MATHÉMATIQUES II - ESSEC E 2008

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Préliminaires

Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ tel que : $\quad \left|\sum_{j=1}^N v_j\right| = \sum_{j=1}^N |v_j| \qquad (E)$

P1. Pour tout réel x :

- Soit $x \geqslant 0$, et alors $|x| - x = x - x = 0$
- Soit $x < 0$, alors $|x| - x = -x - x = -2x > 0$

Donc, en effet : $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ |x| - x \geqslant 0.$

P2. Étude du cas $N = 3$.

P2a.

$$(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_2)^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + 2|v_1||v_2| + 2|v_1||v_3| + 2|v_2||v_3| - (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + 2v_1v_2 + 2v_1v_3 + 2v_2v_3)$$
$$= 2|v_1v_2| + 2|v_1v_3| + 2|v_2v_3| - 2v_1v_2 - 2v_1v_3 - 2v_2v_3 \qquad \text{car } |v_i|^2 = v_i^2$$
$$= 2(|v_1v_2| - v_1v_2) + 2(|v_1v_3| - v_1v_3) + 2(|v_2v_3| - v_2v_3)$$

P2b. Comme $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ vérifie (E) :

$|v_1 + v_2 + v_3| = |v_1| + |v_2| + |v_3|$, donc $(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 = |v_1 + v_2 + v_3|^2 = (v_1 + v_2 + v_3)^2$, et par conséquent l'expression précédemment calculée est nulle :

$$2(|v_1v_2| - v_1v_2) + 2(|v_1v_3| - v_1v_3) + 2(|v_2v_3| - v_2v_3) = 0$$

Or : comme $|x| - x$ est positif pour tout réel x (P1), cette **somme** de réels **positifs** est nulle, si et seulement si chacun de ses termes est nul, soit :

$$|v_1v_2| = v_1v_2, \quad |v_1v_3| = v_1v_3, \quad |v_2v_3| = v_2v_3$$

En conséquence : pour tout couple $(j, j') \in \{1, 2, 3\}$ tel que $j \neq j'$ et $|v_jv_{j'}| > 0$, alors $v_jv_{j'} > 0$ aussi, ce qui est vrai si et seulement si v_j et $v_{j'}$ sont non nuls et de même signe.

P2c. Montrer que ($|V| = V$ ou $|V| = -V$) revient à prouver que les coordonnées du vecteur V sont toutes de même signe.

Une coordonnée nulle v_i de V, vérifie à la fois : $v_i = 0 = |v_i| = -|v_i|$, tandis que la question P2b. a prouvé que les coordonnées non nulles de V sont toutes duex à deux de même signe : elles sont donc toutes positives (et alors $|V| = V$), ou toutes négatives (et alors $|V| = -V$).

P3. Dans le cas général où $N \geqslant 2$, on reprend le même schéma de démonstration, qu'on généralise :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{N}|v_i|\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{N}v_i\right)^2&=\sum_{i=1}^{N}\underbrace{|v_i|^2}_{=v_i^2}+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}|v_iv_j|-\left(\sum_{i=1}^{N}v_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}v_iv_j\right)\\&=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}(|v_iv_j|-v_iv_j)\end{aligned}$$

Cette somme de termes positifs (d'après P1.), est nulle si et seulement si chaque terme de la somme est nul :

$$\forall (i,j)\in[\![1,N]\!]^2,\ i<j \Longrightarrow |v_iv_j|=v_iv_j \Longrightarrow v_i \text{ et } v_j \text{ sont de même signe}$$

