MATHÉMATIQUES - Ecricome E 2014

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (0, 1, -2) \quad \text{et} \quad v = (0, 1, -1)$$

On note $\mathrm{Ker}(f)$ le noyau de f et $\mathrm{Im}(f)$ son image. Si λ est une valeur propre de f, on désigne par $E_\lambda(f)$ l'espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I : Réduction de l'endomorphisme f

1. Les vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ appartenant à $\mathrm{Ker}(f)$ sont les solutions de l'équation :

$$f(x,y,z) = (0,0,0) \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x & & & = 0 \\ x + 2y + z & = 0 \\ 2x - 2y - z & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = 0 \\ 2y + z & = 0 \\ 0 & = 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ z & = -2y \end{cases}$$

Ainsi : $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, y, -2y) |\ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0, 1, -2))$. Le vecteur $(0, 1, -2)$ constitue donc à lui seul une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$ et est non nul, il forme donc aussi une famille libre, donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

D'après la propriété de cours bien connue, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\right) = \mathrm{Vect}\left((1,1,2), (0,2,-2), (0,1,-1)\right) = \mathrm{Vect}\left((1,1,2), (0,1,-1)\right)$$

puisque $f(e_2) = 2f(e_1)$ On a obtenu une famille génératrice de deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(f)$, c'est donc aussi une famille libre, donc une base de ce sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

<u>Remarque</u> : les dimensions obtenues de ces deux sous-espaces (respectivement 1 et 2) sont cohérentes avec le théorème du rang...

2. Le noyau de f n'étant pas réduit à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, cela suffit pour déduire que f n'est pas injective, donc pas bijective. On en déduit que 0 est valeur propre de f.

3. On a déjà vu que $u = (0, 1, -2)$ appartient au noyau de f, donc que u est un vecteur propre de f pour la valeur propre 0.

Le calcul matriciel : $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ prouve que : $f(v) = v$, donc que v est vecteur propre de f

pour la valeur propre 1.

le sous-espace propre $E_0(f)$ est $\mathrm{Ker}(f)$ qu'on a déjà déterminé, avec $\dim E_0(f) = 1$.

Pour déterminer la dimension de $E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, on considère le rang de la matrice
$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$: $\mathrm{rg}(A - I_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 2$
car les deux colonnes restantes sont non-colinéaires.

Le *théorème du rang* assure alors que :

$$\dim E_1(f) = \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 3 - 2 = 1$$

4. Les valeurs propres déjà obtenues ne permettent pas de se dispenser d'échelonner la matrice $A - \lambda.I_3$ pour trouver toutes les valeurs propres de f :

$$A - \lambda.I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (1+\lambda)L_2} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ \lambda+3 & \lambda-\lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ \lambda+3 & \lambda(1-\lambda) & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Il était ici plus facile d'échelonner $A - \lambda.I_3$ en une matrice triangulaire inférieure !
Le critère classique s'applique : λ est valeur propre de A (donc de f) si et seulement si $A - \lambda.I_3$ et non-inversible, ce qui est le cas si et seulement si l'un des coefficients de la réduite de Gauss est nulle,

soit : $\begin{cases} 1 - \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda(1-\lambda) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda = 1 \end{cases}$.

L'endomorphisme f n'a donc pas d'autres valeurs propres que 0 et 1.

Comme $\dim E_0(f) + \dim E_1(f) = 1 + 1 = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on en déduit que f n'est pas diagonalisable.

5. On cherche ici tous les vecteurs $t = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation :

$$f(t) = t + v \iff (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(t) = v \iff (A - I_3).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4x = 1 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/4 \\ y + z = 3/4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/4 \\ y = 3/4 - z \end{cases}$$

L'ensemble solution est donc : $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} - z, z \right) \middle| \; z \in \mathbb{R} \right\}$.

