MATHÉMATIQUES - Ecricome E 2006

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x + 1 + 2e^x$$

ainsi que la fonction g des deux variables réelles x et y définie par :

$$g(x,y) = e^x(x + y^2 + e^x)$$

I - Recherche d'extrémum local de g

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 + 2e^x > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. On voit facilement que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x = 0$, donc que la droite d'équation : $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.
   De plus : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - (x+1) = 2e^x > 0$, donc la courbe reste toujours au-dessus de l'asymptote.
3. La fonction f est continue, strictement croissante et change de signe sur $\mathbb{R}$ au vu des résultats précédents.
   Selon le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution réelle $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Pour un encadrement plus précis de α, on calcule :
   $f(-2) = -2 + 1 + 2e^{-2} = -1 + 2e^{-2}$ et $f(-1) = -1 + 1 + 2e^{-1} = 2e^{-1} > 0$.
   Or $e \approx 2,7$ donc $e^2 > 4 \iff e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} < \dfrac{1}{4} \implies -1 + 2e^{-2} < -1 + \dfrac{1}{2} < 0$.
   Ainsi : $f(-2) < 0 = f(\alpha) < f(-1)$, d'où : $-2 < \alpha < -1$ par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$.
4. Les fonctions coordonnées $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et exp et la fonction carrée sont de classe $\mathcal{C}^2$: par composition, somme et produit, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et ses dérivées partielles à l'ordre 1 sont définies par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1(g)(x,y) = e^x(x + y^2 + e^x) + e^x(1 + e^x) = e^x(1 + x + y^2 + 2e^x)$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_2(g)(x,y) = e^x \times 2y$$

   La recherche des points critiques de g passe alors par la résolution du système :

$$\begin{cases} \partial_1(g)(x,y) &= 0 \\ \partial_2(g)(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + x + y^2 + 2e^x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \qquad \text{(on simplifie directement par } e^x > 0)$$

$$\iff \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \end{cases}$$

La fonction g admet donc un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$, à savoir $(\alpha, 0)$; c'est le seul point en lequel g est susceptible de présenter un extrémum.

5. On calcule maintenant les dérivées partielles d'ordre 2 de g ; pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial^2_{1,1}(g)(x,y) = e^x(1 + x + y^2 + 2e^x) + e^x(1 + 2e^x) = e^x(2 + x + y^2 + 4e^x)$$

$$\partial^2_{2,2}(g)(x,y) = 2e^x$$

g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc d'après le théorème de Schwarz :

$$\partial^2_{1,2}(g)(x,y) = \partial^2_{2,1}(g)(x,y) = 2ye^x$$

On peut alors écrire la Hessienne H de g au point critique $(\alpha, 0)$:

$$H = \begin{pmatrix} e^\alpha(2 + \alpha + 4e^\alpha) & 0 \\ 0 & 2e^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha e^\alpha & 0 \\ 0 & 2e^\alpha \end{pmatrix}$$

puisque $1 + \alpha + 2e^\alpha = 0 \Longrightarrow 4e^\alpha = -2 - 2\alpha$.

La Hessienne H est ainsi diagonale, donc ses valeurs propres sont immédiates : ce sont ses coefficients diagonaux $-\alpha e^\alpha$ et $2e^\alpha$.

Comme $\alpha < -1 < 0$, ces valeurs propres sont toutes deux strictement positives : on en déduit qu'au point critique $(\alpha, 0)$, la fonction g admet bien un extrémum local, et que c'est un minimum local. On notera β cette valeur.