Les coefficients non-nuls de V sont donc deux à deux de mêmes signes, donc tous de même signe, ce qui signifie bien que :

$$\text{Si } V \text{vérifie } (E),\ \text{alors } (|V|=V \text{ ou } |V|=-V)$$

Partie I : Google et Pagerank

A. Étude de la matrice de Google

I.A.1. Pour tout $(i,j)\in[\![1,N]\!]^2$: $A(i,j)\geqslant 0$, $\rho>0$ et surtout $1-\rho>0$ et $N>0$, donc :

$$\forall (i,j)\in[\![1,N]\!]^2,\quad G(i,j)=\rho.A(i,j)+\frac{1-\rho}{N}>0.$$

I.A.2. Soit $j\in[\![1,N]\!]$ tel que $d_j=0$, alors : $A(i,j)=0$ dès que $i\neq j$, et $A(j,j)=1$, donc :

$$\sum_{i=1}^{N}G(i,j)=\rho\sum_{i=1}^{N}A(i,j)+\sum_{i=1}^{N}\frac{1-\rho}{N}=\rho.A(j,j)+N\times\frac{1-\rho}{N}=\rho+1-\rho=1$$

I.A.3. Soit $j\in[\![1,N]\!]$ tel que $d_j>0$, alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}G(i,j)&=\sum_{\substack{i\in[\![1,N]\!]\\ j\text{ pointe vers }i}}G(i,j)+\sum_{\substack{i\in[\![1,N]\!]\\ j\text{ ne pointe pas vers }i}}G(i,j)\\&=\sum_{\substack{i\in[\![1,N]\!]\\ j\text{ pointe vers }i}}\rho.\frac{1}{d_j}+\frac{1-\rho}{N}+\sum_{\substack{i\in[\![1,N]\!]\\ j\text{ ne pointe pas vers }i}}\rho.0+\frac{1-\rho}{N}\\&=\rho.d_j.\frac{1}{d_j}+N.\frac{1-\rho}{N}=\rho+1-\rho=1\end{aligned}$$

I.A.1. On déduit évidemment de ce résultat que : $\forall j\in[\![1,N]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}G(i,j)=1$, donc que la matrice G est **stochastique** (et strictement positive, d'après I.A.1.).

I.A.5. Le vecteur $\begin{pmatrix}p(1)\\ \vdots\\ p(N)\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, défini par (S), vérifie (en admettant qu'il existe), par définition du produit matriciel d'une matrice carrée avec une matrice colonne :

$$G\begin{pmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{N} G(1,j)p(j) \\ \sum\limits_{j=1}^{N} G(2,j)p(j) \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{B} G(N,j)p(j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \\ \vdots \\ p(N) \end{pmatrix}$$

d'après (S). Il s'agit donc bien d'un vecteur invariant par G.

B. Modèle du surfeur sur le Web

I.B.1. On note $V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ \vdots \\ P(X_n = N) \end{pmatrix}$; alors, par définition de la loi d'une variable aléatoire :

- $\forall i \in [\![1, N]\!], \quad (v_n)_i = P(X_n = i) \geqslant 0$ puisque c'est une probabilité.
- $||V_n||_1 = \sum\limits_{i=1}^{N} |(v_n)_i| = \sum\limits_{i=1}^{N} P(X_n = i) = 1$

Donc V_n est bien un vecteur de probabilité.

I.B.2. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1, N]\!]^2$:

Si $P(X_{n-1} = j) \neq 0$, alors $\quad P(\{X_n = i\} \cap \{X_{n-1} = j\}) = P(X_{n-1} = j) \times P_{\{X_{n-1}=j\}}(X_n = i) = (v_{n-1})_j \times G(i,j)$

d'après les définitions de l'énoncé. La relation : $P(\{X_n = i\} \cap \{X_{n-1} = j\}) = (v_{n-1})_j \times G(i,j)$ est encore vraie si $P(X_{n-1} = j) = (v_{n-1})_j = 0$, car alors les deux membres sont nuls.

I.B.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit bien sûr ici d'utiliser, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $(\{X_{n-1} = j\})_{1 \leqslant j \leqslant N}$ associé à la variable aléatoire X_{n-1} :

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, N]\!], \quad P(X_n = i) &= \sum_{j=1}^{N} P(\{X_{n-1} = j\} \cap \{X_n = i\}) \\ &= \sum_{j=1}^{N} G(i,j) \times (v_{n-1})_j \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \forall i \in [\![1, N]\!], \quad (v_n)_i = (GV_{n-1})_i$$

Ce qui donne bien l'égalité matricielle : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ V_n = GV_{n-1}$.

