MATHÉMATIQUES - Ecricome E 2017

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

1. Les calculs matriciels donnent :

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ (A-I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ (A-I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

2. Les calculs précédents prouvent que $R(X) = (X-1)^3$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Celui-ci admet une unique racine réelle, à savoir $\lambda = 1$, c'est donc la seule valeur propre *possible* de A.

   Il reste encore à vérifier que $\lambda = 1$ est effectivement valeur propre de A : comme $A - I$ possède deux lignes identiques, elle n'est pas inversible, et par conséquent $\lambda = 1$ est bien valeur propre de A, et c'est la seule.

3. Au vu des résultats précédents :
   - La matrice A est inversible car 0 n'est pas valeur propre de cette matrice.
   - La matrice A n'est pas diagonalisable : ne possédant qu'une seule valeur propre $\lambda = 1$, si elle l'était, elle serait semblable à une matrice diagonale qui ne possède que des 1 sur la diagonale ; bref, A serait semblable à la matrice identité I ! Il existerait une matrice P inversible telle que $A = PIP^{-1} \iff A = I$: A devrait être *égale* à I, ce qui n'est évidemment pas le cas !

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1,1[, \quad \varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. La fonction φ est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1;1[$ comme composée de $x \mapsto 1+x$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1;1[$, à valeurs dans $]0;2[$ sur lequel la fonction racine carrée est de classe $\mathcal{C}^2$.

   $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} = \dfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ et $f''(x) = -\dfrac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$, donc $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f''(0) = -\dfrac{1}{4}$.

5. La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2}.x^2 + x^2.\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Avec les valeurs précédemment calculées, on obtient :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2.\varepsilon(x)$$

Le réel α cherché est donc $\alpha = -\dfrac{1}{8}$.

6. On note ainsi $P(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2$. On développe $\big(P(x)\big)^2$:

$$(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2)^2 = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 + x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 = 1 + x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4$$

7. Soit $C = A - I$; d'après ce qui précède :

$$\big(P(C)\big)^2 = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 = I + C = A$$

puisque d'après la question 1., $C^3 = C^4 = 0_3$.
La matrice $M = P(C)$ vérifie donc $M^2 = A$. Le calcul explicite donne :

$$M = I + \frac{1}{2}(A - I) - \frac{1}{8}(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 5/4 & -1.4 & 1 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w &= (1, 0, 1) \\ v &= f(w) - w, \\ u &= f(v) - v. \end{cases}$

a) Les calculs sont faits à partir de la matrice A qui donne les images $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$:

- $w = e_1 + e_3$, donc :

$$f(w) = f(e_1) + f(e_3) = (0, -1, -3) + (2, 2, 1) = (2, 1, -2)$$

et : $\quad v = f(w) - w = (1, 1, -3)$.

- $v = e_1 + e_2 - 3e_3$, donc :

$$f(v) = f(e_1) + f(e_2) - 3f(e_3) = (0, -1, -3) + (1, 2, 3) - (6, 6, 3) = (-5, -5, -3)$$

et : $\quad u = f(v) - v = (-6, -6, 0)$.

b) La famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de démontrer que c'est une famille libre.

Soient donc trois réels a, b, c tels que :

$$a.u + b.v + c.w = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -6a + b = 0 \\ -3b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ c = 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ -3b + c = 0 \end{cases} \iff c = 0 = b = a$$

La famille $\mathcal{B}'$ est bien libre, et c'est effectivement une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Les relations qui définissent la famille $\mathcal{B}'$ donnent déjà : $f(w) = v + w$ et $f(v) = u + v$, il suffit de calculer :

$f(u) = f(-6e_1 - 6e_2) = -6f(e_1) - 6f(e_2) = (0, 6, 18) + (-6, -12, -18) = (-6, -6, 0) = u.$