6. Le réel β est : $g(\alpha, 0) = e^\alpha(\alpha + e^\alpha)$. Or α vérifie : $1 + \alpha + 2e^\alpha = 0 \iff e^\alpha = -\frac{1}{2}(1 + \alpha)$, donc :

$$\beta = -\frac{1+\alpha}{2} \times (\alpha - \frac{1+\alpha}{2}) \iff 4\beta = -(1+\alpha)(\alpha - 1) \iff 4\beta = -(\alpha^2 - 1) \iff 4\beta + \alpha^2 - 1 = 0$$

II - Étude d'une suite réelle

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 2e^x > 0$. Elle est donc bien convexe sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la courbe de f est située en-dessous de toutes ses tangentes.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse t ayant pour équation : $y = f'(t).(x - t) + f(t)$, cela se traduit bien par l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(t) + (x - t)f'(t) \leqslant f(x).$$

2. En reprenant l'inégalité précédente pour $x = \alpha$ et $t = u_n$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(u_n) + (\alpha - u_n).f'(u_n) \leqslant f(\alpha) = 0 \iff f(u_n) \leqslant (u_n - \alpha).f'(u_n) \iff \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leqslant u_n - \alpha$$

où l'on précise que : $f'(u_n) > 0$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 + 2e^x > 0$.

Cela donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leqslant u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leqslant u_{n+1}.$$

L'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leqslant u_{n+1}$ s'exprime aussi, par décalage d'indice : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha \leqslant u_n$. Comme $u_0 = -1 > \alpha$, on a en fait :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \alpha$, donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) \geqslant f(\alpha)$ par croissance de f sur $\mathbb{R}$, et puisque $f'(u_n) > 0$:

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \geqslant 0$, ce qui implique : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \leqslant u_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

La suite (u_n) est donc décroissante. Elle est ainsi majorée par son premier terme $u_0 = -1$, et l'inégalité précédente permet bien d'écire la suite d'inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant -1$$

La suite (u_n) est donc décroissante, minorée par α : elle converge donc selon le théorème de limite monotone.

De plus, vu la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}$, où f et f' sont continues sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, sa limite ℓ est solution de l'équation aux points fixes :

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x \iff \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \iff f(x) = 0 \iff x = \alpha$$

(seule solution réelle de l'équation. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$.

3. On admet que pour tout x de l'intervalle $[-2; -1]$:

$$0 \leqslant (x-\alpha)f'(x) - f(x) \leqslant \frac{(x-\alpha)^2}{e}$$

a) Là encore, en posant $x = u_n$ qui est bien compris, d'après ce qui précède, entre -2 et -1 pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant (u_n - \alpha).f'(u_n) - f(u_n) \leqslant \frac{(u_n-\alpha)^2}{e} \iff 0 \leqslant f'(u_n).\left[u_n - \alpha - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}\right] \leqslant \frac{(u_n-\alpha)^2}{e}$$

$$\iff 0 \leqslant f'(u_n).[u_{n+1} - \alpha] \leqslant \frac{(u_n-\alpha)^2}{e}.$$

Or : pour tout $n \in \mathbb{N},\ f'(u_n) = 1 + 2e^{u_n} > 1$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \frac{(u_n-\alpha)^2}{e.f'(u_n)} \leqslant \frac{(u_n-\alpha)^2}{e}$$

b) Démontrons par récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \dfrac{1}{e^{2^n} - 1}$", est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $u_0 - \alpha = -1 - \alpha$, or on sait que : $-2 \leqslant \alpha \leqslant -1 \iff 2 \geqslant -\alpha \geqslant 1$ $\iff 1 \geqslant 1 - \alpha \geqslant 0$, et $\dfrac{1}{e^{2^0-1}} = \dfrac{1}{e^0} = 1$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant \dfrac{1}{e^{2^n-1}}$:

Au rang suivant, on sait que $0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \dfrac{(u_n-\alpha)^2}{e}$, donc :

$0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \left(\dfrac{1}{e^{2^n-1}}\right)^2.\dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{e^{2.(2^n-1)}}.\dfrac{1}{e}$, soit :

$0 \leqslant u_{n+1} - \alpha \leqslant \dfrac{1}{e^{2^{n+1}-2+1}} = \dfrac{1}{e^{2^{n+1}-1}}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée à $n = 0$ et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

Remarque : cet encadrement redonne, par le théorème des gendarmes, la convergence de (u_n) vers α. Plus important, il donne un critère explicite pour pouvoir affirmer que le terme u_n approche sa limite α à une précision quelconque, comme on le voit dans la dernière question ci-dessous.

