MATHÉMATIQUES - Ecricome E 2012

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$L = AL + B$$

On définit la suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n + B \end{cases}$$

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n : $U_n = L + A^n(U_0 - L)$.

   $\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 0$: $L + A^0(U_0 - L) = L + I_3(U_0 - L) = L + U_0 - L = U_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors elle est vraie au rang $n+1$, soit : $U_{n+1} = L + A^{n+1}(U_0 - L)$.

   On sait que :

$$\begin{aligned} U_{n+1} = AU_n + B &\overset{H.R.}{=} A(L + A^n(U_0 - L)) + B \\ &= AL + A^{n+1}(U_0 - L) + B \\ &= A^{n+1}(U_0 - L) + L \quad \text{ puisque } L = AL + B \text{ par hypothèse.} \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

Dans la suite du problème, les matrices A et B sont choisies de telle sorte que

$$A = \frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note :

- Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$;
- a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A ;
- b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est B ;
- $\mathrm{Im}(b)$ l'image de l'endomorphisme b ;
- $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - a)$ l'image de l'endomorphisme $\mathrm{Id} - a$.

2. Un vecteur $u=(x,y,z)$ appartient à l'image de b si et seulement si il existe un vecteur $v=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :
$$u=b(v)\iff B\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
en passant par la représentation matricielle dans la base canonique. Le but est de vérifier sous quelle condition ce système admet des solutions, on l'échelonne :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3a & - & b & - & 2c & = & x\\ a & & & - & c & = & y\\ 2a & - & b & - & c & = & z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3a & - & b & - & 2c & = & x\\ & & b & - & c & = & 3y-x\ L_2\leftarrow 3L_2-L_1\\ & & -b & + & c & = & 3z-2x\ L_3\leftarrow 3L_3-2L_1\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3a & - & b & - & 2c & = & x\\ & & b & - & c & = & 3y-x\\ & & & & 0 & = & -3x+3y+3z=0\ L_3\leftarrow L_2+L_3\end{array}\right.$$
Le système est échelonné et la troisième ligne est sans inconnue : elle est donc soit vraie, et dans ce cas il y a une infinité de solutions, soit fausse et dans ce cas le système est impossible.
Donc $u=(x,y,z)$ appartient à $\mathrm{Im}(b)$ si et seulement si : $-3x+3y+3z=0\iff -x+y+z=0$.

On procède de la même façon pour déterminer $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-a)$:
$u=(x,y,z)$ appartient à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-a)$ si et seulement si il existe $v=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que :
$$u=(\mathrm{Id}-a)(v)\iff (I_3-A)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-3&-3\\4&0&-4\\2&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6a & - & 3b & - & 3c & = & 6x\\ 4a & & & - & 4c & = & 6y\\ 2a & - & 3b & + & c & = & 6z\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & - & b & - & c & = & 2x\\ 4a & & & - & 4c & = & 6y\\ 2a & - & 3b & + & c & = & 6z\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & - & b & - & c & = & 2x\\ & & b & - & c & = & 3y-2x\ L_2\leftarrow L_2-L_1\\ & & -2b & + & 2c & = & 6z-2x\ L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & - & b & - & c & = & 2x\\ & & b & - & c & = & 3y-2x\\ & & & & 0 & = & -6x+6y+6z\ L_3\leftarrow L_3+2L_2\end{array}\right.$$
À nouveau, le système admet des solutions si et seulement si : $-6x+6y+6z=0\iff -x+y+z=0$, donc :
$$\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-a)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,-x+y+z=0\right\}=\mathrm{Im}(b)$$

3. Vérifions que $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$ est une matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base de vecteurs propres de a.
Cela demande d'abord de vérifier que chacune des colonnes de P est bien vecteur propre pour la matrice A. Or :
$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1/3\\1/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$
Les trois colonnes de P sont donc bien vecteurs propres de A, respectivement pour les valeurs propres 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

Le fait que A possède trois valeurs propres distinctes suffit alors pour affirmer que A est diagonalisable, et que les colonnes de P représentent une base $\mathcal{B}' = ((1,1,1),(1,0,1),(0,-1,1))$ de $\mathbb{R}^3$, de sorte que P est effectivement la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

4. Les calculs précédents permettent déjà d'écrire :

$$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \text{ et de plus } A = PDP^{-1}$$

d'après la formule de changement de base. Comme de plus :

$$b((1,1,1)) = (0,0,0),\ b((1,0,1)) = (1,0,1),\ b((0,-1,1)) = (-1,-1,0) = -(1,0,1) + (0,-1,1)$$

(calculs faits via la matrice B représentative de b dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$), alors :

$$B' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on dispose toujours de la formule de changement de base : $B = PB'P^{-1}$.

