

**EXERCICE**

Soit  $m$  un réel donné strictement positif et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice  $M$  dans la base

canonique de  $\mathbb{R}^3$  est donnée par : 
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $I$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $\text{Id}$  l'endomorphisme identité de  $\mathbb{R}^3$ .  
 Pour tout endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^3$ , on pose  $g^0 = \text{Id}$  et pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $g^k = g \circ g^{k-1}$ .

1. Un vecteur  $u = (x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  appartient au noyau  $\text{Ker}(f)$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 1/m \cdot y + 1/m^2 \cdot z = 0 \\ m \cdot x + 1/m \cdot z = 0 \\ m^2 \cdot x + m \cdot y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} m^2 \cdot x + m \cdot y = 0 \\ m \cdot x + 1/m \cdot z = 0 \\ 1/m \cdot y + 1/m^2 \cdot z = 0 \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} m^2 \cdot x + m \cdot y = 0 \\ -m \cdot y + z = 0 \quad L_2 \leftarrow m \cdot L_2 - L_1 \\ 1/m \cdot y + 1/m^2 \cdot z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} m^2 \cdot x + m \cdot y = 0 \\ -m \cdot y + z = 0 \\ 2z = 0 \quad L_3 \leftarrow m^2 \cdot L_3 + L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque  $m > 0$ , on en conclut que le système est de Cramer, et admet pour unique solution :  $x = y = z = 0$ .

Ainsi :  $\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$  est réduit au vecteur nul, et  $f$  est un endomorphisme injectif.

Comme on travaille en dimension finie,  $f$  est alors aussi surjectif<sup>1</sup> et :  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ .

Il reste à dire que  $f$  étant par conséquent bijectif, sa matrice représentative  $M$  est bien sûr inversible !

2. a) Le calcul matriciel donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} m/m + m^2/m^2 & 0 + 0 + m/m^2 & 0 + 1/m^2 + 0 \\ 0 + 0 + m^2/m & m/m + 0 + m/m & m/m^2 + 0 + 0 \\ 0 + m^2 + 0 & m^2/m + 0 + 0 & m^2/m^2 + m/m + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix}, \text{ soit :}$$

$$M^2 = M + 2.I$$

b) On en déduit :  $M^2 - M - 2.I = 0$ , c'est-à-dire que  $P(X) = X^2 - X - 2$  est un polynôme annulateur de la matrice  $M$  (et donc aussi de l'endomorphisme  $f$  qu'elle représente).

c) On sait que les valeurs propres de  $M$  figurent parmi les racines du polynôme annulateur  $P$ .

On obtient facilement les racines :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 2$ .

On vérifie alors si  $M - \lambda_1.I$  et/ou  $M - \lambda_2.I$  sont inversibles :

---

1. conséquence du théorème du rang !

- $M + I = \begin{pmatrix} 1 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 1 & 1/m \\ m^2 & m & 1 \end{pmatrix}$  est clairement non-inversible, puisque les trois lignes de cette matrice sont proportionnelles :  $L_3 = m.L_2 = m^2.L_1$ , donc  $\lambda_1 = -1$  est bien valeur propre de  $M$ .

On termine le calcul du sous-espace propre associé en résolvant le système :

$$(M + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + 1/m.y + 1/m^2.z = 0 \iff x = -y/m - z.m^2.$$

$$\text{Ainsi : } E_{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -y/m - z/m^2 \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1/m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/m^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille génératrice obtenue étant constituée de deux vecteurs non-colinéaires, elle forme aussi une famille libre, donc une base du sous-espace propre, et :  $\dim E_{-1}(M) = 2$ .

- $M - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & -2 & 1/m \\ m^2 & m & -2 \end{pmatrix}$ . On résout le système :  $(M - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   

$$\iff \begin{cases} -2x + y/m + z/m^2 = 0 \\ mx - 2y + z/m = 0 \\ m^2x + my - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + y/m + z/m^2 = 0 \\ -3y + 3z/m = 0 \\ 3my - 3z = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + mL_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + m^2L_1 \end{matrix}$$

Les deux dernières lignes étant redondantes, on supprime par exemple la dernière. et on obtient le système équivalent :  $\begin{cases} x = y/2m + z/2m^2 = z/m^2 \\ y = z/m \end{cases}$ . On en déduit que  $\lambda_2 = 2$  est bien valeur propre de  $M$  puisqu'on obtient une infinité de solutions au système ; le sous-espace propre associé est :

$$E_2(M) = \left\{ \begin{pmatrix} z/m^2 \\ z/m \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1/m^2 \\ 1/m \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

La famille génératrice obtenue étant constituée d'un seul vecteur non-nul, elle forme aussi une famille libre, donc une base du sous-espace propre, et :  $\dim E_2(M) = 1$ .

Les deux valeurs propres de la matrice  $M$  (et donc de  $f$ ) sont ainsi  $-1$  et  $2$ , et comme :

$\dim E_{-1}(M) + \dim E_2(M) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ , on en conclut que  $M$  (donc  $f$ ) est diagonalisable.

3. Les résultats obtenus précédemment permettraient d'en déduire une relation de changement de base du type :

$P = PDP^{-1}$ , où  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $P$  serait une matrice de passage dont les colonnes seraient les trois vecteurs propres de base obtenus précédemment.

Une récurrence immédiate donnerait :  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$ , où  $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$  est obtenue de façon immédiate ; on en déduirait l'expression explicite de  $M^n$  à la suite de deux produits matriciels.

4. On pose :  $p = \frac{1}{3}(f + \text{Id})$  et  $q = -\frac{1}{3}(f - 2\text{Id})$ .

a) D'après les règles de composition des endomorphismes :

$p \circ q = \frac{1}{3}(f + \text{Id}) \circ \left(-\frac{1}{3}(f - 2\text{Id})\right) = -\frac{1}{9}(f \circ f + f - 2f - 2\text{Id}) = -\frac{1}{9}(f^2 - f - 2\text{Id}) = 0$ , endomorphisme nul puisque le polynôme annulateur  $P$  de  $M$  vaut aussi pour  $f$ . On trouve de même que  $q \circ p = 0$ .

Ensuite :  $p^2 = p \circ p = \frac{1}{9}(f + \text{Id})^2 = \frac{1}{9}(f^2 + 2f + \text{Id}) = \frac{1}{9}(2f + \text{Id} + 2f + \text{Id}) = \frac{1}{9}(3f + 3\text{Id}) = \frac{1}{3}(f + \text{Id})$ ,

c'est-à-dire :  $\boxed{p^2 = p}$ . Une récurrence immédiate donne bien sûr :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p^n = p}$ .