6. Le vecteur $w = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0)$ appartient bien à l'ensemble-solution précédent (pour $z = 0$) et vérifie donc :

$$f(w) = v + w$$

La famille (u, v, w) est constituée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, il suffit donc de montrer que c'est une famille libre pour que ce soit une base de cet espace vectoriel.

On pose donc une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs :

$$\lambda_1.u+\lambda_2.v+\lambda_3.w=0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} & & \frac{1}{4}\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 &+ \lambda_2 &+ \frac{3}{4}\lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_1 &- \lambda_2 & &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 &= 0 \\ -2\lambda_1-\lambda_2 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 &= 0 \quad L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

On en conclut que $(u,v,w$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle la matrice de f est en effet :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} \\ T= & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \end{array}$$

Partie II : Résolution d'une équation

Dans les questions 1,2 et 3 de cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$g\circ g=f$$

1. Selon l'hypothèse faite au début de cette partie :

$$f\circ g=(g\circ g)\circ g=g\circ(g\circ g)=g\circ f$$

Un endomorphisme commute toujours avec ses itérés, tout comme une matrice commute toujours avec l'une de ses puissances.

Du fait que f et g commute, on déduit :

$$f(g(u))=g(f(u))=g(0)=0 \quad \text{et} \quad f(g(v))=g(f(v))=g(v)$$

puisque u et v sont vecteurs propres de f pour les valeurs propres 0 et 1 respectivement.

2. La première des deux relations précédentes exprime que $g(u)\in\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(u)$ (d'après la question 1. de la partie I), il existe donc un réel a tel que $g(u)=a.u$.

De même, la relation $f(g(v))=g(v)$ exprime que $g(v)$ appartient à $E_1(f)$ qui est de dimension 1 et contient v, les vecteurs v et $g(v)$ sont donc colinéaires : il existe un réel b tel que $g(v)=b.v$.

3. On note N la matrice de g dans la base $\mathcal{C}=(u,v,w)$ définie à la question I.6.
Les relations $g(u)=a.u$ et $g(v)=b.v$ impliquent effectivement que dans la base (u,v,w), la matrice N est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} g(u) & g(v) & g(w) \end{array} \\ N= & \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \end{array}$$

puisqu'il existe une unique décomposition $g(w)=c.u+d.v+e.w$ du vecteur $g(w)$ dans la base (u,v,w).

4. Il existe des endomorphismes g tels que $g \circ g = f$ si et seulement si leurs représentations matricielles dans la base $\mathcal{C} = (u, v, w)$ sont égales, ce qui revient à résoudre l'équation matricielle :

$$N^2 = T \iff \begin{pmatrix} a^2 & 0 & ac+ec \\ 0 & b^2 & bd+ed \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 & = 0 \\ (a+e)c & = 0 \\ b^2 & = 1 \\ (b+e)d & = 1 \\ e^2 & = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = 0 \\ ec & = 0 \\ b & = 1 \text{ ou } b = -1 \\ e & = 1 \text{ ou } e = -1 \\ (b+e)d & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 0 \\ c & = 0 \\ b & = 1 \\ e & = 1 \\ d & = 1/2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a & = 0 \\ c & = 0 \\ b & = -1 \\ e & = -1 \\ d & = -1/2 \end{cases}$$

Les réels b et e ne peuvent pas, en effet, être opposés vu la condition $(b+e)d = 1$.
On en déduit qu'il existe deux matrices N solutions de l'équation $N^2 = T$:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_2 = -N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui correspondent respectivement aux deux seuls endomorphismes g_1 et g_2, solutions de l'équation :

$$g \circ g = f$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Pour tout réel $x \in]0, +\infty[$: $1+x > 0$ donc $\ln(1+x) > \ln(1) \iff \ln(1+x) > 0$ par stricte croissance de ln sur $]0, +\infty[$.
Ainsi : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)} > 0$ comme quotient de deux réels strictement positifs.