5. La relation : $A = PDP^{-1}$ est donc issue de la formule de changement de base. Elle donne lieu à la formule plus générale : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$ qu'on retrouve très facilement par récurrence sur n.

Pour changer un peu, voilà une preuve directe, tout à fait acceptable dans le cadre du programme de ECE2 :

D'après les propriétés de la représentation matricielle, puisque $A = \mathrm{Mat}_{Can}(a)$:
alors pour tout $n \in \mathbb{N},\ A^n = \mathrm{Mat}_{Can}(a^n)$, et de même $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(a)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(a^n)$.
Les matrices A^n et D^n représentent donc le même endomorphisme a^n de $\mathbb{R}^3$, dans deux bases dont P est la matrice de passage de l'une à l'autre.
Alors, d'après la formule de changement de base : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

6. Comme D est une matrice diagonale, on obtient sans calcul, et d'après les propriétés de ce type de matrices, l'expression de ses puissances :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix} \text{ qui se décompose de façon évidente :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{D_1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n . \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{D_2} + \left(\frac{1}{3}\right)^n . \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D_3}$$, où $D_1,\ D_2$ et D_3 sont bien trois matrices diagonales (ce sont même des matrices élémentaires...)

La relation obtenue à la question précédente donne alors, en développant :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1} &= P(D_1 + (\frac{1}{2})^n.D_2 + (\frac{1}{3})^n.D_3)P^{-1} \\ &= \underbrace{PD_1P^{-1}}_{E} + \left(\frac{1}{2}\right)^n . \underbrace{PD_2P^{-1}}_{F} + \left(\frac{1}{3}\right)^n . \underbrace{PD_3P^{-1}}_{G}. \end{aligned}$$

Le calcul explicite donne notamment : $E = PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Il aura fallu pour cela, calculer $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. On cherche ici une matrice $L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure, telle que :

$L' = DL' + B' \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p/2+1 & q/2-1 \\ 0 & 0 & r/3+1 \end{pmatrix}$, ce qui donne par identification des coefficients :

$$\begin{cases} p &= p/2+1 \\ q &= q/2-1 \\ r &= r/3+1 \end{cases} \iff \begin{cases} p &= 2 \\ q &= -2 \\ r &= 3/2 \end{cases}, \quad \text{donc } L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

8. D'après le résultat précédent, la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie :

$$\begin{aligned} L &= P(DL' + B')P^{-1} = PDL'P^{-1} + PB'P^{-1} \\ &= PDI_3L'P^{-1} + PB'P^{-1} = PDP^{-1}PL'P^{-1} + PP^{-1}BPP^{-1} \\ &= A.L + B \end{aligned}$$

9. Le calcul matriciel donne bien : $\quad EL = EPL'P^{-1} = PD_1L'P^{-1} = P.0_3.P^{-1} = 0_3$ avec :

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

10. En se souvenant de : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = L + A^n(U_0 - L)$, avec : $A^n = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n.F + \left(\frac{1}{3}\right)^n.G$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = E$ au sens matriciel du terme, c'est-à-dire en considérant la convergence coefficient par coefficient. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = L + E(U_0 - L) = L + EU_0 - EL = L + EU_0 \quad \text{puisque } EL = 0_3.$$

Exercice 2

Partie I. Étude d'une fonction f.

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Un développement limité à l'odre 2 de la fonction f au voisinage de 0, est basé sur le développement limité à l'ordre 3 de l'exponentielle au voisinage de 0 :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + o(u^3)$$

Lorsque x est au voisinage de 0, il en est de même de $u = -x$, et :

$$f(x) = \frac{1 - \left(1 + (-x) + \dfrac{(-x)^2}{2} + \dfrac{(-x)^3}{6} + o(x^3)\right)}{x} = \frac{x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

Or le développement limité à l'ordre 3 est désormais (depuis 2013) hors-programme ! On réalise en fait que le développement limité à l'ordre 2 de exp en 0, qui donne :

$$f(x) = \frac{1 - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

suffit largement pour pouvoir conclure que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 = f(0)$$

et donc que f est continue en 0. Comme elle est par ailleurs continue sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions de référence continues sur cet intervalle où le dénominateur ne s'annule pas, la fonction f est bien continue sur $[0; +\infty[$.