4. Pour être sûr que : $0 \leqslant u_n - \alpha \leqslant 10^{-p}$, il suffit que :

$$\frac{1}{e^{2^n - 1}} \leqslant 10^{-p} \iff e^{2^n-1} \geqslant 10^p \iff 2^n - 1 \geqslant p.\ln(10)$$

par croissance de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$, ou encore :

$$2^n \geqslant 1 + p.\ln(10) \iff n\ln(2) \geqslant \ln(1 + p\ln(10)) \iff n \geqslant \frac{\ln(1 + p.\ln(10))}{\ln(2)}.$$

La première valeur qui convient est donc :

$$\boxed{n = \lfloor \frac{\ln(1 + p\ln(10))}{\ln(2)} \rfloor + 1}$$

Programmation :

On utilisera la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - \dfrac{1 + x + 2e^x}{1 + 2e^x} = x - 1 - \dfrac{x}{1 + 2e^x}$.

```

function y = g(x)
    y = x-1-x/(1+2*exp(x))
endfunction

p = input("Donner une valeur de p, comme précision voulue : ")
u = -1
n = floor(log(1+p*log(10))/log(2))+1
for i = 1:n
    u = g(u)
end
disp("Une valeur approchée de alpha à 10^"+string(p)+" est : "+string(u))
```

La convergence est très rapide : avec $p = 10$, on obtient en $n = 5$ étapes seulement, la valeur approchée :

$$\alpha \approx -1.4630555133$$

Exercice 2

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction $f_n :\ x \mapsto x^n \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

1. Pour x au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{f_n(x)}{1/x^2} = x^{n+2}.e^{-x^2/2} = \exp\left((n+2)\ln(x) - \frac{x^2}{2}\right) = \exp\left(x^2.\left((n+2)\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\right)\right), \text{ où :}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissances comparées, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (n+2)\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$,

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left((n+2)\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\right) = -\infty$, et enfin :

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left(x^2\big((n+2)\frac{\ln(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\big)\right) = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{1/x^2},$$

ce qui prouve bien que $f_n(x) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

2. La fonction f_n est continue et positive sur $[0;+\infty[$; par ailleurs, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge, puisque $2>1$; le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives, assure alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ est elle-même convergente.

   La continuité de f_n sur $[0,1]$ assure que $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ est bien définie, donc finalement que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ est convergente. On appelle I_n cette intégrale.

3. a) Soit $A \geqslant 0$: dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A f_{n+2}(x)\mathrm{d}x = \int_0^A x^{n+2}.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$, on pose :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x^{n+1} & \longrightarrow & u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = x.e^{-x^2/2} & \longrightarrow & v(x) = -e^{-x^2/2} \end{array}$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, donc par intégration par parties :

$$\int_0^A x^{n+2}.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \left[-x^{n+1}.e^{-x^2/2}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A x^n.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = -A^{n+1}.e^{-A^2/2} + (n+1).\int_0^A x^n.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$$

   $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -A^{n+1}.e^{-A^2/2} = 0$ par croissances comparées, et les intégrales I_{n+2} et I_n convergent, donc on peut passer à la limite quand $A \to +\infty$ dans l'égalité précédente, ce qui donne effectivement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = (n+1).I_n$$

   b) Une densité de la loi normale centrée, réduite est définie par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-x^2/2}$.

   Cette fonction est paire, et $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = 1$, donc :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\sqrt{2\pi}.\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

   c) $\displaystyle I_1 = \int_0^{+\infty} x.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A x.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-x^2/2}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty} -e^{-A^2/2}+1 = 1.$

   d) Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: "$I_{2n} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.\dfrac{(2n)!}{2^n.n!}$ et $I_{2n+1} = 2n.n!$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   $\boxed{\text{I.}}$ Pour $n=0$: $I_0 = I_{2\times 0} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.\dfrac{0!}{2^0.0!} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, tandis que $I_1 I_{2\times 0+1} = 1$ et $2^0.0! = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : $I_{2n+2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}$ et $I_{2n+3} = 2^{n+1}(n+1)!$.