I.B.4. La relation de "type géométrique" obtenue à la question précédente, amène alors en effet à la relation générale :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad V_k = G^k V_0.$$

ce que prouve une récurrence immédiate.

Partie II : Matrices stochastiques

Le but de cette deuxième partie était de prouver l'existence et l'unicité d'un vecteur de probabilité invariant pour une matrice stochastique strictement positive.

A. Étude d'un exemple

On considère une matrice $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ stochastique et strictement positive, qui peut se mettre sous la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix} \qquad \text{avec } q \in]0,1[\text{ et } q' \in]0,1[$$

II.A.1. On cherche les vecteurs $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant :

$$QV = V \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} (1-q)x & + & q'y & = & x \\ qx & + & (1-q')y & = & y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} -qx & + & qy & = & 0 \\ qx & - & q'y & = & 0 \end{array} \right. \iff y = \frac{q}{q'}x$$

L'ensemble solution cherché est le sous-espace vectoriel :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{q}{q'}x \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{q}{q'} \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix} \right)$$

II.A.2. On cherche donc ici un vecteur V de la forme : $\lambda . \begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}$ tel que :

$$\begin{cases} \lambda . q' \geqslant 0 \\ \lambda . q \geqslant 0 \\ \lambda . q' + \lambda . q = 1 \end{cases} \iff \lambda = \frac{1}{q+q'}$$

Le réel λ est bien défini de façon unique car $q > 0$ et $q' > 0$, et $V_\infty = \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' \\ q \end{pmatrix}$ est bien l'unique vecteur de probabilité invariant par Q.

II.A.3. On montre par récurrence sur n, que :

$$\mathcal{P}(n) : \quad Q^n = \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$:

$$\frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{1-q-q'}{q+q'} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q+q' & 0 \\ 0 & q+q' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix} = Q$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie :

$$Q^{n+1} = Q \times Q^n \overset{H.R.}{=} Q \times \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'} . Q \times \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$$

Le premier produit matriciel est celui de Q par une matrice dont les deux colonnes sont en fait identiques au vecteur V_∞ qui est invariant par Q.

On peut donc écrire sans calcul supplémentaire que : $Q \times \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} = \frac{1}{q+q'} \begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix}$.

Par ailleurs : $Q \times \begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q-q^2-qq' & -q'+qq'+q'^2 \\ q^2-q+qq' & -qq'+q'-q'^2 \end{pmatrix} = (1-q-q').\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$, donc on a bien :

$$Q^{n+1} = \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^{n+1}}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

B. Existence d'un vecteur de probabilité invariant

Dans cette section II.B., $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique.

II.B.1. On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$: alors ${}^tQU$ est encore un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, où :

$$\forall i \in [\![1,N]\!], \quad \left({}^tQU\right)_i = \sum_{j=1}^{N} ({}^tQ)(i,j)U_j = \sum_{j=1}^{N} Q(j,i) \times 1 = 1$$

puisqu'on a reconnu la somme des termes de la colonne i de Q, qui est stochastique.

On a donc obtenu : ${}^tQU = U$.

II.B.2. On utilise ici une équivalence du cours sur les matrices inversibles, vue en ECE1 :

$$Q - I_N \text{ est inversible} \iff {}^t(Q-I_N) \text{ est inversible} \iff {}^tQ - I_N \text{ est inversible}$$

Puisque ${}^t(Q-I_N) = {}^tQ - {}^tI_N = {}^tQ - I_N$ par linéarité de la transposée, et puisque I_N est une matrice symétrique (car diagonale).