2. Le seul fait que f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, suffit à justifier que f est dérivable en 0, le nombre dérivé en 0 étant le coefficient de degré 1 de celui-ci :

$$f'(0) = -\frac{1}{2}$$

Si on tient absolument à refaire la preuve du cours, on écrit simplement le taux d'accroissement de f en 0, à l'aide du développement limité :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1 - \frac{x}{2} + o(x) - 1}{x} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

et on retrouve bien : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\dfrac{1}{2}$, donc que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

3. La fonction f est par ailleurs dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions de référence dérivables sur cet intervalle, où le dénominateur ne s'annule pas, avec :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{e^{-x} \times x - (1 - e^{-x}) \times 1}{x^2} = \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x^2}$$

qui est bien de la forme : $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$ avec $\varphi(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

4. La fonction φ est elle-même dérivable sur $]0; +\infty[$, avec :

$$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = 1.e^{-x} + (x+1).(-e^{-x}) - 0 = -xe^{-x}$$

. Pour tout réel $x > 0$, $e^{-x} > 0$ et $-x < 0$, donc $\varphi'(x) < 0$ et la fonction φ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.
Par conséquent : $\forall x > 0,\ \varphi(x) < \lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = e^0 - 1 = 0$.
On en déduit : $\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{\varphi'(x)}{x^2} < 0$, inégalité encore vraie pour $x = 0$ puisque $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
On en déduit le tableau des variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$-1/2$	$-$	
f	1	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{e^x} = 1 - 0 = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - e^{-x}}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u$$

1. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, et pour tout réel $u\in[0;n]$:

$$0\leqslant u\leqslant n \iff 0\leqslant \frac{u}{n}\leqslant 1 \iff 0\geqslant -\frac{u}{n}\geqslant -1 \iff 1\geqslant e^{-\frac{u}{n}}\geqslant e^{-1} \Longrightarrow \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\geqslant \frac{1}{e}\times\frac{1}{1+u}$$

Par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$, et parce que $1+u>0$. Les fonctions concernées par la dernière inégalité sont continues sur $[0;+\infty[$, et $0\leqslant n$, donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u\geqslant \frac{1}{e}\int_0^n\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u \iff u_n\geqslant \frac{1}{e}.\Big[\ln(1+u)\Big]_0^n=\frac{1}{e}\ln(n+1)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\ln(n+1)=+\infty$, le théorème de comparaison des limites donne directement :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty.$$

2. La fonction f est, comme on l'a vu, continue sur tout l'intervalle $[0;+\infty[$, elle l'est donc sur $[0;1]$, ce qui suffit à garantir la bonne définition de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'intégrale : $\int_0^n\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u-u_n=\int_0^n\frac{1-e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u$, intégrale dans laquelle on réalise le changement de variable affine $x=\frac{u}{n}$, de sorte que :

$$\int_0^n\frac{1-e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{1+nx}\times n\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x}\mathrm{d}x$$

Or : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in]0;1]$, $1-e^{-x}>0$ et $\frac{1}{n}+x>x$ donc $0\leqslant\frac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x}\leqslant\frac{1-e^{-x}}{x}$.

Lorsque $x=0$, $\frac{1-e^{-0}}{\frac{1}{n}+0}=0\leqslant 1=f(0)$, donc la double inégalité : $0\leqslant\frac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x}\leqslant f(x)$ est vraie pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, sur lequel les deux fonctions concernées sont continues et positives. Comme $0<1$, les propriétés de positivité et croissance de l'intégrale s'appliquent, qui donnent :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leqslant\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{\frac{1}{n}+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \iff 0\leqslant\int_0^n\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u-u_n\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

4. Comme $\int_0^n\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u=\ln(n+1)$, et comme $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ est un réel fixé, notons-le I, alors :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leqslant\ln(n+1)-u_n\leqslant I \iff 0\leqslant 1-\frac{u_n}{\ln(n+1)}\leqslant\frac{I}{\ln(n+1)}$$

où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I}{\ln(n+1)}=0$ donne par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty}1-\frac{u_n}{\ln(n+1)}=0\iff\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\ln(n+1)}=1,\quad\text{soit :}\quad u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n+1)$$

Exercice 3

Soit l'événement A_n : « à l'issue de la première pioche, les deux feuilles piochées ne sont pas agraphées » et $a_n = P(A_n)$ sa probabilité.