On peut alors montrer que $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n > 0$" pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence sur n.
$\boxed{\text{I.}}$ Le premier terme $u_0 = e$ est bien défini et strictement positif d'après l'énoncé.
$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons sous cette hypothèse que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie :

On sait (H.R.) que : u_n existe et $u_n > 0$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini, et $u_{n+1} = f(u_n) > 0$ d'après ce qui précède.
Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.
$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

2. ```
function y=U(N)
    U=%e
    for i=1:N
        U = U/log(1+U)
    end
    y=U
endfunction
```

3. La fonction $f$ est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur cet intervalle, où le dénominateur ne s'annule pas.

   Étude de la continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ par limite classique de taux d'accroissement, donc par inverse :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1 \iff \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$
   et la fonction $f$ est donc continue en 0. Finalement, $f$ est continue sur $[0,+\infty[$.

4. La fonction $f$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ comme composée et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

5. On utilise ici développements limités classiques à l'ordre 2 en 0 :
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$
   donc :
$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} - x + x^2 + o(x^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
   Par ailleurs, pour tout $x \in ]0,+\infty[$: $\quad f'(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}}{[\ln(1+x)^2]}$, où :
$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$
   Donc par compatibilité de l'équivalence avec le produit et le quotient :
$$f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2/2}{x^2} \quad \text{soit :} \quad f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

6. On ne peut plus, dans le nouveau programme, utiliser le théorème de prolongement de la dérivée pour conclure rapidement ici sur le comportement de $f$ en 0, le seul point qui pose problème.

   On sait que $f$ est continue en 0, étudions la dérivabilité de $f$ en ce point :

   $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\dfrac{x}{\ln(1+x)} - 1}{x} = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$, où :

   $x - \ln(1+x) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ et $x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, donc :

   $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2/2}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$. On en conclut que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{2}$, donc $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

   L'équivalent obtenu à la question précédente donne aussi : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ : $f'$ est donc continue en 0, c'est-à-dire que $f$ est finalement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
```

7. Pour tout $x \geqslant e-1$: $1+x \geqslant e$, donc $\ln(1+x) \geqslant 1$ par stricte croissance de ln sur $]0,+\infty[$. De la sorte :

$\forall x \geqslant e-1, \quad \dfrac{x}{\ln(x+1)} \leqslant x \iff f(x) \leqslant x, \quad$ et $(x+1)\ln(x+1) \geqslant x+1$.

Une réduction au même dénominateur dans l'expression de $f'(x)$ donne :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{(1+x)[\ln(1+x)]^2}$$

où : $\forall x \geqslant e-1,\ (x+1)\ln(x+1)-x \geqslant x+1-x \iff (x+1)\ln(1+x)-x \geqslant 1$,
et $\forall x \geqslant e-1,\ x>0$ et $\ln(1+x) \geqslant 1$.

Ainsi, par produit et quotient : $\quad \forall x \geqslant e-1,\ f'(x) \geqslant 0$.

8. On peut alors démontrer que $\mathcal{P}(n)$: "$e-1 \leqslant u_n$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par récurrence sur n.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n=0$: $u_0 = e \geqslant e-1$ est vrai.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons sous cette hypothèse que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

———————————————-

On sait (H.R.) que : $\quad e-1 \leqslant u_n$; or d'après le résultat précédent, f est croissante sur $[e-1,+\infty[$, donc :

$$f(e-1) \leqslant f(u_n), \text{ où : } f(u_n) = u_{n+1} \text{ et } f(e-1) = \frac{e-1}{\ln(1+e-1)} = e-1.$$

Ainsi : $\quad e_1 \leqslant u_{n+1}$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

9. Faisons ici la synthèse des résultats précédents :

- On sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ e-1 \leqslant u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par $e-1$.

- La minoration précédente et la première inégalité obtenue à la question 7. donne alors :
  $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) \leqslant u_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est décroissante.