   D'après la relation de récurrence obtenue en 3.a) :

$$I_{2n+2} = (2n+1)I_{2n} \overset{H.R.}{=} (2n+1).\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n.n!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n+1)!}{2^n.n!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n+1)!.(2n+2)}{2^n.n!.2(n+1)}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}.(n+1)!}$$

$I_{2n+3} = (2n+2)I_{2n+1} \overset{H.R.}{=} 2(n+1).2^n.n! = 2^{n+1}.(n+1)!$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x.e^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

   a) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}^+$ et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, donc positive ou nulle sur $\mathbb{R}$. Elle est aussi continue sur $]-\infty;0[$ comme fonction constante, et continue sur $]0;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions continues, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.

   Enfin : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x = 0 + I_1 = 1$, donc f est bien une densité de probabilité.

   b) Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f pour densité de probabilité.

      i. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Comme la fonction $x \mapsto x.f(x)$ est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de prouver la convergence de :

      $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xf_1(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x^2.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = I_2 = (0+1)I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

      donc x admet une espérance qui vaut $E(X) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

      ii. De même, le moment d'ordre 2 de X est donné, sous réserve de convergence absolue, par l'intégrale :

      $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} x^3.e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = I_3 = (1+1).I_1 = 2 = E(X^2)$$

      La variable aléatoire X admet donc une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

      $$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}$$

5. On désigne par F et G les fonctions de répartition respectives de X et de $Y = X^2$.

   a) La variable aléatoire X est, au vu de sa densité, à valeurs positives et il en est évidemment de même pour $Y = X^2$, donc sans calcul : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_-,\ F(x) = G(x) = 0$.

   Pour tout $x > 0$: $\quad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} f_1(t)\mathrm{d}t = 1 - e^{-x^2/2}$.

   Pour tout $x > 0$:

   $$\begin{aligned} G(x) &= P(X^2 \leqslant x) = P\big(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\big) = F\big(\sqrt{x}\big) - F\big(-\sqrt{x}\big) \\ &= 1 - e^{-(\sqrt{x})^2/2} - 0 = 1 - e^{-x/2} \end{aligned}$$

   b) On reconnaît ainsi que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

   On en déduit que Y admet une espérance et une variance qui valent :

   $$E(Y) = \frac{1}{\lambda} = 2 \quad (= E(X^2)) \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{1}{\lambda^2} = 4$$

Exercice 3

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

I - Étude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel : } \quad Q(x) = (x-1).P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout réel } x : \quad P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x^2$$

1. Soient R et S deux polynômes, éléments de $E = \mathbb{R}_2[X]$, et λ un réel quelconque, alors $f(\lambda.R+S)$ est la fonction polynôme définie pour tout x réel, par :

$$\begin{aligned} f(\lambda.R+S)(x) &= (x-1).\big(\lambda.R+S\big)'(x) + \big(\lambda.R+S\big)(x) \\ &= (x-1).\big(\lambda.R'(x)+S'(x)\big) + \lambda.R(x) + S(x) \qquad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda.\Big((x-1).R'(x) + R(x)\Big) + (x-1).S'(x) + S(x) \\ &= \lambda.f(R)(x) + f(S)(x) \end{aligned}$$

   C'est-à-dire que : $\quad f(\lambda.R+S) = \lambda.f(R) + f(S)$, donc f est une application linéaire.

   De plus : tout polynôme P de $E = \mathbb{R}_2[X]$ est de la forme : $\quad P(X) = a.X^2 + b.X + c$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(P)(x) = (x-1).(2ax+b) + (ax^2+bx+c) = 3ax^2 + (-2a+2b)x + (c-b)$$

   Donc : $\quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

   La combinaison des deux propriétés précédentes permet de conclure que f est bien un endomorphisme de E.