1. La première épreuve consiste donc ici à piocher *simultanément* deux feuilles parmi les $2n$ que contient la boîte.

   Il n'y a donc pas d'ordre, ni de répétition, donc : $\binom{2n}{2} = \dfrac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ tirages possibles.

   Parmi ceux-ci, il y a n paires différentes formées par un original et sa photocopie.

   La probabilité de tirer l'un de ces couples est donc $\dfrac{n}{n(2n-1)} = \dfrac{1}{2n-1}$, qui correspond à la probabilité de l'événement *contraire* à A_n, vu la définition de ce dernier ! Ainsi :

$$a_n = 1 - \frac{1}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}.$$

2. **Étude de T_2**. On suppose dans cette question que $n = 2$, c'est-à-dire que la boîte contient deux originaux et deux copies.

   a) Pour tout entier $k \geqslant 2$: l'événement $[T_2 = k]$ est réalisé si et seulement si k tirages exactement (donc ni plus, ni moins !) sont nécessaires pour vider l'urne. En remarquant que dès qu'on tire un original et sa copie (qu'on ne remet donc plus dans l'urne), le tirage suivant donne forcément l'autre original et sa copie, et l'urne et vidée.

   La séquence de tirages réalisant $[T_2 = k]$ est donc (en posant E_i : « au i-ième tirage, les deux feuilles piochées ne sont pas agraphées ») :

$$[T_2 = k] = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{k-2} \cap \overline{E_{k-1}} \cap \overline{E_k},$$

   dont on calcule la probabilité avec la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(T_2 = k) &= P(E_1).P_{E_1}(E_2) \cdots P_{E_1 \cap \cdots E_{k-3}}(E_{k-2}).P_{E_1 \cap \cdots E_{k-2}}(\overline{E_{k-1}}).P_{E_1 \cap \cdots \cap \overline{E_{k-1}}}(\overline{E_k}) \\ &= \underbrace{a_2 \times a_2 \times \cdots \times a_2}_{k-2 \text{ fois}} \times (1 - a_2) \times 1 \end{aligned}$$

   d'après les explications ci-dessus, soit :

$$\forall k \geqslant 2,\ P(T_2 = k) = (1 - a_2)\,(a_2)^{k-2}$$

   b) Puisque $T_2(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$ (il faut au moins deux tirages pour vider l'urne), alors $S_2 = T_2 - 1$ a pour univers image : $S_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(S_2 = k) = P(T_2 - 1 = k) = P(T_2 = k + 1) = (1 - a_2)\,(a_2)^{k+1-2} = (a_2)^{k-1}\,(1 - a_2)$$

   on reconnaît donc l'univers-image et la formule générale d'une loi géométrique de paramètre $1 - a_2$: $S_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - a_2)$.

   D'après le cours on a donc : $E(S_2) = \dfrac{1}{1 - a_2}$, et $V(S_2) = \dfrac{1 - (1 - a_2)}{(1 - a_2)^2} = \dfrac{a_2}{(1 - a_2)^2}$.

   Ainsi : $T_2 = S_2 + 1$ admet une espérance car c'est le cas de S_2, donnée par la *linéarité* de l'espérance :

$$E(T_2) = E(S_2) + 1 = \frac{1}{1 - a_2} + 1$$

De même : S_2 admettant une variance, $T_2 = S_2 + 1$ aussi, et :

$$V(T_2) = 1^2.V(S_2) = V(S_2) = \frac{a_2}{(1-a_2)^2}.$$

(Rappelons que : $V(aX+b) = a^2V(X)$ si X est une v.a.r. admettant une variance, et a et b des réels fixés).

3. Étude de T_3. On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est-à-dire que la boîte contient trois originaux et trois copies.

 a) Vu le protocole de l'expérience, il faut au moins trois tirages pour vider l'urne de ses six copies. Donc : $P(T_3 = 2) = 0$.