Par conséquent :

- La suite (u_n) est **décroissante** et **minorée** par $e-1$: elle est donc **convergente**, d'après le **théorème de limite monotone**. Notons L sa limite, qui vérifie : $L \geqslant e-1$.

- La suite (u_n), minorée par $e-1$, vérifie la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ et on a vu que f est continue sur $[e-1,+\infty[$;
  on peut donc passer à la limite dans la relation de récurrence, et L est une solution sur $[e-1,+\infty[$ de l'équation :

$$L = f(L) \iff L = \frac{L}{\ln(1+L)} \iff \ln(1+L) = 1 \iff 1+L = e \iff L = e-1$$

On a donc prouvé que : $\qquad (u_n)$ converge en décroissant vers $L = e-1$.

Exercice 3

Soit p un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0;1[$. On note $q = 1 - p$.

On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p.

Partie I : Étude d'une première expérience

On procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: « *On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce* ».

On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : « La pièce donne FACE lors du j-ième lancer » ;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

1. Simulation informatique.

   a) La simulation d'une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p est le script de base qu'il faut absolument savoir refaire sans aucune hésitation !

   On se base ici sur le fait que si U désigne une variable aléatoire suivant la loi uniforme à densité sur $[0,1]$, alors : $\forall p \in]0,1[,\ P(U \leqslant p) = F_U(p) = p$. D'où le script :

```
function y = LANCER(p)
    U = rand()
    if U <= p  then // ou : if U < p
        y = 1
    else
        y = 0
    end
endfunction
```

   b) On réutilise la fonction précécente pour simuler ici le temps d'attente d'un premier succès :

```
function y = PREMIER_PILE(p)
    x = 0
    n = 0
    while x < 1
        x = LANCER(p)
        n = n+1
    end
    y = n
endfunction
```

   L'initialisation de la variable `x` à 0 assure, vu la condition de boucle, qu'on simulera au moins un lancer. On rend ainsi la première valeur du compteur `n` correspondant au nombre de boucle effectuées, donc de lancers simulés jusqu'à obtenir un premier PILE codé par 1.

   c) Pour simuler le temps d'attente d'un deuxième PILE, on peut en effet réutiliser la fonction PREMIER_PILE : on attend d'abord un premier PILE, puis tout se passe comme si on recommençait l'expérience à zéro : un nouveau temps d'attente T_2 d'un premier PILE, ajouté au premier T_1, donne au total le temps d'attente du deuxième PILE.

   Le nombre total de lancers est donc $T_1 + T_2$, parmi lesquels 2 sont des PILE, et $T_1 + T_2 - 2$ sont donc des FACE.

```
p = input("Donner la probabilité de PILE : )
T1 = PREMIER_PILE(p);
T2 = PREMIER_PILE(p);
disp("Nombre de FACE obtenus quand on a obtenu 2 PILE : "+string(T1+T2-2))
```

Les caractéristiques du générateur de nombres pseudo-aléatoires de `Scilab` permettent de considérer que les deux appels successifs à la fonction PREMIER_PILE sont indépendants.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: X_n compte le nombre de PILE obtenus en n lancers de pièce identiques et indépendants, donc évidemment, X_n suit la loi binômiale de paramètres (n, p) :

$$X_n(\Omega) = [\![0, n]\!],\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad E(X_n) = np, \quad V(X_n) = np(1-p)$$

3. Comme les deux premiers PILE peuvent apparaître dès les deux premiers lancers, la variable discrète Y a pour valeur minimale 0. Avant le premier PILE, ou entre les deux PILE souhaités, le nombre de FACE peut être en fait quelconque, donc : $\quad Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
4. Selon le principe expliqué à la question précédente : $\quad P(Y = 0) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = (1-p)^2$ par indépendance des lancers.
   $[Y = 1] = (F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})(\overline{F_1} \cup F_2 \cup \overline{F_3})$, union disjointe d'événements qui donne :
   $P(Y = 1) = (1-p).p^2 + p(1-p)p = 2p^2(1-p)$.
   $[Y = 2] = (F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap \overline{F_4}) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F_4}) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap \overline{F_4})$, donc : $\quad P(Y = 2) = 3p^2(1-p)^2$, par union disjointe puis indépendance des lancers.