2. Le dernier calcul de la question précédente prépare déjà largement le terrain à cette question !

   Les polynômes de la base canonique sont en effet ceux pour lesquels deux des trois coefficients sont égaux à 0, le troisième valant 1. Ainsi :

   - Pour $a = b = 0,\ c = 1$: $\quad f(P_0)(x) = 1$, donc : $\quad f(P_0) = 1.P_0 + 0.P_1 + 0.P_2$
   - Pour $a = c = 0,\ b = 1$: $\quad f(P_1)(x) = 2x - 1$, donc : $\quad f(P_1) = -1.P_0 + 2.P_1 + 0.P_2$
   - Pour $b = c = 0,\ a = 1$: $\quad f(P_2)(x) = 3x^2 - 2x$, donc : $\quad f(P_2) = 0.P_0 - 2.P_1 + 3.P_2$

   La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est bien : $\begin{array}{cc} \begin{matrix} f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{matrix} \end{array}$.

3. La matrice A est **triangulaire**, donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux ; ce sont également celle de f qu'elle représente, et ainsi :

$$\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2, 3\}$$

   Comme f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_2[X]$, espace de dimension 3, et comme f possède trois valeurs propres distinctes : le critère suffisant assure que f est diagonalisable.

   Comme le spectre de A ne contient pas la valeur 0, alors A est inversible, et f qu'elle représente, est donc un automorphisme de E.

4. Il y a plusieurs façons de procéder au calcul des images par f des polynômes $R_0,\ R_1,\ R_2$. Par exemple :

   - $R_0 = P_0$, donc $f(R_0) = P_0 = R_0$.

   - $R_1(x) = x-1$, donc $R_1 = P_1 - P_0$ et $f(R_1) = f(P_1) - f(P_0) = 2P_1 - 2P_0 = 2R_1$ par linéarité de f.

   - $R_2(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = P_2 - 2P_1 + P_0$,
     donc $f(R_2) = f(P_2) - 2f(P_1) + f(P_0) = 3P_2 - 2P_2 - 4P_1 + 2P_0 + P_0 = 3P_2 - 6P_1 + 3P_0 = 3R_2$

5. Les calculs précédents font clairement apparaître que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une famille de vecteurs propres de f (ils sont tous non nuls), associés respectivement aux valeurs propres 1,2,3.

   On sait que ce critère est suffisant pour affirmer que $\mathcal{B}'$ est une famille libre : un autre argument consiste à constater que ces trois polynômes sont de degrés distincts.

   Et comme $E = \mathbb{R}_2[X]$ est une espace vectoriel de dimension 3 : la liberté de $\mathcal{B}'$ suffit à en faire une base de E, constituée de vecteurs propres pour f.

   La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est celle des coordonnées des polynômes $R_1,\ R_2,\ R_3$ dans la base $\mathcal{B}$, soit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   La matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$D = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} f(R_0) & f(R_1) & f(R_2) & \\ \end{array}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{array}{c} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \end{array}$$

   et $A,\ P,\ D$ sont liées par la formule de changement de base : $\quad A = PDP^{-1} \iff D = P^{-1}AP$.

6. Pour tout réel x :

$$R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 = x^2 = P_2(x)$$

$$R_1(x) + R_0(x) = x - 1 + 1 = x = P_1(x)$$

   et $R_0(x) = P_0(x)$. La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est en fait P^{-1}, qui est ainsi, d'après ces trois relations :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Les matrices A et D étant inversibles, la relation $A = PDP^{-1}$ donne, d'après la formule pour l'inverse d'un produit matriciel :

$$A^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1} P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

   On démontre alors par une récurrence sur n très classique, que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \text{"} \left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}\text{"}$$

   est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   $\boxed{\text{I.}}$ Au rang $n = 0$: $\quad \left[A^{-1}\right]^0 = I_3$ et $P\left[D^{-1}\right]^0 P^{-1} = PI_3P{-}1 = I_3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et sous cette hypothèse, montrons que