On en déduit la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

d) La formule de changement de base assure bien qu'il existe une matrice inversible P telle que $T = P^{-1}AP$: cette relation de similitude fait intervenir la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

$$P = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Si $N^2 = T$, alors $NT = N \times N^2 = N^3$ et $TN = N^2 \times N = N^3$, donc $NT = TN$. On cherche alors les matrices $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telles que :

$$NT = TN \iff \begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a = a+d \\ d = d+g \\ g = g \\ a+b = b+e \\ d+e = e+h \\ g+h = h \\ b+c = c+f \\ e+f = f+i \\ h+i = i \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0 \\ g = 0 \\ a = e \\ d = h \\ h = 0 \\ b = f \\ e = i \end{cases} \quad \text{par identification des coefficients}$$

Les matrices qui commutent avec T sont donc de la forme : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des réels quelconques.

b) D'après ce qui précède : toute matrice N solution de l'équation matricielle $N^2 = T$ commute avec T, donc est de la forme ci-dessus ; on cherche donc les réels a, b, c tels que :

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 & = 1 \\ 2ab & = 1 \\ b^2 + 2ac & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} + 2c = 0 \iff c = -\dfrac{1}{8} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} - 2c = 0 \iff c = \dfrac{1}{8} \end{cases}$$

L'équation matricielle $N^2 = T$ admet donc effectivement deux solutions :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. La formule de changement de base permet de mettre en lien les deux équations matricielles :

$$N^2 = T \iff PN^2P^{-1} = PTP^{-1} \iff PNP^{-1}PNP^{-1} = A \iff M^2 = A \quad \text{en posant } M = PNP^{-1}$$

L'équation $N^2 = T$ admet deux solutions N_1 et N_2, donc par équivalence, l'équation $M^2 = A$ admet elle-même les deux solutions $M_1 = PN_1P^{-1}$ et $M_2 = PN_2P^{-1}$.

11. L'ensemble $E = \{M_1, M_2\}$ des solutions de l'équation $M^2 = A$ n'est évidemment pas un espace vectoriel : il ne contient même pas la matrice nulle !

Exercice 2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0,\ \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Les limites du cours donnent : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^{2a} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = -\infty$.

   Pour tout $x > 0$: $\varphi(x) = x^{2a}.\left(\dfrac{\ln(x)}{x^{2a}} - a\right)$, où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^{2a}} = 0$ par croissances comparées puisque $a > 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^{2a}} - a = -a < 0$; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2a} = +\infty$, alors par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$.

2. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2x^{2a-1} = \frac{1 - 2a^2x^{2a}}{x}$$

   Pour tout $x > 0$: $\varphi'(x) > 0 \iff 1 > 2a^2x^{2a} \iff x^{2a} < \dfrac{1}{2a^2} \iff x < \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$ par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{2a}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   On en déduit le tableau des variations de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$:

x	0		x_0		$+\infty$
$\varphi'(x)$	||	$+$	0	$-$	
φ	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

La fonction φ admet un maximum en $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$, qui vaut : $\quad \varphi(x_0) = -\dfrac{1}{2a}\ln(2a^2) - \dfrac{1}{2a}$.

3. Le tableau de variations précédent permet de comprendre que le nombre de solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$ dépend du signe du maximum $\dfrac{-\ln(2a^2) - 1}{2a}$ de la fonction :

   $\varphi(x_0) > 0 \iff \dfrac{-\ln(2a^2) - 1}{2a} > 0 \iff -1 > \ln(2a^2) \iff e^{-1} > 2a^2 \iff \dfrac{1}{2e} > a^2 \iff \sqrt{\dfrac{1}{2e}} > a$. On a utilisé dans ces équivalences, la stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$, et celle de $\sqrt{.}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   Ainsi donc, si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, alors $\varphi(x_0) < 0$ et :

   - Sur $]0; x_0[$, la fonction φ est continue car dérivable, strictement croissante, à valeurs dans $]-\infty; \varphi(x_0)[$ qui contient 0. Ainsi, d'après le théorème de la bijection, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $z_1 \in]0; x_0[$.
   - De même, sur $]x_0; +\infty[$, la fonction φ est continue, strictement décroissante, encore à valeurs dans $]-\infty; \varphi(x_0)[$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $z_2 \in]x_0; +\infty[$.