De même :  $q^2 = \frac{1}{9}(f - 2\text{Id})^2 = \frac{1}{9}(f^2 - 4f + 4\text{Id}) = \frac{1}{9}(f + 2\text{Id} - 4f + 4\text{Id}) = \frac{1}{9}(-3f + 6\text{Id}) = -\frac{1}{3}(f - 2\text{Id})$ ,

soit :  $\boxed{q^2 = q}$ , qui donne là encore par récurrence :  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, q^n = q}$ .

b) Remarquons ici (très difficile sans indication!) que :  $2p - q = \frac{2}{3}f + \frac{2}{3}\text{Id} + \frac{1}{3}f - \frac{2}{3}\text{Id} = f$ , et donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, f^n = (2p - q)^n$ .

Comme  $p$  et  $q$  commutent, la formule du binôme de Newton pour les endomorphismes s'applique, qui donne :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, f^n &= (2p - q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2p)^k \circ (-q)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \cdot p^k \circ (-1)^{n-k} \cdot q^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} 2^0 \cdot p^0 \circ (-1)^n \cdot q^n + \binom{n}{n} 2^n \cdot p^n \circ (-1)^0 \cdot q^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k \cdot (-1)^{n-k} \cdot p^k \circ q^{n-k} \end{aligned}$$

Pour  $1 \leq k \leq n-1$  :  $n-k \geq 1$ , donc  $p^k \circ q^{n-k} = p \circ q = 0$ , donc tous les termes de la dernière somme écrite s'annulent ! On a aussi  $p^n = p$  et  $q^n = q$ , donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = 2^n \cdot p + (-1)^n \cdot q$$

c) En reprenant les expressions de  $p$  et  $q$  en fonction de  $f$  et  $\text{Id}$ , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = 2^n \cdot \frac{1}{3}(f + \text{Id}) + (-1)^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (f - 2\text{Id}) = \underbrace{[2^n/3 + 2 \cdot (-1)^n/3]}_{=a_n} \cdot \text{Id} + \underbrace{[2^n/3 - (-1)^n/3]}_{=b_n} \cdot f$$

La relation obtenue pour les endomorphismes, se transpose à leur représentation matricielle dans la base canonique : avec les valeurs de  $a_n$  et  $b_n$  définies précédemment, on a bien  $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = a_n \cdot I + b_n \cdot M$ .

d) La relation matricielle  $M^2 = M + 2I$  donne aussi :  $M^2 - M = 2I \iff \frac{1}{2}(M - I)M = I$ , ce qui prouve que  $M$  est inversible, d'inverse  $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)$ .

En rappelant que  $f = 2p - q$  et en remarquant également que  $p + q = \text{Id}$ , on en déduit :

$$f^{-1} = \frac{1}{2}(2p - q - p - q) = \frac{1}{2}p - q$$

La même formule du binôme et des calculs semblables à ceux effectués à la question b) donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (f^{-1})^n = \frac{1}{2^n} \cdot p + (-1)^n \cdot q$$

ou encore :  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{-n} = 2^{-n} \cdot p + (-1)^{-n} \cdot q$ , ce qui signifie que la formule pour  $f^n$  est aussi valable pour tout entier négatif, donc au final pour tout entier relatif  $n \in \mathbb{Z}$ .

## PROBLÈME

Sous réserve d'existence, on note  $E(U)$  et  $V(U)$  respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire  $U$  définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Pour  $p$  entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité  $U_1, \dots, U_p$  sont indépendantes si pour tout  $p$ -uplet  $(u_1, \dots, u_p)$  de réels, les événements  $[U_1 \leq u_1], \dots, [U_p \leq u_p]$  sont indépendants.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité. Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

### Partie I. Loi à un paramètre

On note  $\lambda$  un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction  $f_\lambda$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. a) La fonction racine carrée :  $x \mapsto \sqrt{x}$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et  $\exp$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ , donc par composée et quotient,  $f_\lambda$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

b) Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :  $f'_\lambda(x) = -\frac{\lambda}{4x\sqrt{x}} \cdot e^{-\lambda\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{\lambda}{2\sqrt{x}}\right) \cdot e^{-\lambda\sqrt{x}} = -\frac{\lambda}{4} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{x}\right) \cdot e^{-\lambda\sqrt{x}} < 0$ , donc la fonction  $f_\lambda$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$

(la dérivée de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$  étant  $x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot x^{-3/2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ).

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} = +\infty$  car  $\lambda > 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\lambda\sqrt{x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\lambda\sqrt{x}} = e^0 = 1$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = +\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda\sqrt{x} = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda\sqrt{x}} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = 0$ .

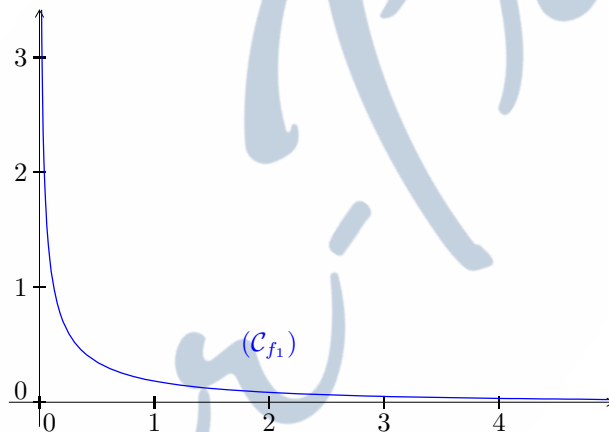
c) La fonction  $f_\lambda$  étant de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on étudie le signe de sa dérivée seconde pour déterminer sa convexité :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f''_\lambda(x) &= -\frac{\lambda}{4} \cdot \left[ \left( -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} - \frac{\lambda}{x^2} \right) \cdot e^{-\lambda\sqrt{x}} + \left( \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{x} \right) \cdot \frac{-\lambda}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\lambda\sqrt{x}} \right] \\ &= \frac{\lambda}{4} \cdot \left[ \frac{3}{2x^2\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{x^2} + \frac{\lambda}{2x^2} + \frac{\lambda^2}{2x\sqrt{x}} \right] \cdot e^{-\lambda\sqrt{x}} \end{aligned}$$

expression qui permet d'affirmer directement que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f''_\lambda(x) > 0$  et donc que :

la fonction  $f_\lambda$  est *convexe* sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

d) Graphe de la fonction  $f_1$  :