$\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : " $\left[A^{-1}\right]^{n+1} = P\left[D^{-1}\right]^{n+1}P^{-1}$"

$$\begin{aligned}
\left[A^{-1}\right]^{n+1} &= \left[A^{-1}\right]^{n} \times A^{-1} \\
&= P\left[D^{-1}\right]^{n}P^{-1} \times PD^{-1}P^{-1} \qquad (H.R.) \\
&= P\left[D^{-1}\right]^{n} \times D^{-1}P^{-1} \\
&= P\left[D^{-1}\right]^{n+1}P^{-1}
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Pour optimiser les calculs, on effectue les trois produits en commençant par la droite (associativité du produit matriciel), et en ne s'intéressant qu'à la dernière colonne des résultats successifs ; D étant diagonale, son inverse et ses puissances le sont aussi et se calculent par applications directes des exposants aux coefficients diagonaux :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left[A^{-1}\right]^{n} = P\left[D^{-1}\right]^{n}P^{-1} &= P\begin{pmatrix} 1^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * & 1 \\ * & * & 2 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * & 1 \\ * & * & 2^{-n+1} \\ * & * & 3^{-n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} * & * & 1-2^{-n+1}+3^{-n} \\ * & * & 2^{-n+1}-2.3^{-n} \\ * & * & 3^{-n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

II - Suite d'épreuves aléatoires

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.
On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans une urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la k-ième épreuve ($k \geqslant 0$).
On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} P(X_k=0) \\ P(X_k=1) \\ P(X_k=2) \end{pmatrix}$$

où $P(X_k=j)$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la k-ième épreuve.

On convient de définir la matrice U_0 par : $\quad U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$; le contenu de l'urne avant le deuxième tirage, dépend du résultat du premier tirage :

- $[X_2=0]=\big([X_1=0]\cap[X_2=0]\big)\cup\big([X_1=1]\cap[X_2=0]\big)\cup\big([X_1=2]\cap[X_2=0]\big)$; par union disjointe :

$$\begin{aligned}P(X_2=0)&=P(X_1=0).P_{[X_1=0]}(X_2=0)+P(X_1=1).P_{[X_1=1]}(X_2=0)+P(X_1=2).P_{[X_1=2]}(X_2=0)\\&=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\\P(X_2=0)&=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{11}{18}\end{aligned}$$

On a tenu compte des conditions de l'expérience dans le calcul des probabilités conditionnelles : si $[X_1=0]$ est réalisé, l'urne ne contient plus que la boule numéro 0 ; si $[X_1=1]$ est réalisé, l'urne contient les deux boules 0 et 1 avantle 2ᵉ tirage ; si $[X_1=2]$ est réalisé, l'urne reste dans son état initial pour le 2ᵉ tirage.

- Cette fois : $[X_2=1]=\big([X_1=1]\cap[X_2=1]\big)\cup\big([X_1=2]\cap[X_2=1]\big)$, et :

$$P(X_2=1)=P(X_1=1).P_{[X_1=1]}(X_2=1)+P(X_1=2).P_{[X_1=2]}(X_2=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$$

- Enfin : $[X_2=2]=[X_1=2]\cap[X_2=2]$, il faut forcément tirer la boule 2 au premier tirage, sinon dans tous les autres cas, elle est retirée de l'urne avant le 2ᵉ tirage ! Ainsi :

$$P(X_2=2)=P(X_1=2).P_{[X_1=2]}(X_2=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

La loi de X_2 est récapitulée dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$P(X_2=k)$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

La variable aléatoire X_2 étant finie, elle admet une espérance qui vaut :

$$E(X_2)=0\times P(X_2=0)+1\times P(X_2=1)+2\times P(X_2=2)=\frac{5}{18}+\frac{2}{9}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$$