   Finalement, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2 telles que $z_1 < x_0 < z_2$.

   Si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, alors $\varphi(x_0) = 0$: l'équation $\varphi(x) = 0$ admet alors pour unique solution, le réel x_0.

   Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, alors $\varphi(x_0) < 0$ et la fonction φ est strictement négative sur $\mathbb{R}^{+*}$ car son maximum l'est. Dans ce cas, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}^{+*})^2$ par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a$$

4. Les fonctions de deux variables $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur U (fonctions coordonnées), à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, de même que la fonction $t \mapsto t^a$, donc par produit, composition et somme, f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U.
5. Pour tout couple $(x, y) \in U$, en écrivant $f(x, y) = \ln(x)\ln(y) - x^a.y^a$:

$$\partial_1(f)(x, y) = \frac{\ln(y)}{x} - a.x^{a-1}.y^a \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} - a.x^a.y^{a-1}$$

6. Pour tout $(x,y)\in U$:

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases}\partial_1(f)(x,y) &= 0\\ \partial_2(f)(x,y) &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}\dfrac{\ln(y)}{x} - a.x^{a-1}.y^a &= 0\\ \dfrac{\ln(x)}{y} - a.x^a.y^{a-1} &= 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\dfrac{\ln(y)-a.(xy)^a}{x} &= 0\\ \dfrac{\ln(x)-a.(xy)^a}{y} &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}\ln(y) = a.(xy)^a\\ \ln(x) = a.(xy)^a\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\ln(x) = \ln(y)\\ \ln(x) = a.(xy)^a\end{cases} \iff \begin{cases}x = y\\ \ln(x) = a.(x^2)^a\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x = y\\ \ln(x) - a.x^{2a} = 0\end{cases} \iff \begin{cases}x = y\\ \varphi(x) = 0\end{cases}$$

7. Si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions z_1 et z_2 : le système précédent admet donc bien deux couples solutions, points critiques de f sur U, à savoir (z_1,z_1) et (z_2,z_2) tels que définis dans la partie A.

   Si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet pour unique solution le réel x_0 et la fonction f admet pour unique point critique le couple (x_0,x_0).

   Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet pas de solution, et la fonction f n'admet aucun point critique.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$.

8. Pour tout couple (x,y) de U :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = -\frac{\ln(y)}{x^2} - a.(a-1).x^{a-2}.y^a$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = -\frac{\ln(x)}{y^2} - a.(a-1).x^a.y^{a-2}$$

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = \frac{1}{xy} - a.x^{a-1}.a.y^{a-1} = \frac{1}{xy} - a^2.(xy)^{a-1} \quad \text{(théorème de Schwarz)}$$

9. La matrice hessienne de f au point (z_1,z_1) est : $\nabla^2(f)(z_1,z_1) = \begin{pmatrix}\partial^2_{1,1}(f)(z_1,z_1) & \partial^2_{1,2}(f)(z_1,z_1)\\ \partial^2_{2,1}(f)(z_1,z_1) & \partial_{2,2}(f)(z_1,z_1)\end{pmatrix}$

   où , puisque z_1 vérifie $\varphi(z_1) = 0 \iff \ln(z_1) = a.(z_1)^{2a}$:

$$\partial^2_{1,1}(f)(z_1,z_1) = -\frac{\ln(z_1)}{{z_1}^2} - a(a-1).(z_1)^{a-2}.(z_1)^a = -a.(z_1)^{2a-2} - (a^2-a).(z_1)^{2a-2} = -a^2.(z_1)^{2a-2}$$

$$\partial_{1,2}(f)(z_1,z_1) = \frac{1}{z_1^2} - a^2.(z_1^2)^{a-1} = \frac{1}{z_1^2} - a^2.(z_1)^{2a-2} = \partial_{2,1}(f)(x,y)$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(z_1,z_1) = -\frac{\ln(z_1)}{z_1^2} - a.(a-1).(z_1)^a.(z_1)^{a-2} = -a^2.(z_1)^{2a-2} \text{ (même calcul que plus haut)}$$