II.B.3. D'après II.B.1., le vecteur U non nul vérifie : ${}^tQU = U \iff ({}^tQ - I_N)U = 0$, donc U est vecteur propre de ${}^tQ$ pour la valeur propre 1, et ${}^tQ - I_N$ n'est **pas** inversible.

Mais alors : l'équivalence rappelée en II.B.2. affirme que $Q - I_N$ n'est **pas non plus inversible**, ce qui siginfie bien que **1 est valeur propre de** Q.

Soit λ une valeur propre réel de Q telle que $|\lambda| = 1$ (donc ici : $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$), et $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Q associé à la valeur propre λ.

II.B.4. Le vecteur $Q|V| - |V|$ a pour coordonnées : $\forall i \in [\![1,N]\!], \ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)|v_j| - |v_i|$.

Or la relation : $QV = \lambda.V$ vérifiée par le vecteur propre V, signifie : $\forall i \in [\![1,N]\!], \ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)v_j = \lambda.v_i$.

Ainsi : $\forall i \in [\![1,N]\!], \ \left|\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)v_j\right| = |\lambda||v_i| = |v_i|$ puisque $|\lambda| = 1$. Or :

$$\forall i \in [\![1,N]\!], \ \left|\sum_{i=1}^{N} Q(i,j)v_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |Q(i,j)||v_j| \iff \left|\sum_{j=1}^{N} Q(i,j)v_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)|v_j|$$

d'après l'inégalité triangulaire, sachant que les coefficients $Q(i,j)$ sont tous positifs ou nuls puisque Q est stochastique. Ces relations donnent donc :

$$\forall i \in [\![1,N]\!], \quad |v_i| \leqslant \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)|v_j| \iff \forall i \in [\![1,N]\!], \quad \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)|v_j| - |v_i| \geqslant 0$$

On a bien démontré ainsi que le vecteur $Q|V| - |V|$ est positif.

II.B.5. On somme comme suggéré, les composantes du vecteur $Q|V|-|V|$:

$$\sum_{i=1}^{N}(Q|V|-|V|)_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}Q(i,j)|v_j|\right) - \sum_{i=1}^{N}|v_i|$$
$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}Q(i,j)|v_j| - \sum_{i=1}^{N}|v_i| \quad \text{interversion des symobles } \sum$$
$$= \sum_{j=1}^{N}|v_j|.\underbrace{\sum_{i=1}^{N}Q(i,j)}_{\substack{=1\text{: somme de la}\\ j\text{-ième colonne de } Q}} - \sum_{i=1}^{N}|v_i| = ||V||_1 - ||V||_1 = 0$$

Bilan : $Q|V|-|V|$ est un vecteur *positif* dont la somme des coordonnées est *nulle* : toutes ses coordonnées sont donc nulles, et $Q|V|-|V|$ est le vecteur nul !

$$\text{Ainsi :} \quad Q|V|-|V| = 0_{N,1} \iff Q|V| = |V| \quad \text{et } |V| \text{ est bien invariant par } Q$$

II.B.6. Les deux questions précédentes permettent de construire un vecteur de probabilité invariant par Q :

- Comme 1 est bien valeur propre de Q, il existe un vecteur non-nul V tel que $QV = V$, et alors $Q|V| = |V|$ avec $|V| \neq 0_{N,1}$ donne bien un vecteur *positif* invariant par Q.
- Le vecteur $|V|$ vérifie : $||\ |V|\ ||_1 = ||V||_1 = \sum_{i=1}^{N}|v_i| > 0$, et alors, à l'exemple de ce qui a été fait en II.A.2. :
  $U = \frac{1}{||V||_1}.|V|$ est un vecteur positif, non nul, vérifiant

$$QU = \frac{1}{||V||_1}Q|V| = \frac{1}{||V||_1}.|V| = U \text{ et } \forall i \in [\![1,N]\!],\ u_i = \frac{|v_i|}{||V||_1} \geqslant 0 \text{ avec } \sum_{i=1}^{N}u_i = \frac{1}{||V||_1}\sum_{i=1}^{N}|v_i| = 1$$

C'est-à-dire que U est bien un vecteur de probabilité invariant par Q.