Le moment d'ordre 2 de X_2 vaut :

$$E(X_2^2)=0^2\times P(X_2=0)+1^2\times P(X_2=1)+2^2\times P(X_2=2)=\frac{5}{18}+\frac{4}{9}=\frac{13}{18}$$

Enfin, X_2 admet une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X_2)=E(X_2^2)-E(X_2)^2=\frac{13}{18}-\frac{1}{4}=\frac{26-9}{36}=\frac{17}{36}$$

2. On généralise ici les calculs effectués à la question précédente avec X_2. On écrit ici, pour $k\in\mathbb{N}^*$ quelconque, trois fois la formule des probabilités totales avec le s.c.e. $\big([X_k=0],[X_k=1],[X_k=2]\big)$ pour le calcul des probabilités de la loi de X_{k+1} :

$$\begin{aligned}P(X_{k+1}=0)=&P(X_k=0).P_{[X_k=0]}(X_{k+1}=0)+P(X_k=1).P_{[X_k=1]}(X_{k+1}=0)+P(X_k=2).P_{[X_k=2]}(X_{k+1}=0)\\=&1.P(X_k=0)+\frac{1}{2}.P(X_k=1)+\frac{1}{3}.P(X_k=2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X_{k+1}=1) =& P(X_k=0).P_{[X_k=0]}(X_{k+1}=1)+P(X_k=1).P_{[X_k=1]}(X_{k+1}=1)+P(X_k=2).P_{[X_k=2]}(X_{k+1}=1)\\ =& 0.P(X_k=0)+\frac{1}{2}.P(X_k=1)+\frac{1}{3}.P(X_k=2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X_{k+1}=2) =& P(X_k=0).P_{[X_k=0]}(X_{k+1}=2)+P(X_k=1).P_{[X_k=1]}(X_{k+1}=2)+P(X_k=2).P_{[X_k=2]}(X_{k+1}=2)\\ =& 0.P(X_k=0)+0.P(X_k=1)+\frac{1}{3}.P(X_k=2)\end{aligned}$$

ces relations s'écrivent matriciellement :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad U_{k+1}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\0&1/2&1/3\\0&0&1/3\end{pmatrix}}_{=B}\times U_k$$

On vérifie très simplement que la matrice B ainsi apparue est l'inverse de A, en effectuant le produit :

$$A\times B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-2\\0&0&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1/2&1/3\\0&1/2&1/3\\0&0&1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0&\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+0\\0+0+0&0+1+0&0+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\\0+0+0&0+0+0&0+0+1\end{pmatrix}=I_3$$

Donc A est bien inversible, et $B=A^{-1}$ vérifie :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ U_{k+1}=A^{-1}U_k.$$

3. Une récurrence immédiate (à rédiger a priori, en particulier à Ecricome) donne :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad U_k=\left[A^{-1}\right]^k\times U_0$$

4. Étant donné que $U_0=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, le produit $\left[A^{-1}\right]^k\times U_0$ correspond uniquement, en fait, à la troisième colonne de $\left[A^{-1}\right]^k$.

Tous les calculs ont déjà été faits, on conclut donc directement, pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$:

$$P(X_k=0)=1-2^{-n+1}+3^{-n}=1-\big(\frac{1}{2}\big)^{n-1}+\big(\frac{1}{3}\big)^n$$

$$P(X_k=1)=2^{-n+1}-2.3^{-n}=\big(\frac{1}{2}\big)^{n-1}-2\big(\frac{1}{3}\big)^n$$

$$P(X_k=2)=3^{-n}=\big(\frac{1}{3}\big)^n$$

et puisque $-1<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1$, on a bien :

$$\lim_{k\to+\infty}P(X_k=0)=1,\quad \text{et}\quad \lim_{n\to+\infty}P(X_k=1)=0=\lim_{k\to+\infty}P(X_k=2)$$

Résultat qui signifie qu'à long terme, il est presque sûr que l'urne ne contiendra plus que la boule numéro 0.