 L'urne est vidée en trois tirages exactement ($[T_3 = 3]$ réalisé) si et seulement si les trois premiers tirages permettent à chaque fois d'obtenir un original et sa copie.
 En reprenant la définition des $A_n^{(i)}$ précédente, on a donc :

$$[T_3 = 3] = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3},$$

 et :

$$P(T_3 = 3) = P(\overline{E_1}).P_{\overline{E_1}}(\overline{E_2}).P_{\overline{E_1}\cap\overline{E_2}}(\overline{E_3}) = (1-a_3)\times(1-a_2)\times 1.$$

 Remarquons en effet qu'on peut écrire $P_{\overline{E_1}}(\overline{E_2}) = 1 - a_2$ car si le premier tirage donne un original et sa copie, on le retire de l'urne et celle-ci se retrouve, au début du deuxième tirage, dans la même situation que celle qui était la sienne dans la question 2 : deux originaux et leurs copies !

 b) Avec le système complet d'événements $(A_3, \overline{A_3})$, on écrit $P(T_3 = k+1)$ grâce à la *formule des probabilités totales*, comme le suggère l'énoncé :

$$P(T_3 = k+1) = P(A_3).P_{A_3}(T_3 = k+1) + P(\overline{A_3}).P_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1)$$

 où :
 ⋆ $P(A_3) = a_3,\ P(\overline{A_3}) = 1 - a_3$.
 ⋆ $P_{A_3}(T_3 = k+1)$ est la probabilité de vider l'urne en $k+1$ tirages, *sachant* que le premier a donné deux feuilles qui ne seront pas agraphées : elles sont donc remises dans l'urne qui retrouve sa configuration initiale et tout se passe comme si ce premier tirage n'avait pas eu lieu, à ceci près qu'il ne reste plus que k tirages pour vider l'urne !
 En clair, on peut donc écrire :

$$P_{A_3}(T_3 = k+1) = P(T_3 = k)$$

 ⋆ De même, $P_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1)$ est la probabilité de vider l'urne en $k+1$ tirages, *sachant* que les deux feuilles issues du premier tirage *sont* agraphées (on a donc obtenu un original et *sa* copie). Tout se passe donc ensuite comme si on disposait de l'urne de la question 2. (deux originaux, deux copies) qu'on doit, là encore, vider avec 1 tirage de moins, soit k tirages.
 On peut donc écrire :

$$P_{\overline{A_3}}(T_3 = k+1) = P(T_2 = k),$$

 ce qui donne bien, finalement, la relation :

$$\forall k \geqslant 2, \quad P(T_3 = k+1) = (1-a_3)P(T_2 = k) + a_3P(T_3 = k)$$

 c) On montre que : $P(T_3 = k) = \dfrac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{k-2} - (a_2)^{k-2}\right]$ est vrai pour tout $k \geqslant 2$, par récurrence sur k bien sûr !
 $\boxed{\text{I.}}$ Pour $k = 2$:

$$\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left[(a_3)^{2-2} - (a_2)^{2-2}\right] = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}.(1-1) = 0 = P(T_3 = 2)$$

donc la propriété est vraie au rang $k=2$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie à un certain rang $k \geqslant 2$. Alors au rang suivant :
$P(T_3=k+1)=(1-a_3)P(T_2=k)+a_3P(T_3=k)$ vaut, d'après 2.(a) et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
P(T_3=k+1) &= (1-a_3).(1-a_2).(a_2)^{k-2}+a_3.\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right] \\
&= (1-a_3)(1-a_2).\left[(a_2)^{k-2}+\frac{a_3}{a_3-a_2}.[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}]\right] \\
&= (1-a_3)(1-a_2).\frac{(a_2)^{k-2}.[a_3-a_2]+a_3.[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}]}{a_3-a_2} \\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3-a_2}\left[a_3.(a_2)^{k-2}-(a_2)^{k-1}+(a_3)^{k-1}-a_3.(a_2)^{k-2}\right] \\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3-a_2}.\left[(a_3)^{k-1}-(a_2)^{k-1}\right]
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que la propriété est héréditaire. Comme elle est initialisée au rang $k=2$, elle est donc vraie pour tout entier $k \geqslant 2$ d'après le principe de récurrence.

d) On revient aux sommes partielles de la série : pour $N \geqslant 2$, soit

$$S_N=\sum_{k=2}^{N}P(T_3=k)=\sum_{k=2}^{N}\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right]$$

$$=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\sum_{k=2}^{N}(a_3)^{k-2}-\sum_{k=2}^{N}(a_2)^{k-2}\right]\overset{[j=k-2]}{=}\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\sum_{j=0}^{N-2}(a_3)^{j}-\sum_{j=0}^{N-2}(a_2)^{j}\right]$$