C. Unicité d'un vecteur de probabilité invariant

Dans cette section II.C., $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique strictement positive : on sait d'après II.B.6. qu'il existe au moins un vecteur de probabilité invariant par Q noté $V_\infty = \begin{pmatrix}(v_\infty)_1\\ \vdots \\ (v_\infty)_N\end{pmatrix}$.

II.C.1. Soit V un vecteur positif invariant par Q : $V = 0_{N,1}$ est bien un vecteur possible, il s'agit sinon de montrer qu'aucune des coordonnées de V n'est nulle.
Supposons pour cela qu'il existe un entier $i_0 \in [\![1,N]\!]$ tel que $v_{i_0} = 0$:
La condition d'invariance $QV = V$ donne alors, à la i_0-ième coordonnée, la relation :

$$\sum_{j=1}^{N}Q(i_0,j)v_j = v_{i_0}$$

où : $\forall j \in [\![1,N]\!],\ Q(i_0,j) > 0$ et $v_j \geqslant 0$. Cette somme de réels positifs ne peut être nulle que si **chacun** des termes est nul, soit :

$$\forall j \in [\![1,N]\!],\ Q(i_0,j)v_j = 0 \Longrightarrow \forall j \in [\![1,N]\!],\ v_j = 0 \text{ puisque } Q(i_0,j) > 0$$

Bilan : si l'un des v_i est nul, alors toutes les coordonnées de V sont nulles et $V = 0_{N,1}$. Sinon, aucune des coordonnées n'est nulle, toutes sont donc strictement positives et V est strictement positif.

II.C.2. On a vu que V_∞ est un vecteur positif invariant par Q, construit à partir d'un vecteur propre de Q, donc il n'est pas nul : il est par conséquent strictement positif, d'après ce qui précède.

On considère à présent un autre vecteur de probabilité noté $W_\infty = \begin{pmatrix} (w_\infty)_1 \\ \vdots \\ (w_\infty)_N \end{pmatrix}$, invariant par Q.

Puis on définit : $\alpha = \min \left\{ \dfrac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant N \right\} = \dfrac{(w_\infty)_{i_0}}{(v_\infty)_{i_0}}$ et $V = W_\infty - \alpha.V_\infty$.

II.C.3. Comme V_∞ et W_∞ sont invariants par Q :

$$QV = QW_\infty - \alpha.QV_\infty = W_\infty - \alpha.V_\infty = V$$

II.C.4. Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$: $v_i = (w_\infty)_i - \alpha.(v_\infty)_i = \underbrace{(v_\infty)_i}_{>0} \times \underbrace{\left(\dfrac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i} - \dfrac{(w_\infty)_{i_0}}{(v_\infty)_{i_0}} \right)}_{\geqslant 0 \text{ par définition de } \alpha} \geqslant 0$,

donc V est un vecteur positif. Mais pour $i = i_0$, le facteur de droite est nul, et $v_{i_0} = 0$, donc V n'est pas strictement positif.

II.C.5. Le vecteur V est positif, invariant par Q mais pas strictement positif : d'après II.C.1., on en conclut donc que V est nul, c'est-à-dire : $W_\infty = \alpha.V_\infty$.

II.C.6. Il reste ici à prendre en compte que V_∞ et W_∞ sont des vecteurs de probabilité, donc :

$$\sum_{i=1}^{N} (w_\infty)_i = 1 = \sum_{i=1}^{N} \alpha.(v_\infty) = \alpha \sum_{i=1}^{n} (v_\infty)_i \iff \alpha = 1$$

ce qui implique bien : $W_\infty = V_\infty$.

On reprend jusqu'à la fin de cette partie les notations de la partie I sur Google et la notion de PageRank.

II.C.7. La résolution du système (S) correspond à la recherche d'un vecteur $P = \begin{pmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(N) \end{pmatrix}$, vecteur de probabilité invariant par G au vu de la deuxième condition.