2. a) La fonction  $G : x \mapsto -e^{-\lambda\sqrt{x}}$  est bien de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme on l'a vu en 1.a), avec :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $G'(x) = -\frac{-\lambda}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\lambda\sqrt{x}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\lambda\sqrt{x}} = f_\lambda(x)$ , donc  $G$  est bien une primitive de  $f_\lambda$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

b) L'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx$  est doublement impropre en 0 et en  $+\infty$ , on pose donc dans un premier temps, pour deux réels  $A$  et  $B$  tels que  $0 < A < B$  :

$\int_A^B f_\lambda(x) dx = [G(x)]_A^B = -e^{-\lambda\sqrt{B}} + e^{-\lambda\sqrt{A}}$ , puis on considère la limite de cette expression quand  $A$  tend vers 0 et  $B$  tend vers  $+\infty$  :

$\lim_{A \rightarrow 0^+} -\lambda\sqrt{A} = 0$ , donc  $\lim_{A \rightarrow 0^+} e^{-\lambda\sqrt{A}} = e^0 = 1$ , et :  $\lim_{B \rightarrow +\infty} -\lambda\sqrt{B} = -\infty$ , donc  $\lim_{B \rightarrow +\infty} e^{-\lambda\sqrt{B}} = 0$ .

On peut donc conclure que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx$  converge et vaut :  $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx = 1$ .

c) On vérifie comme d'habitude les 3 critères qui font de  $f_\lambda$  une densité de probabilité :

- La fonction  $f_\lambda$  est nulle sur  $] -\infty, 0]$  et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc positive sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $f_\lambda$  est constante nulle, donc continue sur  $] -\infty, 0[$  et continue (car de classe  $C^2$ ) sur  $]0, +\infty[$ , donc continue sur  $\mathbb{R}$  sauf en 0.
- D'après les calculs de la question précédente, et vu que  $f_\lambda$  est nulle sur  $] -\infty, 0]$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x) dx = \int_{-\infty}^0 f_\lambda(x) dx + \int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx = 0 + 1 = 1$$

La fonction  $f_\lambda$  est donc bien une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

3. Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs strictement positives, ayant  $f_\lambda$  pour densité. On note  $F_\lambda$  la fonction de répartition de  $X$  et on pose :  $Y = \lambda\sqrt{X}$ .

a) Pour tout réel  $x$ ,  $F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^x f_\lambda(x)dx$ . On distingue bien sûr deux cas :

- Pour tout  $x \leq 0$  :  $F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$ .

- Pour tout  $x > 0$  :  $F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^0 f_\lambda(x)dx + \int_0^x f_\lambda(x)dx = 0 + \lim_{A \rightarrow 0^+} -e^{-\lambda\sqrt{x}} + e^{-\lambda\sqrt{A}} = 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}$ .

b) La v.a.r.  $X$  ayant pour densité  $f_\lambda$ , on a  $X(\Omega) = ]0, +\infty[$ . Comme  $\lambda > 0$ ,  $Y = \lambda\sqrt{X}$  a donc aussi  $]0, +\infty[ = Y(\Omega)$  pour univers-image, et on peut déjà écrire :  $\forall x \in ]-\infty, 0]$ ,  $F_Y(x) = 0$ . Puis, pour tout réel  $x \in ]0, +\infty[$  :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\lambda\sqrt{X} \leq x) = P(\sqrt{X} \leq \frac{x}{\lambda}) = P(X \leq \frac{x^2}{\lambda^2}) = F_\lambda(\frac{x^2}{\lambda^2}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{\frac{x^2}{\lambda^2}}}$$

$$= 1 - e^{-\lambda\frac{x}{\lambda}} = 1 - e^{-x} \text{ puisque } x \text{ et } \lambda \text{ sont strictement positifs.}$$

Ainsi :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ , ce qui est bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1, que suit donc la variable aléatoire  $Y$ .

Une densité de  $Y$  est alors la fonction  $g : x \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ .

c) Soit  $r \in \mathbb{N}^*$  ; d'après le théorème de transfert :  $Y$  admet un moment d'ordre  $r$  si et seulement si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot g(x)dx$  est absolument convergente. Comme  $g$  est nulle sur  $]-\infty, 0]$  et positive sur  $]0, +\infty[$ , cela revient à étudier la convergence simple de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^r \cdot e^{-x} dx$ .

Par croissances comparées :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{r+2} \cdot e^{-x} = 0$ , ce qui signifie :  $x^r \cdot e^{-x} = o(\frac{1}{x^2})$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Les fonctions  $x \mapsto x^r \cdot e^{-x}$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  étant continues et positives sur  $[1, +\infty[$  : d'après le théorème de comparaison, les intégrales  $\int_1^{+\infty} x^r \cdot e^{-x} dx$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  sont de même nature, donc convergentes car la deuxième est une intégrale de Riemann avec  $\alpha = 2 > 1$ .

La continuité de  $x \mapsto x^r \cdot e^{-x}$  sur  $[0, 1]$  assure que  $\int_0^{+\infty} x^r \cdot e^{-x} dx = \int_0^1 x^r \cdot e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^r \cdot e^{-x} dx$  est une intégrale convergente.

La variable aléatoire  $Y$  admet donc des moments  $E(Y^r)$  de tous ordres  $r \in \mathbb{N}^*$ .

d) Pour tout entier  $r \in \mathbb{N}^*$ , et pour un réel  $A > 0$  quelconque, on réalise une intégration par parties dans l'intégrale :  $\int_0^A x^{r+1} \cdot e^{-x} dx$  :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{r+1} & \rightarrow & u'(x) = (r+1) \cdot x^r \\ v'(x) &= e^{-x} & \rightarrow & v(x) = -e^{-x} \end{aligned}$$

Les fonctions concernées sont bien de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ , donc :

$$\int_0^A x^{r+1} \cdot e^{-x} dx = [-x^{r+1} \cdot e^{-x}]_0^A - \int_0^A -(r+1) \cdot x^r \cdot e^{-x} dx = -A^{r+1} \cdot e^{-A} + (r+1) \int_0^A x^r \cdot e^{-x} dx.$$

Il reste à passer à la limite dans cette égalité lorsque  $A \rightarrow +\infty$ , sachant que les intégrales convergent (démontré à la question précédente), et que  $\lim_{A \rightarrow +\infty} A^{r+1} \cdot e^{-A} = 0$  par croissances comparées :

$$\int_0^{+\infty} x^{r+1} \cdot e^{-x} dx = 0 + (r+1) \cdot \int_0^{+\infty} x^r \cdot e^{-x} dx \iff E(Y^{r+1}) = (r+1) \cdot E(Y^r)$$

e) Sachant que  $E(Y) = 1$  (espérance d'une loi exponentielle de paramètre 1), la relation précédente donne, par une récurrence immédiate :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, E(Y^r) = r!$$

La relation  $Y = \lambda\sqrt{X}$  se réécrivant :  $Y^2 = \lambda^2 X \iff X = \frac{Y^2}{\lambda^2}$ , on en déduit que  $X$  admet une espérance qui vaut :

$$E(X) = E\left(\frac{Y^2}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot E(Y^2) = \frac{2!}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} \text{ par linéarité de l'intégrale.}$$

De même,  $X^2 = \frac{Y^4}{\lambda^4}$  admet une espérance qui vaut :  $E(X^2) = \frac{1}{\lambda^4} E(Y^4) = \frac{1}{\lambda^4} \cdot 4! = \frac{24}{\lambda^4}$ .