   Soit enfin n un entier naturel quelconque : l'événement $[Y = n]$ est réalisé si et seulement si on a besoin de $n+2$ lancers exactement, ni plus ni moins, pour obtenir deux PILE, et n FACE au passage ; cela se produit donc si et seulement si :
   - le $n+2$-ième lancer donne un PILE, le deuxième, c'est l'événement $\overline{F_{n+2}}$,
     ET
   - le premier PILE est obtenu n'importe quand au cours des $n+1$ premiers lancers, ce qui revient à dire qu'au cours des $n+1$ premiers lancers, on a obtenu exactement un seul PILE (et donc n FACE) : c'est l'événement $[X_{n+1} = 1]$.

   Donc, en effet : $\qquad [Y = n] = [X_{n+1} = 1] \cap \overline{F_{n+2}}$.
5. Les deux événements dont $[Y = n]$ est ainsi l'intersection, sont bien indépendants : $[X_{n+1} = 1]$ ne dépend en effet que du résultat des $n+1$ premiers lancers, qui sont mutuellement indépendants du résultat du lancer $n+2$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y = n) = P(X_{n+1} = 1) \times P(\overline{F_{n+2}}) = \binom{n+1}{1} p^1 q^n \times p = (n+1)p^2 q^n$$

6. Soit $N \in \mathbb{N}$, et la somme partielle :

$$\sum_{n=0}^{N} P(Y = n) = \sum_{n=0}^{N} (n+1)p^2 q^n \overset{[j=n+1]}{=} p^2 \sum_{j=1}^{N+1} j q^{j-1}$$

   On reconnaît une série géométrique dérivée de raison $q \in]0, 1[$, qui est donc convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j q^{j-1} = p^2 \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1$$

7. La variable aléatoire Y possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 0} nP(Y = n)$ est absolument convergente. Comme $n \in \mathbb{N}$ et $P(Y = n)$ est positif comme probabilité, il suffit de prouver la

convergence simple de la série. Pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=\cancel{0}\ 1}^{N} nP(Y=n) = p^2 \sum_{n=1}^{N} n(n+1)q^n \overset{[j=n+1]}{=} p^2 \sum_{j=2}^{N+1} (j-1)jq^{j-1} = p^2 q \sum_{j=2}^{N+1} j(j-1)q^{j-2}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois de raison $q \in]0,1[$, qui est donc convergente : Y admet donc une espérance, qui vaut :

$$E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(Y=n) = p^2 q \sum_{j=2}^{+\infty} j(j-1)q^{j-2} = p^2 q \times \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2p^2 q}{p^3} = \frac{2q}{p}$$

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE.

   Il est clair que $Y_k(\Omega)$ est à nouveau égal à $\mathbb{N}$, puisqu'au mieux les k PILE voulus sont obtenus aux k premiers lancers.

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $[Y_k = n]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu n FACE le temps d'obtenir k PILE ; l'expérience a donc duré $n+k$ lancers au total, au cours desquels :
   - le $n+k$-ième lancer donne un PILE, le k-ième nécessaire
     ET
   - on a obtenu auparavant les $k-1$ premiers PILE parmi les $n+k-1$ premiers lancers, ce qui correspond à l'événement $[X_{n+k-1} = k-1]$.