Comme G a été démontrée stochastique, strictement positive (questions I.A.1. et I.A.4.) : il existe bien, d'après II.B. et II.C., un unique vecteur de probabilité invariant par G, c'est-à-dire une unique solution au système (S).

II.C.8. Pour tout entier $i \in [\![1, N]\!]$:

$$p(i) = \sum_{j=1}^{N} G(i,j)p(j) = \rho \sum_{j=1}^{N} A(i,j)p(j) + \frac{1-\rho}{N} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} p(j)}_{=1} = \underbrace{\rho}_{>0} \sum_{j=1}^{N} \underbrace{A(i,j)}_{\geqslant 0} \underbrace{p(j)}_{\geqslant 0} + \frac{1-\rho}{N} \geqslant \frac{1-\rho}{N}$$

II.C.9. La condition $\rho < 1$ assure que $p(i) > 0$ pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, ce qui assure l'unicité de ce vecteur de probabilité strictement positif, invariant par G d'après l'étude précédente.

Si $\rho = 1$, $N = 3$: alors $G = A$ peut être égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si chacune des trois pages ne pointe que vers elle-même ; dans ce cas, tout vecteur de probabilité est invariant par G ! Et il n'y a pas du tout unicité de la solution.

Partie III : Validation du PageRank

Dans toute cette partie III, on considère $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice stochastique strictement positive. On note V_∞ l'unique vecteur de probabilité invariant par Q.

A. Valeurs propres de Q

III.A.1. Pour tout vecteur $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$:

$$||QV||_1 = \sum_{i=1}^{N} |QV|_i = \sum_{i=1}^{N} \left| \sum_{j=1}^{N} Q(i,j)v_j \right| \leqslant \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \underbrace{|Q(i,j)|}_{=Q(i,j)\geqslant 0} |v_j| \quad \text{(inégalité triangulaire)}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} |v_j| . \underbrace{\sum_{i=1}^{N} Q(i,j)}_{=1}$$

$$||QV||_1 \leqslant ||V||_1$$

Si de plus V est positif : les coefficients $Q(i,j)$ et v_j sont tous positifs, et :

$$||QV||_1 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} Q(i,j)v_j = \sum_{j=1}^{N} v_j . \sum_{i=1}^{N} Q(i,j) = \sum_{j=1}^{N} v_j = ||V||_1$$

III.A.2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(Q)$ une valeur propre de Q, et $V \neq 0_{N,1}$ un vecteur propre associé :

$$QV = \lambda.V \Longrightarrow ||QV||_1 = ||\lambda.V||_1 = \sum_{i=1}^{N} |\lambda v_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{N} |v_i| = |\lambda|.||V||_1$$

Ainsi : $||QV||_1 \leqslant ||V||_1$ se réécrit : $\quad |\lambda|.||V||_1 \leqslant ||V||_1 \iff |\lambda| \leqslant 1$ puisque $||V||_1 > 0$ (vu que $V \neq 0_{N,1}$).

Soient λ une valeur propre réelle de Q telle que $|\lambda| = 1$, et $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Q associé à λ tel que $||V||_1 = 1$. On sait grâce au II.B.5. que $|V| = V_\infty$.

III.A.3. D'après les propriétés de V :

$$\left| \sum_{j=1}^{N} Q(1,j)v_j \right| = |(QV)_1| = |(\lambda.V)_1| = |\lambda|.|v_1| = |v_1|$$