On reconnaît deux séries géométriques de raisons $1-a_3=P(\overline{A_3})$ et $1-a_2=P(\overline{A_2})$, qui appartiennent à $]0;1[$; donc les séries convergent, et :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty}P(T_3=k)=\lim_{N\to+\infty}S_N &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\sum_{j=0}^{+\infty}(a_3)^{j}-\sum_{j=0}^{+\infty}(a_2)^{j}\right] \\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3-a_2}.\left[\frac{1}{1-a_3}-\frac{1}{1-a_2}\right] \\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3-a_2}.\frac{(1-a_2)-(1-a_3)}{(1-a_3)(1-a_2)} \\
&= \frac{(1-a_3)(1-a_2)}{a_3-a_2}.\frac{a_3-a_2}{(1-a_3)(1-a_2)}=1
\end{aligned}$$

On a donc bien défini la loi de T_3 ; cela signifie aussi que la probabilité que l'urne ne soit jamais vidée est nulle (événement négligeable).

e) D'après le théorème de transfert : la v.a.r. T_3-1 admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 2}(k-1)P(T_3=k)$ est absolument convergente.
Pour tout $k \geqslant 2$: $|(k-1).P(T_3=k)|=(k-1)P(T_3=k)$ car $k-1\geqslant 1$ et $P(T_3=k)\geqslant 0$ (c'est une probabilité).
Il suffit donc d'étudier la convergence simple de la série, on revient aux sommes partielles : pour $N \geqslant 2$, soit

$$T_N=\sum_{k=2}^{N}(k-1)P(T_3=k)=\sum_{k=2}^{N}(k-1).\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[(a_3)^{k-2}-(a_2)^{k-2}\right]$$

$$= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\sum_{k=2}^{N}(k-1)(a_3)^{k-2} - \sum_{k=2}^{N}(k-1)(a_2)^{k-2}\right]$$
$$= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\sum_{j=1}^{N-1} j(a_3)^{j-1} - \sum_{j=1}^{N-1} j(a_2)^{j-1}\right]$$

On reconnaît deux séries géométriques dérivées de raisons $1-a3 \in]0;1[$ et $1-a_2 \in]0;1[$, donc convergentes. Donc par somme, la série initiale converge, et T_3-1 admet une espérance, qui vaut :

$$E(T_3-1) = \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)P(T_3=k) = \lim_{N\to+\infty} T_N = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{1}{(1-a_3)^2} - \frac{1}{(1-a_2)^2}\right]$$

Mais alors : $T_3 = (T_3-1)+1$ admet une espérance, donnée par la linéarité de l'espérance :

$$E(T_3) = E(T_3-1)+1 = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{1}{(1-a_3)^2} - \frac{1}{(1-a_2)^2}\right]+1$$

f) Toujours d'après le théorème de transfert : la v.a.r. $T_3(T_3-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)P(T_3=k)$ est absolument convergente.

C'est encore une série à termes positifs, donc cela revient à étudier la convergence simple, et pour tout $N \geqslant 2$:

$$W_N = \sum_{k=2}^{N} k(k-1)P(T_3=k) = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\sum_{k=2}^{N} k(k-1)(a_3)^{k-2} - \sum_{k=2}^{N} k(k-1)(a_2)^{k-2}\right].$$

On reconnaît directement deux séries géométriques dérivées, convergentes pour les mêmes raisons que précédemment.

Ainsi, $T_3(T_3-1)$ admet une espérance qui vaut :

$$E(T_3(T_3-1)) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(T_3=k) = \lim_{N\to+\infty} W_N = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[\frac{2}{(1-a_3)^3} - \frac{1}{(1-a_2)^3}\right].$$

Or : $T_3(T_3-1) = T_3^2 - T_3$, donc : $T_3^2 = T_3(T_3-1)+T_3$ admet une espérance comme somme de deux v.a.r. qui en admettent une, par linéarité de l'espérance, avec :

$$E(T_3^2) = E(T_3(T_3-1)) + E(T_3).$$

Comme T_3 admet alors un moment d'ordre 2, elle admet donc une variance selon la formule de Koenig-Huygens :

$$V(T_3) = E(T_3^2) - E(T_3)^2 = E(T_3(T_3-1)) + E(T_3) - E(T_3)^2$$

A priori on s'arrête ici car l'énoncé ne demande pas de calculer une expression explicite de la variance, qui n'est pas difficile à exprimer au vu des calculs précédents.