La hessienne de f au point (z_1, z_1) est bien

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2.z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}$$

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    Les produits matriciels donnent :

$$MX_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}$$

$$MX_2 = \begin{pmatrix} a^2 z_1^{2a-2} + \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ -\frac{1}{z_1^2} + a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} \\ -\frac{1}{z_1^2} \end{pmatrix}$$

    On remarque ainsi que : $MX_1 = (\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}). \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}).X_1$, donc $(\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2})$ est valeur propre de M, de vecteur propre associé X_1. De même :
    $MX_2 = \frac{1}{z_1^2}. \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{z_1^2}.X_2$, donc $-\frac{1}{z_1^2}$ est valeur propre de M, de vecteur propre associé X_2.
    Comme M est une matrice carrée d'ordre 2 : les deux vecteurs X_1 et X_2 étant clairement non colinéaires, ils forment une base de vecteurs propres de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

    Ainsi, les valeurs propres de M sont $\frac{1}{z_1^2} - a^2.z_1^{2a-2}$ et $-\frac{1}{z_1^2}$, et il n'y en a pas d'autre.

11. Il est ici clair que la valeur propre $-\frac{1}{z_1^2}$ est strictement positive. Pour trouver le signe de l'autre valeur propre $\frac{1}{z_1^2} - a^2.z_1^{2a-2} = \frac{1 - a^2.z_1^{2a}}{z_1^2}$, on se souvient que :

    $z_1 < x_0 \iff z_1^{2a} < \frac{1}{2a^2} \iff -2a^2 z_1^{2a} > -1 \iff 1 - 2a^2.z_1^{2a} > 0$, donc la deuxième valeur propre est strictement positive.

    Ainsi, les valeurs propres de la hessienne de f au point critique (z_1, z_1) sont de signes opposés : la fonction f ne présente pas un extrémum local en ce point, mais un point-col.

12. Il est clair que puisque z_2 est l'autre solution de l'équation $\varphi(x) = 0$, la hessienne de f au point critique (z_2, z_2) est en tout point similaire à la matrice M, où z_2 remplace partout z_1.

    Des calculs identiques à ceux faits à la question 10., montrent que les valeurs propres de la hessienne $\nabla^2(f)(z_2, z_2)$ sont $-\frac{1}{z_2^2} < 0$ et $\frac{1 - a^2.z_2^{2a}}{z_2^2}$, où cette fois :

    $z_2 > x_0 \iff z_2^{2a} > \frac{1}{2a^2} \iff -2a^2 z_2^{2a} < -1 \iff 1 - 2a^2.z_2^{2a-2} < 0$, donc cette fois les deux valeurs propres de la hessienne de f au point critique (z_2, z_2) sont strictement négatives : la fonction f admet donc un extrémum local au point (z_2, z_2), et c'est un maximum.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2,4,1,5,9, alors on obtient : $S_1 = 2,\ S_2 = 6,\ S_3 = 7,\ S_4 = 12,\ S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour chaque entier $k \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k suit évidemment la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$:

$$X_k(\Omega) = [\![1, n]\!], \quad \forall i \in X_k(\Omega),\ P(X_k = i) = \frac{1}{n}, \quad E(X_k) = \frac{n+1}{2}$$

2. a) La valeur minimale de chaque boule tirée étant égale à 1, il faut au maximum n tirages pour atteindre une somme des résultats obtenus supérieure ou égale à n. Au mieux, on tire dès le premier coup la boule numéro n et le total voulu est déjà atteint. Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles, donc $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

   b) L'événement $[T_n = 1]$ est réalisé si et seulement si le total de n points est atteint dès le premier tirage, donc :

$$P(T_n = 1) = P(X_1 = n) = \frac{1}{n}$$

   c) A contrario : l'événement $[T_n = n]$ est réalisé si et seulement si n tirages sont nécessaires pour atteindre ou dépasser le total de n points, ce qui est possible si et seulement si les $n-1$ premiers tirages ont donné la boule numéro 1 : le n-ième tirage, quel que soit son résultat, permet d'atteindre ou dépasser le total de n points. On a donc l'égalité d'événements :

$$[T_n = n] = [X_1 = 1] \cap \ldots \cap [X_{n-1} = 1]$$

   Par indépendance mutuelle des tirages, on en conclut que :

$$P(T_n = n) = P(X_1 = 1) \times \ldots \times P(X_{n-1} = 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