La variable aléatoire  $X$  admet donc un moment d'ordre 2, et par conséquent une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{24}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda^4} = \frac{20}{\lambda^4}$$

4. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et de même loi que  $X$ . Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites de réels strictement positifs vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a_n = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 b_n = 0 \text{ (en clair : } a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \text{ et } b_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)\text{).}$$

On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $M_n = \min_{1 \leq k \leq n} (X_k)$  et  $J_n = \frac{M_n - b_n}{a_n}$ . On admet que  $M_n$  et  $J_n$  sont des variables aléatoires à densité définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

L'étude de la convergence en loi de la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  passe par le calcul des fonctions de répartition des variables aléatoires  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ; pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout réel  $x$  :

$$F_{J_n}(x) = P(J_n \leq x) = P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \stackrel{a_n > 0}{=} P(M_n - b_n \leq x a_n) = P(M_n \leq a_n x + b_n)$$

$$= P\left(\min_{1 \leq k \leq n} (X_k) \leq a_n x + b_n\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^n [X_k \leq a_n x + b_n]\right) \text{ car le minimum de ces } n \text{ v.a.r. est inférieur à } a_n x + b_n$$

si et seulement si l'une des v.a.r. vérifie l'inégalité.

Les événements n'étant pas incompatibles a priori, on passe plutôt par l'événement contraire :

$$F_{J_n}(x) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^n [X_k \leq a_n x + b_n]\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k > a_n x + b_n]\right) = 1 - \prod_{k=1}^n P(X_k > a_n x + b_n) \text{ par}$$

indépendance des  $X_k$ . Comme toutes ces v.a.r. suivent la même loi que  $X$ , on en déduit enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{J_n}(x) = 1 - (P(X > a_n x + b_n))^n = 1 - (1 - F_\lambda(a_n x + b_n))^n$$

$$F_{J_n}(x) = \begin{cases} 1 - (1 - 0)^n = 0 & \text{si } a_n x + b_n \leq 0 \iff x \leq -\frac{b_n}{a_n} \\ 1 - (e^{-\lambda \sqrt{a_n x + b_n}})^n = 1 - e^{-\lambda n \sqrt{a_n x + b_n}} & \text{si } a_n x + b_n > 0 \iff x > -\frac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

On examine alors la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{J_n}(x)$  pour chaque réel  $x$ .

Comme  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$  et  $b_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , alors  $b_n = o(a_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{b_n}{a_n} = 0$

(on peut aussi l'écrire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n^2 \cdot b_n}{n^2 \cdot a_n} = -\frac{0}{1} = 0$ ).

Conséquence : pour tout réel  $x < 0$ , il existe un entier  $N$  tel que :  $x \leq -\frac{b_n}{a_n}$ , et alors :  $\forall n \geq N, F_{J_n}(x) = 0$ , ce qui permet de conclure que :

$$\forall x \in ]-\infty; 0[, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{J_n}(x) = 0$$

À l'opposé, pour tout réel  $x \geq 0$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, x > -\frac{b_n}{a_n}$  et  $F_{J_n}(x) = 1 - e^{-\lambda n \sqrt{a_n x + b_n}} = 1 - e^{-\lambda \sqrt{n^2 a_n x + n^2 b_n}}$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a_n = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 b_n = 0$ , donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{J_n}(x) = 1 - e^{-\lambda \sqrt{x}}$ .

$$\text{Bilan : } \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{J_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \sqrt{x}} & \text{pour tout } x \geq 0 \end{cases} = F_\lambda(x)$$

On en conclut que la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de  $X$ .

► **Commentaire** : beaucoup d'initiatives sont donc à prendre dans cette question ! Il faut bien maîtriser pour cela la définition de la convergence en loi d'une suite de variables à densité.

## Partie II. Estimation ponctuelle de $\lambda$

Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire  $X$  définie à la question 3.

On rappelle que  $Y = \lambda \cdot \sqrt{X}$ , et on pose pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  :  $Y_k = \lambda \cdot \sqrt{X_k}$ ,  $S_k = \sum_{j=1}^k Y_j$  et  $g_k$  une densité de  $S_k$ .

**On admet** que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  sont indépendantes et que pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , les variables aléatoires  $S_k$  et  $Y_{k+1}$  sont indépendantes.

**On admet** que si  $T$  et  $Z$  sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives  $f_T$  et  $f_Z$  telles que  $f_T$  (ou  $f_Z$ ) soit bornée, alors la variable aléatoire  $T + Z$  admet une densité  $f_{T+Z}$  définie pour tout réel  $x$  par :  $f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y) \cdot f_Z(x-y) dy$ .

5. a) Au vu des résultats de la partie I, question 3.b), les variables aléatoires  $Y_1 = \lambda \cdot \sqrt{X_1}$  et  $Y_2 = \lambda \cdot \sqrt{X_2}$  suivent la même loi exponentielle de paramètre 1. Une densité de celle-ci est la fonction  $g$  de I.3.b), qui est bornée par 0 et 1 sur  $\mathbb{R}$ . La variable aléatoire  $S_2 = Y_1 + Y_2$  admet donc une densité  $g_2$  définie pour tout réel  $x$  par :  $g_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \cdot g(x-y) dy$ .

Il s'agit maintenant d'exprimer explicitement la fonction intégrée, sachant que :

$g(y) \cdot g(x-y) = 0$  pour tous réels  $y$  tels que :

$$g(y) = 0 \iff y \leq 0, \text{ et } g(x-y) = 0 \iff x-y \leq 0 \iff y \geq x.$$

Ainsi : pour tout réel négatif  $x \leq 0$ , la fonction  $y \mapsto g(y) \cdot g(x-y)$  ne prend que des valeurs nulles, et  $g_2(x) = 0$ .

Remarque : c'est cohérent avec le fait que  $S_2$  est la somme de deux v.a.r. à valeurs strictement positives !