   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ [Y_k = n] = [X_{n+k-1} = k-1] \cap \overline{F_{n+k}}$, et toujours par indépendance mutuelle des lancers, donc des deux événements dont $[Y = n]$ est l'intersection :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y_k = n) = \binom{n+k-1}{k-1} p^{k-1} q^n \times p = \binom{n+k-1}{k-1} p^k q^n$$

Partie II :Étude d'une seconde expérience

On procède à l'expérience suivante :

$\mathcal{F}$: « *Deux joueurs se relaient pour effectuer des lancers successifs de la pièce pendant la pause déjeuner.*
Le joueur 1 arrive à 12h (considéré comme l'instant 0) et joue jusqu'à l'arrivée du joueur 2.
Le joueur 2 arrive au hasard entre 12h et 13h puis joue jusqu'à 13h (considéré comme l'instant 1). »

On note :
- R la variable aléatoire égale à la durée (en heure) du jeu pour le joueur 1 ;
- S la variable aléatoire égale à la durée (en heure) du jeu pour le joueur 2 ;
- T la variable aléatoire égale à la durée (en heure) de jeu effectuée par le joueur ayant joué le plus longtemps, c'est-à-dire que :

$$T = \max(R, S)$$

On suppose que :

$$\boxed{R \text{ suit la loi uniforme sur } [0;1] \text{ et que } S = 1 - R}$$

(cette dernière relation traduisant que le temps total consacré au jeu par le joueur 1 et le joueur 2 est exactement une heure).

1. D'après le cours sur la loi uniforme à densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Mais alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_S(x) = P(S \leqslant x) = P(1 - R \leqslant x) = P(1 - x \leqslant R) = 1 - P(R \leqslant 1 - x)$ puisque R est à densité, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_S(x) = \begin{cases} 1 - 0 = 1 & \text{si } 1 - x \leqslant 0 \iff 1 \leqslant x \\ 1 - (1 - x) & \text{si } 0 \leqslant 1 - x \leqslant 1 \iff 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 - 1 = 0 & \text{si } 1 - x \geqslant 1 \iff 0 \geqslant x \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

On remarque donc que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_S(x) = F_R(x)$, c'est-à-dire que $S = 1 - R$ suit la même loi que R, uniforme à densité sur $[0, 1]$.

2. Soit t un réel quelconque ; puisque $T = \max(R, S)$, alors :

$$P(T \leqslant t) = P([R \leqslant t] \cap [S \leqslant t]) = P([R \leqslant t] \cap [1 - R \leqslant t]) = P([R \leqslant t] \cap [R \geqslant 1 - t])$$

3. Remarquons ici que si $t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, alors $(1 - t) - t = 1 - 2t \leqslant 0$, et $0 \leqslant 1 - t \leqslant t \leqslant 1$, donc :

$$F_T(t) = P(T \leqslant t) = P(1 - t \leqslant R \leqslant t) = F_R(t) - F_R(1 - t) = t - (1 - t) = 2t - 1$$

4. Pour les autres valeurs de $t \in \mathbb{R}$, il faut ici remarquer que :
   - Si $t < \dfrac{1}{2}$, alors $1 - t \geqslant \dfrac{1}{2} > t$, mais alors l'événement $[R \leqslant t] \cap [R \geqslant 1 - t]$ est impossible !

     Et : $\forall t \in \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[,\ F_T(t) = 0$.
   - Si $t > 1$, alors : $1 - t < 0$, donc les événements $[R \leqslant t]$ et $[R \geqslant 1 - t]$ sont presque-certains, et $F_T(t) = 1$.

   Bref : la fonction de répartition de T est définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

   Comme $2t - 1 = \dfrac{t - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{t - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$, on reconnaît bien en F_T la fonction de répartition de la loi uniforme à densité sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$: c'est effectivement la loi suivie par T.

5. Il suffit ici de citer le cours : T suivant la loi uniforme sur $[a, b] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ admet une espérance et une variance, qui valent :

$$E(T) = \frac{a + b}{2} = \frac{3}{4}, \quad \text{et} \quad V(T) = \frac{(b - a)^2}{12} = \frac{1/4}{12} = \frac{1}{48}$$