3. Dans cette question, $n = 2$ et donc $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$. Les résultats des deux questions précédentes donnent ainsi :

$$P(T_2 = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(T_2 = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{2}$$

4. Dans cette question, $n = 3$. Les résultats de la question 2. donnent cette fois :

$$P(T_3 = 1) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{1}{9}$$

Puisque $T_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, les événements $[T_3 = 1]$, $[T_3 = 2]$ et $[T_3 = 3]$ forment un système complet d'événements ; on peut ainsi calculer la dernière probabilité de la loi de T_3 en écrivant :

$$P(T_3 = 2) = 1 - P(T_3 = 1) - P(T_3 = 3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

La variable aléatoire finie T_3 admet ainsi une espérance qui vaut :

$$E(T_3) = 1 \times P(T_3 = 1) + 2 \times P(T_3 = 2) + 3 \times P(T_3 = 3) = \frac{1}{3} + \frac{10}{9} + \frac{3}{9} = \frac{16}{9}$$

Partie B

5. La somme des k premiers numéros tirés est au minimum égale à k, lorsque les numéros obtenus sont tous égaux à 1. Au maximum, les k numéros tirés sont tous égaux à n, et dans ce cas leur somme vaut nk. Ainsi : $S_k(\Omega) \subset [\![k, nk]\!]$.

   L'égalité est plus difficile à démontrer, on peut par exemple procéder par récurrence en définissant la propriété $\mathcal{P}(k)$: "$S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]$" pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   $\boxed{\text{I.}}$ Pour $k = 1$, $S_1 = X_1$ a bien pour univers-image $[\![1, n]\!]$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, et sous cette hypothèse, démontrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, soit : $S_{k+1}(\Omega) = [\![k+1, n(k+1)]\!]$.

   Pour tout entier $j \in [\![k+1, n(k+1)]\!]$, il existe un entier $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $j - i \in [\![k, nk]\!]$. Il existe donc, par hypothèse de récurrence, une série des k premiers tirages dont la somme vaut $j - i$.
   Il suffit alors que le $(k+1)$-ième tirage prenne la valeur i pour que S_{k+1} soit égale à j, et $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, selon le principe de récurrence.

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

   a) La récurrence précédente a fait apparaître la relation naturelle :

   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$$

   b) La formule des probabilités totales, appliquées avec le système complet d'événements $(S_k = j)_{k \leqslant j \leqslant nk}$, donne :

   $$\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{nk} P([S_k = j] \cap [S_{k+1} = i]) = \sum_{j=k}^{nk} P([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i - j])$$

   Il faut noter ici que X_{k+1} est indépendante de S_k qui ne dépend que des variables $X_1, \ldots, X_k$ qui sont mutuellement indépendantes de X_{k+1} (lemme des coalitions). De plus, l'événement $[X_{k+1} = i - j]$ n'est possible que si $1 \leqslant i - j \leqslant n \iff i - n \leqslant j \leqslant i - 1$. Comme on considère un entier i tel que $k + 1 \leqslant i \leqslant n$ alors $i - n \leqslant 0$, et comme j doit être un entier naturel, les seuls termes de la somme précédente qui sont non nuls ont un indice j compris entre k et $i - 1$, et :

   $$\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) \times P(X_{k+1} = i - j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)$$