Pour tout réel  $x \geq 0$  :  $g_2(x) = \int_0^x e^{-y} \cdot e^{-(x-y)} dy = \int_0^x e^{-x} dy = x \cdot e^{-x}$ .

► **Remarque** : encore une question difficile, hors-programme ECE (mais au programme ECS : *produit de convolution de deux densités*), malgré tout fréquemment présente dans les sujets de parisiennes, et qu'il vaut mieux avoir vue au cours de sa préparation aux écrits ! Plus que jamais il est nécessaire de bien comprendre les définitions de l'énoncé, et d'examiner très soigneusement les intervalles considérés dès qu'on travaille avec les expressions explicites des densités utilisées.

b) On généralise ici le principe de calcul mis en œuvre à la question précédente :

**I.** Pour  $n = 1$  :  $S_1 = Y_1$  suit la loi exponentielle, de densité  $g : x \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ , ce qui correspond

bien à la formule générale demandée lorsque  $n = 1$ .

**H.** Supposons la propriété vraie pour un certain entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Au rang suivant :  $S_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$  est la somme de deux v.a.r. indépendantes selon l'énoncé, où  $Y_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$  admet une densité  $g$  bornée.

Selon le théorème du produit de convolution admis dans l'énoncé, la variable aléatoire  $S_{n+1}$  admet une densité  $g_{n+1}$  définie pour tout réel  $x$  par :  $g_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y) \cdot g(x-y) dy$ .

Comme précédemment :  $g_n(y) \cdot g(x-y) = 0 \iff y \leq 0$  ou  $x-y \leq 0 \iff y \geq x$ , et pour tout réel  $x \leq 0$ ,  $g_n(y) \cdot g(x-y)$  est alors nulle pour tout réel  $y$ , donc :

$$\forall x \in ]-\infty, 0], g_{n+1}(x) = 0$$

Pour tout réel  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \int_0^x g_n(y) \cdot g(x-y) dy = \int_0^x \frac{1}{(n-1)!} y^{n-1} \cdot e^{-y} \cdot e^{-(x-y)} dy \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot e^{-x} \cdot \int_0^x y^{n-1} dy = \frac{1}{(n-1)!} \cdot e^{-x} \cdot \left[ \frac{y^n}{n} \right]_0^x = \frac{e^{-x}}{(n-1)!} \cdot \frac{x^n}{n} \\ &= \frac{1}{n!} \cdot x^n \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang  $n + 1$ .

**C.** La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , d'après le principe de récurrence.

c) On admet que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{S_n}$  est une variable aléatoire à densité.

D'après le théorème de transfert : l'espérance  $E(1/S_n)$  existe si et seulement si l'intégrale  $\frac{1}{x} \cdot g_n(x) dx$ ; comme  $g_n$  est nulle sur  $] -\infty, 0]$  et positive sur  $]0, +\infty[$ , cela revient à étudier la convergence simple de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \cdot x^{n-2} \cdot e^{-x} dx$ .

On a déjà établi (partie I, questions 3.b) et 3.c)) que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^r \cdot e^{-x} dx$  converge pour tout entier  $r \in \mathbb{N}^*$ , et même  $r \in \mathbb{N}$ . Donc pour tout entier  $n$  tel que  $n - 2 \geq 0 \iff n \geq 2$ , l'intégrale est convergente.

Pour  $n = 1$  :  $\frac{1}{x} \cdot g(x) = \frac{e^{-x}}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ , mais  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  est divergente (critère de Riemann); le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives affirme donc que  $\frac{1}{S_1}$  n'admet pas d'espérance.

$E(1/S_n)$  existe donc pour tout entier  $n \geq 2$ , et vaut, d'après les résultats de I.3.c) sur la v.a.r.  $Y$  :

$$\forall n \geq 2, E(1/S_n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-2} \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{(n-1)!} E(Y^{n-2}) = \frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n-1}.$$

De même :  $V(1/S_n)$  existe si et seulement si  $\frac{1}{S_n}$  admet un moment d'ordre 2, donc si et seulement si

l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cdot g_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \cdot x^{n-3} \cdot e^{-x} dx$  est (absolument) convergente.

Comme précédemment, c'est vrai pour tout entier  $n \geq 3$ , et faux pour  $n = 1$  et  $n = 2$ .

$E(1/S_n^2)$  existe donc pour tout entier  $n \geq 3$ , et vaut :

$$E(1/S_n^2) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} x^{n-3} \cdot e^{-x} dx = \frac{(n-3)!}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}.$$

La v.a.r.  $\frac{1}{S_n}$  admet donc, pour tout entier  $n \geq 3$ , une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$\forall n \geq 3, V(1/S_n) = E(1/S_n^2) - E(1/S_n)^2 = \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{1}{(n-1)^2(n-2)}.$$

6. On note  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un  $n$ -uplet de  $(\mathbb{R}_+^*)^n$  constituant une réalisation du  $n$ -échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . On suppose que le paramètre  $\lambda$  est inconnu. Soit  $H$  la fonction de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$H(\lambda) = \ln \left( \prod_{k=1}^n f_\lambda(x_k) \right)$$

Explications  $H(\lambda)$  à l'aide de l'expression de  $f_\lambda(x)$  pour une meilleure compréhension :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, H(\lambda) &= \ln \left( \prod_{k=1}^n \frac{\lambda}{2\sqrt{x_k}} \cdot e^{-\lambda \cdot \sqrt{x_k}} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{x_k}} \cdot e^{-\lambda \cdot \sqrt{x_k}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(\lambda) - \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(x_k) - \lambda \cdot \sqrt{x_k} \\ &= n \cdot \ln(\lambda) - \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} - n \ln(2) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \end{aligned}$$

Vue comme une fonction de la variable  $\lambda$ ,  $H$  est bien dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , avec :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, H'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}, \text{ et : } H'(\lambda) \geq 0 \iff \frac{n}{\lambda} \geq \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} \iff \frac{n}{\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}} \geq \lambda.$$



En notant  $\lambda_0 = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}}$  : la fonction  $H$  est donc strictement croissante sur  $]0, \lambda_0]$ , puis strictement décroissante sur  $[\lambda_0, +\infty[$ . Elle admet donc bien un maximum en  $\lambda_0$ .