Mais par ailleurs : $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)|v_j| = (Q|V|)_1 = (QV_\infty)_1 = (v_\infty)_1 = |v_1|$,

puisque $|V| = V_\infty$ est invariant par Q. On a bien :

$$\left| \sum_{j=1}^{N} Q(1,j)v_j \right| = \sum_{j=1}^{N} Q(1,j)|v_j|$$

III.A.4. Le vecteur $W = \begin{pmatrix} Q(1,1)v_1 \\ \vdots \\ Q(1,N)v_N \end{pmatrix}$ vérifie donc les conditions du préliminaire, et ainsi :

$$|W| = W \text{ ou } |W| = -W$$

$$\iff \forall j \in [\![1,N]\!],\ |Q(1,j)v_j| = Q(1,j)v_j \text{ ou } \forall j \in [\![1,N]\!],\ |Q(1,j)v_j| = -Q(1,j)v_j$$

$$\iff \forall j \in [\![1,N]\!],\ |v_j| = v_j \text{ ou } \forall j \in [\![1,N]\!],\ |v_j| = -v_j \quad \text{puisque } Q(1,j) > 0$$

On a donc : $\quad V = |V| = V_\infty$ ou $V = -|V| = -V_\infty$.
Dans tous les cas, V est colinéaire à V_∞ qui est vecteur propre de Q pour la valeur propre 1, donc V appartient aussi au sous-espace propre pour la valeur propre 1, et :

$$\lambda = 1$$

B. Convergences

On fera dans cette section III.B. l'hypothèse supplémentaire que Q est diagonalisable.

III.B.1. L'hypothèse faite signifie qu'il existe une matrice diagonale d et une patrice inversible S telles que :

$$Q = SDS^{-1}$$

Une récurrence simple et très classique donne alors la relation plus générale :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Q^n = SD^nS^{-1}$$

III.B.2. La matrice D a pour éléments diagonaux les valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ de Q. On sait que :

- $\forall i \in [\![1, N]\!],\ |\lambda_i| \leqslant 1$.
- Si $|\lambda| = 1$, alors $\lambda = 1$: -1 n'est donc pas *pas* valeur propre de Q, et toutes les autres valeurs propres de Q vérifient donc : $|\lambda_i| < 1$.
- Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est toujours colinéaire à V_∞ : le sous-espace propre $E_1(Q)$ associé à la valeur propre 1 est donc $\mathrm{Vect}(V_\infty)$, de dimension 1, et $\lambda_i = 1$ est par conséquent présent **une seule fois** sur la diagonale de d.

III.B.3. Quitte à échanger l'ordre des valeurs propres sur la diagonale de D (et donc en fonction, l'ordre des vecteurs propres dans la matrice de passage S), on peut supposer que :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Mais alors, d'après les propriétés des matrices diagonales :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D^n = \begin{pmatrix} 1^n & & (0) \\ & (\lambda_2)^n & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & (\lambda_N)^n \end{pmatrix}, \quad \text{et } Q^n = SD^nS^{-1} = S \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & (\lambda_2)^n & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & (\lambda_N)^n \end{pmatrix} S^{-1}$$

Il est alors clair, selon la définition de la convergence matricielle que la suite $(Q^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $Q_\infty = S \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 0 \end{pmatrix} S^{-1}$.

III.B.4. L'idée derrière cette question est en fait de voir que le produit de deux matrices stochastiques, est encore une matrice stochastique.
Adoptons ici le point de vue suivant, issu en fait du calcul réalisé en II.B.1. :

Une matrice Q est stochastique si et seulement si elle est positive et ${}^tQU = U$, où U est le vecteur de $\mathcal{M}_{N,1}$ sont toutes les coordonnées valent 1. On a vu en effet que ${}^tQU$ est le vecteur dont chaque coordonnée les la somme des coefficients de la colonne de Q de même indice.

Soient alors $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$: alors leur produit AB est encore une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, positive puisque :

$$\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2,\ (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} a_{i,k} \times b_{k,j}$$

est une somme de produits de réels positifs.

De plus : ${}^t(AB)U = {}^tB{}^tAU = {}^tBU = U$ en utilisant sucessivement le fait que A, puis B est stochastique.

On a donc bien montré que le produit AB de deux matrices stochastiques A et B, est encore une matrice stochastique.

Une récurrence immédiate montre alors que : les puissances successives Q^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ de la matrice stochastique Q, sont toutes stochastiques.