7. a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, la formule de Pascal donne la relation :

   $$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}$$

b) La relation précédente permet d'écrire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout entier naturel $i \geqslant k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j}{k} - \binom{j-1}{k} = \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j}{k} - \sum_{h=k-1}^{i-2} \binom{h}{k}$$
$$= \binom{i-1}{k} - \binom{k-1}{k} = \binom{i-1}{k} \qquad \text{puisque } \binom{k-1}{k} = 0, \text{ vu que } k-1<k$$

c) Pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\text{« } \forall i \in [\![k,n]\!], \quad P(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} \text{ »}$$

Démontrons par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $k=1$: $S_1 = X_1$, et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $P(S_1 = i) = P(X_1 = i) = \dfrac{1}{n}$, et par ailleurs $\dfrac{1}{n^1}\dbinom{i-1}{0} = \dfrac{1}{n}$, donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie pour un certain $k \in [\![1,n]\!]$, et sous cette hypothèse, montrons que $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie, soit : $\forall i \in [\![k+1,n]\!]$, $P(S_{k+1} = i) = \dfrac{1}{n^{k+1}}\dbinom{i-1}{k}$.

Pour tout entier $i \in [\![k+1,n]\!]$:

$$P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j) \overset{H.R.}{=} \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}$$
$$= \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k} \quad \text{d'après 7.b)}$$

ce qui prouve que $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie si $\mathcal{H}_k$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, d'après le principe de récurrence.

8. a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$: l'événement $[T_n > k]$ est réalisé si et seulement si le nombre de tirages nécessaires pour atteindre ou dépasser le total de n points, est strictement supérieur à k. Ceci se produit si et seulement si les k premiers tirages sont insuffisants pour atteindre ce total de n points, c'est-à-dire si $[S_k \leqslant n-1]$. En clair :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad [T_n > k] = [S_k \leqslant n-1]$$

b) Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$; d'après ce qui précède, et au vu de l'univers-image $S_k(\Omega) = [\![k,nk]\!]$:

$[T_n > k] = [S_k \leqslant n-1] = \displaystyle\bigcup_{j=k}^{n-1} [S_k = j]$; par union disjointe :

$$P(T_n > k) = P(S_k \leqslant n-1) = \sum_{j=k}^{n-1} P(S_k = j) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{j-1}{k-1}$$
$$= \frac{1}{n^k}\sum_{j=k}^{n-1}\binom{j-1}{k-1} = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$$

Le dernier calcul de somme reprend le résultat de la question 7.b), avec $i = n$.

Il reste à vérifier que lorsque $k=0$, la formule obtenue est encore vraie : $P(T_n>0)=1$ car T_n est certainement strictement positive, et $\frac{1}{n^0}\binom{n-1}{0}=1$, donc :

$$\forall k\in [\![0,n-1]\!],\quad P(T_n>k)=\frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$$

9. La variable aléatoire T_n est d'univers-image $[\![1,n]\!]$ fini, donc elle admet une espérance qui vaut :

$$E(T_n)=\sum_{k=1}^{n}kP(T_n=k)=\sum_{k=1}^{n}k\big(P(T_n>k-1)-P(T_n>k)\big)$$
$$\overset{[j=k-1]}{=}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)P(T_n>j)-\sum_{k=1}^{n}kP(T_n>k)=\sum_{j=0}^{n-1}jP(T_n>j)-\sum_{k=1}^{n}kP(T_n>k)+\sum_{j=0}^{n-1}P(T_n>j)$$
$$=\sum_{j=0}^{n-1}P(T_n>j)+0.P(T_n>0)-nP(T_n>n)$$

Puisque $[T_n>n]$ est un événement impossible, sa probabilité est nulle, et on a bien démontré :

$$E(T_n)=\sum_{k=0}^{n-1}P(T_n>k)$$

Avec la formule obtenue à la question 8.b), on en déduit :

$$E(T_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k.1^{n-1-k}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

d'après la formule du binôme de Newton.