7. On pose pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3 :  $\lambda_n^* = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \sqrt{X_k}}$ .

a) Le réel  $\lambda_0 = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}}$  est donc une réalisation de la variable aléatoire  $\lambda_n^*$ , construite à partir du  $n$ -échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

b) Commençons par évaluer le biais éventuel de l'estimateur  $\lambda_n^*$  ; on calcule pour cela :

$$E(\lambda_n^*) = E\left(\frac{\lambda.n}{\sum_{k=1}^n \lambda.\sqrt{X_k}}\right) = E\left(\frac{\lambda.n}{\sum_{k=1}^n Y_k}\right) = \lambda.n.E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda.n}{n-1}$$

d'après les définitions et résultats précédents (question 5.c) notamment).

L'estimateur  $\lambda_n^*$  est donc biaisé, mais la linéarité de l'intégrale permet de corriger ce biais via l'estimateur  $\widehat{\lambda}_n = \frac{n-1}{n}.\lambda_n^*$ , qui vérifie :  $E(\widehat{\lambda}_n) = \frac{n-1}{n}.E(\lambda_n^*) = \frac{n-1}{n}.\frac{\lambda.n}{n-1} = \lambda$ .

$$\text{Ainsi : } \widehat{\lambda}_n = \frac{n-1}{\sum_{k=1}^n \sqrt{X_k}} \text{ est un estimateur sans biais de } \lambda.$$

Comme  $\widehat{\lambda}_n$  est un estimateur sans biais de  $\lambda$ , son risque quadratique est simplement sa variance :

$$\rho(\widehat{\lambda}_n) = V(\widehat{\lambda}_n) = \frac{(n-1)^2}{n^2}.V\left(\frac{\lambda.n}{S_n}\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2}.n^2.\lambda^2.V\left(\frac{1}{S_n}\right) = \lambda^2.(n-1)^2.\frac{1}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\lambda^2}{n-2}$$

puisque  $n$  est un entier supérieur ou égal à 3.

c) Il est alors évident que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(\widehat{\lambda}_n) = 0$ . On dit que l'estimateur  $\widehat{\lambda}_n$  est *convergent*, au sens où plus  $n$  est grand, plus la probabilité d'obtenir une estimation proche du vrai paramètre  $\lambda$ , est forte.

### Partie III. Loi à deux paramètres

8. Soient  $\lambda$  et  $\alpha$  deux paramètres réels strictement positifs et  $f_{(\lambda,\alpha)}$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f_{(\lambda,\alpha)}(x) = \begin{cases} \lambda.\alpha.x^{\alpha-1}.\exp(-\lambda.x^\alpha) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Vérifions à nouveau les trois points nécessaires pour affirmer que  $f_{(\lambda,\alpha)}$  est une densité de probabilité :

- La fonction puissance  $x \mapsto x^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln(x)}$  étant positive et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $f_{(\lambda,\alpha)}$  est bien positive sur  $]0, +\infty[$  et même sur  $\mathbb{R}$  car elle est nulle sur  $] -\infty, 0]$ , et
- $f_{(\lambda,\alpha)}$  est continue sur  $]0, +\infty[$  comme produit et composée de fonctions continues, continue sur  $] -\infty, 0[$  comme fonction constant nulle, donc continue sur  $\mathbb{R}$  sauf peut-être en 0.
- Sur  $]0, +\infty[$ ,  $x \mapsto \alpha.x^{\alpha-1}$  est la dérivée de  $x \mapsto x^\alpha$ , donc  $f_{(\lambda,\alpha)}$  admet pour primitive la fonction :  $x \mapsto -\exp(-\lambda.x^\alpha)$ , et :

Pour tous réels  $A, B$  tels que  $0 < A < B$ ,

$$\int_A^B f_{(\lambda,\alpha)}(x)dx = [-\exp(-\lambda.x^\alpha)]_A^B = -\exp(-\lambda.B^\alpha) + \exp(-\lambda.A^\alpha), \text{ où :}$$

$\lim_{A \rightarrow 0^+} A^\alpha = 0$  selon le prolongement par continuité classique de cette fonction de référence

(sachant que  $A^\alpha = \exp(\alpha \cdot \ln(A))$  où  $\lim_{A \rightarrow 0^+} \alpha \cdot \ln(A) = -\infty$  car  $\alpha > 0$ ), donc :  $\lim_{A \rightarrow 0^+} -\lambda \cdot A^\alpha = 0$  et

$$\lim_{A \rightarrow 0^+} \exp(-\lambda \cdot A^\alpha) = e^0 = 1.$$

D'autre part :  $\lim_{B \rightarrow +\infty} -\lambda \cdot B^\alpha = -\infty$  car  $\lambda > 0$ , donc  $\lim_{B \rightarrow +\infty} \exp(-\lambda \cdot B^\alpha) = 0$ .

Tout ceci prouve que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_{(\lambda, \alpha)}(x) dx$  est convergente, et vaut 1.

Comme par ailleurs,  $\int_{-\infty}^0 f_{(\lambda, \alpha)}(x) dx = 0$  car  $f_{(\lambda, \alpha)}$  est nulle sur l'intervalle considéré :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda, \alpha)}(x) dx = \int_{-\infty}^0 f_{(\lambda, \alpha)}(x) dx + \int_0^{+\infty} f_{(\lambda, \alpha)}(x) dx \text{ est bien convergente et vaut 1.}$$

Finalement, la fonction  $f_{(\lambda, \alpha)}$  est bien une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

Soit alors  $W$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs strictement positives, de densité  $f_{(\lambda, \alpha)}$ . On dit que  $W$  suit la loi  $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$  (*Loi de Weibull*).

b) On note  $F_{(\lambda, \alpha)}$  la fonction de répartition de  $W$ . Au vu des calculs précédents, il est clair que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, F_{(\lambda, \alpha)}(x) = \int_{-\infty}^x f_{(\lambda, \alpha)}(x) dx = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F_{(\lambda, \alpha)}(x) = \int_0^x f_{(\lambda, \alpha)}(x) dx = \lim_{A \rightarrow 0^+} -\exp(-\lambda \cdot x^\alpha) + \exp(-\lambda \cdot A^\alpha) = 1 - \exp(-\lambda \cdot x^\alpha).$$

c) Une question classique, mais importante sur le *transfert* de loi : la fonction  $F_{(\lambda, \alpha)}$  est nulle sur  $]-\infty, 0[$  et continue sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[0, +\infty[$ , intervalle sur lequel elle est également strictement croissante (car sa dérivée  $f_{(\lambda, \alpha)}$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ ), avec  $F_{(\lambda, \alpha)}(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{(\lambda, \alpha)}(x) = 1$  puisque c'est une fonction de répartition ;  $F_{(\lambda, \alpha)}$  réalise donc une *bijection* de  $[0, +\infty[$  dans  $[0, 1[$ .