La limite Q_∞ de la suite $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2,\ Q_\infty(i,j) = \lim_{n\to+\infty} Q^n(i,j) \geqslant 0$$

tous les coefficients de Q_∞ sont en effet les limites de suites positives.

De plus : ${}^tQ_\infty U$ est alors la limite, au sens matriciel, de ${}^t(Q^n)U$ qui est constant égal à U ; évidemment, on a alors ${}^tQ_\infty U = U$, ce qui achève de prouver que Q_∞ est encore une matrice stochastique.

III.B.5. On sait qu'au sens matriciel du terme : $\lim_{n\to+\infty} Q^n = Q_\infty$, mais alors :

On a aussi $\lim_{n\to+\infty} Q^{n+1} = Q_\infty$, et par ailleurs $\lim_{n\to+\infty} Q^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} Q \times Q^n = Q \times Q_\infty$: il n'est pas difficile en effet de constater que la convergence matricielle se faisant terme à terme, le passage à la limite est compatible avec le produit matriciel.

Le principe d'unicité de la limite s'applique donc aussi à la suite (Q^{n+1}), qui donne effectivement :

$$Q \times Q_\infty = Q_\infty$$

III.B.6. En notant $Q_\infty^{(1)}, \ldots, Q_\infty^{(N)}$ les colonnes de Q_∞, comme le produit matriciel de deux matrices carrées s'effectue en multipliant la matrice de gauche par chaque colonne de la matrice de droite, pour obtenir successivement chaque colonne de la matridce produit :

L'égalité : $Q \times Q_\infty = Q_\infty$ entraîne alors :

$$\forall j \in [\![1, N]\!],\ Q \times Q_\infty^{(j)} = Q_\infty^{(j)}$$

relation qui exprime bien que toutes les colones de Q_∞ sont invariantes par Q.

III.B.7. Comme la matrice Q_∞ est de plus stochastique : chacune de ses colonnes est un vecteur de probabilité, non nul par conséquent, et invariant par Q : on a vu qu'un vecteur possédant ces propriétés est toujours égal à V_∞, donc Q_∞ et bien la matrice dont toutes les colonnes sont égales au vecteur V_∞.

On admettra pour la partie III.C. que $(Q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge lorsque n tend vers l'infini vers la matrice Q_∞ dont les colonnes sont toutes égales à V_∞ sous les seules hypothèses Q stochastique et strictement positive.

C. Application au modèle du surfeur

On considère, avec les notations précédentes, la variable aléatoire X_∞ à valeurs dans $[\![1, N]\!]$ dont la loi est définie par :

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad P(X_\infty = i) = p(i)$$

III.C.1. On sait déjà que la suite matricielle $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des vecteurs $V_n = \begin{pmatrix} P(X_n=1) \\ \vdots \\ P(X_n=N) \end{pmatrix}$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = G^n v_0$.

Or G est stochastique, strictement positive (lorsqu'on a bien $0 < \rho < 1$), donc d'après le résultat général admis en fin de partie III.B., la suite $(G^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens matriciel, vers une matrice G_∞ dont toutes les colonnes sont égales à $V_\infty = \begin{pmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(N) \end{pmatrix}$.

Mais alors : quel que soit le vecteur initial $V_0 = \begin{pmatrix} P(X_0=1) \\ \vdots \\ P(X_0=N) \end{pmatrix}$, on a, toujours au sens matriciel :

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = G_\infty V_0 = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{N} p(1)(v_0)_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{N} p(N)(v_0)_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(N) \end{pmatrix}$$

ce qui signifie bien :

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = i) = p(i) = P(X_\infty = i)$$

c'est-à-dire en effet, que **la suite** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi vers** X_∞.

III.C.2 Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$: $p(i)$ peut maintenant être interprété comme la probabilité de présence du surfeur sur la page i à long terme, lorsqu'il surfe vraiment au hasard... !

★★★ FIN DU SUJET ★★★