10. Le calcul de limite demandé est classique, on commence par écrire :
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=e^{(n-1)\ln(1+\frac{1}{n})}$, où puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$:
d'après l'équivalent classique $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim}u$, $\ln(1+\frac{1}{n})\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$, et comme $n-1\underset{n\to+\infty}{\sim}n$,
alors $(n-1)\ln(1+\frac{1}{n})\underset{n\to+\infty}{\sim}1$.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)\ln(1+\frac{1}{n})=1$, donc par composition avec l'exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty}e^{(n-1)\ln(1+\frac{1}{n})}=e^1=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\lim_{n\to+\infty}E(T_n)$$

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variables $(T_n)_{n\geqslant 1}$ obtenue.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\quad\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(Y=k)=\frac{k-1}{k!}$.

a) Notons d'abord que les réels $\dfrac{k-1}{k!}$ sont bien tous positifs, pour $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n!} = 1$, ce qui prouve que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k) = 1$, et donc qu'on a bien défini par ces formules, une variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

b) La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} kP(Y=k)$ est absolument convergente. Comme $k \geqslant 1$ et puisque $P(Y=k)$ est une probabilité, la série est à termes positifs et on est ramené à étudier sa convergence simple :

Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(Y=k) = \sum_{k=\cancel{0}\,2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!}$: on reconnaît ici une série exponentielle, donc convergente ; la variable aléatoire Y admet donc une espérance qui vaut :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(Y=k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e^1$$

12. Pour tout entier naturel k non nul :

$$P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n^k} \times \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-1-i)}{n^k \times k!}$$

Or : pour tout entier i compris entre 0 et $k-1$, $n-1-i \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, donc par produit d'équivalent :

$\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(n-1-i) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k$, et par conséquent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-1-i)}{n^k} = 1$, ce qui donne bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n\to+\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}$$

On pourra rapprocher le raisonnement et les calculs menés ici des démonstrations du cours sur l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

13. On réutilise ici une dernière fois la relation fondamentale :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)$$

pour en déduire, d'après ce qui précède :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n\to+\infty} P(T_n = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!} = P(Y=k)$$

Résultat valable y compris si $k=1$ pour lequel, puisque $T_n(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$:

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(T_n = 1) = \lim_{n\to+\infty} 1 - P(T_n > 1) = 1 - \frac{1}{1!} = 0 = P(Y=1)$.

Le résultat de limite ainsi démontré : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(T_n = k) = P(Y=k)$, prouve que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, converge en loi vers Y.

14. Le script `Scilab` proposé est classique : il consiste à additionner l'un après l'autre les résultats des tirages aléatoires successifs d'un entier choisi avec équiprobabilité parmi $[\![1, n]\!]$, tant que cette somme est inférieure à n ; la variable de sortie est ici représentée par y, le nombre de tirage effectués, qui doit être incrémentée d'une unité à chaque boucle exécutée :

```
function y=T(n)
    S = 0
    y = 0
    while S < n
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S = S+tirage
        y = y+1
    end
endfunction
```

15. On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

```
function y=freqT(n)
    y=zeros(1,n)
    for i=1:100000
        k=T(n)
        y(k)=y(k)+1
    end
    y=y/100000
endfunction

function y=loitheoY(n)
    y=zeros(1,n)
    for k=1:n
        y(k) = (k-1)/prod(1:k)
    end
endfunction

clf
n=input('n=?')
plot2d(loitheoY(6),style=-2)
x=freqT(n)
bar(x(1:5))
```

a) Pour chacune des valeurs de n choisies pour l'exécution du script : la fonction `freqT` calcule et renvoie le vecteur des fréquences empiriques de chacune des valeurs possibles de la variable T_n sur un échantillon d'effectif 100000. Sur le graphique, ces fréquences sont représentées par le diagramme en barres.

La fonciton `loitheoY`, elle, crée plus simplement le vecteur des probabilités de la loi de la variable aléatoire Y, dont les 6 premières valeurs sont représentées sur le graphique par des croix.

b) Au fil des graphiques, lorsque n augmente, on constate la concordance de plus en plus forte entre les fréquences empiriques des valeurs de T_n, et les valeurs théoriques de la loi de la variable limite Y, ce qui doit bien illustrer la convergence en loi de la suite de variables $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers Y.