyle\sum_{j=0}^{S}|u_j|>0$.

Il y a donc deux valeurs possibles et opposées pour le choix de λ : $\dfrac{1}{\sum\limits_{j=0}^{S}|u_j|}$ ou $-\dfrac{1}{\sum\limits_{j=0}^{S}|u_j|}$.

L'un des deux choix au moins, assure donc que $V=\lambda U$ aura au moins un coefficient strictement positif et que $\displaystyle\sum_{j=0}^{S}|v_j|=1$.

d) On suppose que V a aussi l'un au moins de ses coefficients qui est strictement négatif. Alors, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{j=0}^{S}m_{0,j}v_j\right|\leqslant\sum_{j=0}^{S}|m_{0,j}|.|v_j|=\sum_{j=0}^{S}m_{0,j}|v_j|$$

car $m_{0,j} > 0$ pour tout j de $[\![0; S]\!]$. On peut même affirmer que l'inégalité est stricte :
$\left|\sum_{j=0}^{S} m_{0,j} v_j\right| < \sum_{j=0}^{S} m_{0,j}.|v_j|$ car le cas d'égalité n'a lieu que lorsque tous les termes sont de même signe, ce qui n'est pas le cas ici au vu des hypothèses faites.

Par contre, pour tout i de $[\![1, S]\!]$, la nullité possible de $m_{i,j}$ permet seulement d'écrire, comme pour la première inégalité de cette question :

$$\left|\sum_{j=0}^{S} m_{i,j} v_j\right| \leqslant \sum_{j=0}^{S} m_{i,j} |v_j|$$

Or, en n'oubliant pas que V est vecteur propre de M pour la valeur propre 1 : la relation $MV = V$ se traduit coefficient par coefficient, par les égalités

$$\sum_{j=0}^{S} m_{0,j} v_j = v_0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, S]\!], \quad \sum_{j=0}^{S} m_{i,j} v_j = v_i$$

Mais alors les inégalités précédentes se réécrivent :

$$|v_0| < \sum_{j=0}^{S} m_{0,j} |v_j| \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1; S]\!], \quad |v_i| \leqslant \sum_{j=0}^{S} m_{i,j} |v_j|$$

Et la sommation de toutes ces inégalités, dont l'une est stricte, donne alors :

$$\sum_{i=0}^{S} |v_i| < \sum_{i=0}^{S} \sum_{j=0}^{S} m_{i,j} |v_j| \iff 1 < \sum_{j=0}^{S} |v_j| \underbrace{\sum_{i=0}^{S} m_{i,j}}_{=1} \iff 1 < \sum_{j=0}^{S} |v_j| \iff 1 < 1$$

ce qui donne la contradiction voulue. Il est donc absurde de supposer que l'un des coefficients de V est négatif : ils sont donc tous positifs.

e) On suppose qu'il existe un deuxième vecteur colonne W, différent de V, vérifiant les mêmes propriétés que V.

On sait qu'alors, pour tout réel $\alpha > 0$, le vecteur $\alpha(V - W)$ est non nul (puisque $V \neq W$) et est vecteur propre de M puisque le sous-espace propre pour la valeur propre 1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{S+1,1}(\mathbb{R})$.

Une fois de plus, on veut que la somme des valeurs absolues des coefficients de ce vecteur soit égale à 1, c'est-à-dire :

$$\sum_{j=0}^{S} |\alpha(v_j - w_j)| = 1 \iff \alpha \sum_{j=0}^{S} |v_i - w_j| = 1$$

Comme $V \neq W$, l'un des coefficients $v_j - w_j$ au moins est non nul, et le terme $|v_j - w_j|$ correspondant est strictement positif, ce qui permet de définir le réel $\alpha = \dfrac{1}{\sum\limits_{j=0}^{S} |v_j - w_j|} > 0$ tel que $\alpha(V - W)$ est vecteur propre de M pour la valeur propre 1, dont la somme des valeurs absolues des coefficients est égale à 1.

Il reste à justifier qu'un au moins des coefficients de $\alpha(V - W)$ est strictement positif ; en supposant que ce n'est pas le cas, cela signifie que : $\forall j \in [\![0; S]\!]$, $0 \leqslant v_j < w_j$.

Il est alors impossible d'avoir à la fois $\sum\limits_{j=0}^{S} |v_j| = 1 = \sum\limits_{j=0}^{S} v_j = 1$ et $\sum\limits_{j=0}^{S} w_j = 1$!

L'un des coefficients au moins de $\alpha(V-W)$ est donc strictement positif, et $\alpha(V-W)$ vérifie donc les mêmes propriétés que V. Les coefficients de $V-W$ sont donc, d'après la question précédente, tous positifs : $\forall j \in [\![0;S]\!],\ v_i \geqslant w_j$ et l'une au moins de ces inégalités est stricte, sans quoi $V=W$.

Là encore, cela implique que $\sum_{j=0}^{S} v_j > \sum_{j=0}^{S} w_j$, ce qui est contradictoire avec le fait que ces deux sommes devraient toutes les deux être égales à 1.

On en conclut que le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 : sinon, il existerait un vecteur propre pour la valeur propre 1 qui soit non colinéaire au vecteur U introduit en 13.c) : par le même procédé qui a permis de construire V à partir de U, on obtiendrait ainsi un vecteur W qui a les mêmes propriétés que V tout en étant non colinéaire, donc différent, de celui-ci.

f) On suppose ici que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une certaine variable aléatoire X.
Alors X, comme toutes les variables aléatoires X_n, est à valeurs dans $[\![0;S]\!]$, et la convergence en loi signifie :

$$\forall i \in [\![0,S]\!],\quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n=i)=\mathbb{P}(X=i)$$

Le passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation obtenue en 11. b) donne alors :

$$\forall i \in [\![0;S]\!],\quad \mathbb{P}(X=i)=\sum_{j=0}^{S} m_{i,j}\mathbb{P}(X=j)$$

ce qui, matriciellement, s'écrit : $\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X=0)\\ \mathbb{P}(X=1)\\ \vdots\\ \mathbb{P}(X=S)\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X=0)\\ \mathbb{P}(X=1)\\ \vdots\\ \mathbb{P}(X=S)\end{pmatrix}$.

Tous les coefficients de ce vecteur colonne sont positifs, et leur somme vaut 1 : l'un d'entre eux au moins est strictement positif, donc le vecteur $\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X=0)\\ \mathbb{P}(X=1)\\ \vdots\\ \mathbb{P}(X=S)\end{pmatrix}$ vérifie les mêmes propriétés que V.

Par unicité d'un tel vecteur, on conclut qu'effectivement : $\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X=0)\\ \mathbb{P}(X=1)\\ \vdots\\ \mathbb{P}(X=S)\end{pmatrix} = V$.

En cas de convergence en loi, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a donc qu'une seule loi limite possible.

★★★ FIN DU SUJET ★★★