La bijection réciproque  $F_{(\lambda, \alpha)}^{-1}$  est alors continue, strictement croissante de  $[0, 1[$  dans  $[0, +\infty[$ . Comme  $W(\Omega) = ]0, +\infty[$ , la variable aléatoire  $F_{(\lambda, \alpha)}(W)$  est bien définie et à valeurs dans  $[0, 1[$ .

On peut donc déjà conclure que : 
$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty, 0[, & P(F_{(\lambda, \alpha)}(W) \leq x) = 0 \text{ (l'événement est impossible)} \\ \forall x \in [1, +\infty[, & P(F_{(\lambda, \alpha)}(W) \leq x) = 1 \text{ (l'événement est certain)} \end{cases}$$

Enfin, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$  :

$$\begin{aligned} P(F_{(\lambda, \alpha)}(W) \leq x) &= P(W \leq F_{(\lambda, \alpha)}^{-1}(x)) \text{ par stricte croissance de } F_{(\lambda, \alpha)}^{-1} \text{ sur } [0, 1[ \\ &= F_{(\lambda, \alpha)}(F_{(\lambda, \alpha)}^{-1}(x)) \text{ car } W \text{ a pour f.d.r. } F_{(\lambda, \alpha)} \\ P(F_{(\lambda, \alpha)}(W) \leq x) &= x \end{aligned}$$

Finalement, la fonction de répartition  $G$  de  $F_{(\lambda, \alpha)}(W)$  est vérifiée : 
$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

ce qui prouve bien que  $F_{(\lambda, \alpha)}(W)$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1[$ .

d) La bijectivité de  $F_{(\lambda, \alpha)}$  sert encore ici pour *simuler* la loi de  $W$  ; on vient de voir en effet que  $U = F_{(\lambda, \alpha)}(W)$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1[$ , la relation se réécrivant aussi :  $W = F_{(\lambda, \alpha)}^{-1}(U)$  où  $U$  peut être simulée par l'appel à la fonction `rand()` de `Scilab`.

Il reste donc à expliciter la bijection réciproque, en résolvant pour tout  $y \in [0, 1[$ , l'équation :  $F_{(\lambda, \alpha)}(x) = y$  d'inconnue  $x \in [0, +\infty[$ .

$$F_{(\lambda, \alpha)}(x) = y \iff 1 - \exp(-\lambda \cdot x^\alpha) = y \iff \exp(-\lambda \cdot x^\alpha) = 1 - y \iff -\lambda \cdot x^\alpha = \ln(1 - y)$$

$$\iff x^\alpha = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - y) \iff x = \left[ -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - y) \right]^{1/\alpha}$$

(Remarque :  $y \in [0, 1[$  donc  $\ln(1 - y) < 0$  et  $-\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - y) > 0$ , donc la puissance  $1/\alpha$  est bien définie).

$$\text{Ainsi : si } U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]), \text{ alors } W = \left[ -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 - U) \right]^{1/\alpha} \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, \alpha).$$

```

function r=W(lambda, alpha)
    u=rand()
    r = (-log(1-u)/lambda)^(1/alpha)
endfunction

```

9. Soit  $K$  une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , à valeurs strictement positives, de densité  $f_K$  nulle sur  $\mathbb{R}_-$ , continue sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On note  $F_K$  la fonction de répartition de  $K$ .

On pose pour tout  $x$  réel :  $R(x) = -\ln(1 - F_K(x))$  et  $r(x) = R'(x)$  (où  $R'$  est la fonction dérivée de  $R$ ).

a) On suppose dans cette question que  $K$  suit la loi  $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$  avec  $\lambda > 0$ .

Alors, pour tout réel positif  $x$  :  $F_K(x) = 1 - e^{-\lambda x^2}$  et  $f_k(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$ .

(i) La fonction  $R$  est alors de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  (car  $F_K$  l'est), avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, R'(x) = \frac{f_k(x)}{1 - F_K(x)}, \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R}_+, r(x) = \frac{2\lambda x e^{-\lambda x^2}}{e^{-\lambda x^2}} = 2\lambda x.$$

La fonction  $r$  est donc, ici, affine et même linéaire, de coefficient directeur  $2\lambda > 0$  : elle est bien strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $r(0) = 0$ .

(ii) La variable aléatoire  $r(K) = 2\lambda K$  est alors une *transformée affine* de  $K$  : d'après la propriété correspondante du cours,  $r(K)$  est donc encore une variable à densité, dont une densité  $g$  est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{|2\lambda|} f\left(\frac{x}{2\lambda}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2\lambda} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\lambda}} = 2 \times \frac{1}{4\lambda} e^{-\frac{x^2}{4\lambda}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

ce qui correspond bien à la densité de la loi de Weibull de paramètres  $\left(\frac{1}{4\lambda}, 2\right)$

b) Réciproquement, on suppose que les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées, et on cherche alors la loi de  $K$ .

On sait déjà que  $f_k$  est nulle sur  $\mathbb{R}_-$ , donc  $F_K$  aussi ; pour tout réel  $x$  positif :

$F_K(x) = P(K \leq x) = P(r(K) \leq r(x))$ , la stricte croissance de  $r$  sur  $\mathbb{R}_+$  assurant l'égalité des événements  $[K \leq x]$  et  $[r(K) \leq r(x)]$ . On a aussi  $r(x) \geq 0$  d'après les propriétés (i) de  $r$ .

Et comme d'après (ii),  $r(K) \hookrightarrow \mathcal{WB}\left(\frac{1}{4\lambda}, 2\right)$  :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, F_K(x) = 1 - e^{-\frac{1}{4\lambda} \cdot (r(x))^2}$ .

Cette relation se réécrit :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, 1 - F_K(x) = e^{-\frac{1}{4\lambda} \cdot (r(x))^2} \iff -\ln(1 - F_K(x)) = \frac{1}{4\lambda} \cdot (r(x))^2$ , soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, R(x) = \frac{(r(x))^2}{4\lambda}.$$

Dans cette question, l'énoncé a supposé que  $f_k$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et  $F_K$  l'est aussi, donc  $r$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et par dérivation de la relation précédente, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, R'(x) = r(x) = \frac{1}{4\lambda} \cdot 2 \cdot r'(x) \cdot r(x) \iff 1 = \frac{1}{2\lambda} \cdot r'(x) \iff r'(x) = 2\lambda$$

Puisque :  $\forall x > 0, r(x) > r(0) = 0$ , ce qui permet de simplifier.

La fonction  $r$  est de dérivée constante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc affine sur cet intervalle. Comme elle est continue sur  $\mathbb{R}$  et que  $r(0) = 0$ , on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, r(x) = 2\lambda \cdot x \text{ et donc : } \forall x \in \mathbb{R}_+, F_K(x) = 1 - e^{-\frac{1}{4\lambda} \cdot (2\lambda \cdot x)^2} = 1 - e^{-\lambda \cdot x^2}$$

Ce qui prouve bien que  $K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2)$ .

On a donc montré une équivalence par double implication : avec les hypothèses et fonctions introduites dans l'énoncé de la question 9.,  $K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2) \iff r(K) \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2)$ .

Dans les questions 10. et 11., l'entier  $n$  est supérieur ou égal à 2. On note  $w_1, w_2, \dots, w_n$  des réels strictement positifs et non tous égaux.

10. Soit  $\varphi$  la fonction de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  définie par : 
$$\varphi(x) = \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x \ln(w_k)}{\sum_{k=1}^n (w_k)^x} - \frac{1}{x}.$$

a) Soient  $y_1, y_2, \dots, y_n$  des réels non tous nuls et  $z_1, z_2, \dots, z_n$  des réels quelconques.

La fonction polynômiale  $Q : t \mapsto \sum_{k=1}^n (z_k - t.y_k)^2$  est de degré inférieur ou égal à 2 comme somme de carrés de fonctions affines.

Plus précisément, si on développe :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Q(t) = \sum_{k=1}^n z_k^2 - 2t.y_k.z_k + t^2.y_k^2 = \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right).t^2 + \left( -2 \sum_{k=1}^n y_k.z_k \right).t + \left( \sum_{k=1}^n z_k^2 \right).$$

L'hypothèse selon laquelle les  $y_k$  sont *non tous nuls* implique que  $\sum_{k=1}^n y_k^2$  est un réel strictement positif : l'un au moins de carrés de la somme est *strictement* positif, et  $Q$  est une fonction de degré 2.

Mais la forme initiale de  $Q$  montre que c'est aussi une fonction toujours positive sur  $\mathbb{R}$  (somme de carrés). Et d'après le cours sur les trinômes du second degré, cela a une conséquence fondamentale : son discriminant est négatif puisqu'elle ne change jamais de signe ! Donc :

$$\left( -2 \sum_{k=1}^n y_k.z_k \right)^2 - 4 \cdot \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n z_k^2 \right) \leq 0 \iff \cancel{4} \cdot \left( \sum_{k=1}^n y_k.z_k \right)^2 \leq \cancel{4} \cdot \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n z_k^2 \right)$$

On a redémontré ici l'*Inégalité de Cauchy-Schwarz*, un résultat classique sur les produits scalaires (hors-programme ECE).

b) Rappelons ici que pour tout réel  $a > 0$  fixé, la fonction  $\exp_a : x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$  (dite : *exponentielle de base a*) est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , avec :  $\forall x > 0, \exp'_a(x) = \ln(a).e^{x \ln(a)} = \ln(a).a^x$ .

La fonction  $\varphi$  est donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme somme et quotient de fonctions de classe  $C^1$  sur cet intervalle, avec :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \varphi'(x) &= \frac{\left( \sum_{k=1}^n \ln(w_k).(w_k)^x \cdot \ln(w_k) \right) \times \left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \right) - \left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \cdot \ln(w_k) \right) \times \left( \sum_{k=1}^n \ln(w_k).(w_k)^x \right)}{\left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \right)^2} + \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{\left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \cdot (\ln(w_k))^2 \right) \times \left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \right) - \left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \cdot \ln(w_k) \right)^2}{\left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \right)^2} + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

On fait alors le lien avec la question précédente : en posant, pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$y_k = (w_k)^{x/2} \text{ et } z_k = (w_k)^{x/2} \cdot \ln(w_k)$$

alors les réels  $(y_k)_{1 \leq k \leq n}$  sont bien non tous nuls (ici ils sont tous strictement positifs!), et :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_k^2 = (w_k)^x, z_k^2 = (w_k)^x \cdot (\ln(w_k))^2 \text{ et } y_k.z_k = (w_k)^x \cdot \ln(w_k)$$

Le résultat de la question a) s'applique donc, il s'écrit ici :

$$\left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \cdot \ln(w_k) \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \cdot (\ln(w_k))^2 \right) \times \left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \cdot (\ln(w_k))^2 \right) \times \left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \right) - \left( \sum_{k=1}^n (w_k)^x \cdot \ln(w_k) \right)^2 \geq 0$$

Et ainsi :  $\forall x > 0$ ,  $\varphi'(x) > 0$  comme somme d'un quotient de deux termes positifs, et d'un terme strictement positif.

La fonction  $\varphi$  est donc bien strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

c) On note  $n_0$  le nombre d'entiers  $k_0$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vérifiant :  $w_{k_0} = \max_{1 \leq k \leq n} (w_k)$ , c'est-à-dire le nombre de réels de la famille  $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$  qui prennent la valeur maximale.

On a donc naturellement :  $1 \leq n_0 \leq n$ , et  $n_0 = n$  ne se produit en fait que si les  $w_k$  sont *tous égaux* !

Ce qui a été bien exclu par l'énoncé, et donc :  $1 \leq n_0 \leq n - 1$ .

d) Les notations introduites à la question précédente permettent d'écrire :

$$\forall x > 0, \sum_{k=1}^n (w_k)^x = n_0 \times (w_{k_0})^x + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k \neq w_{k_0}}} (w_k)^x$$

C'est-à-dire qu'on a regroupé ensemble les  $n_0$  termes de la famille qui prennent la valeur maximale. Remarquons que dans la deuxième somme,  $w_k \neq w_{k_0}$  signifie plus précisément :  $w_k < w_{k_0}$  (il ne reste que les termes qui n'atteignent *pas* la valeur maximale).

Or il est connu que : si  $a$  et  $b$  sont deux constantes réelles avec  $0 < a < b$ , alors  $a^x = o(b^x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . On peut donc écrire :

$$\sum_{k=1}^n (w_k)^x = n_0 \cdot (w_{k_0})^x + o((w_{k_0})^x) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (w_k)^x \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n_0 \cdot (w_{k_0})^x$$

e) De la même façon qu'à la question précédente, on peut écrire :

$$\forall x > 0, \sum_{k=1}^n (w_k)^x \cdot \ln(w_k) = n_0 \times (w_{k_0})^x \cdot \ln(w_{k_0}) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k < w_{k_0}}} (w_k)^x \cdot \ln(w_k)$$

Il y a alors bien deux cas à considérer lorsqu'on veut calculer la limite de  $\varphi(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  :

- Si  $w_{k_0} = 1$  : alors  $\ln(w_{k_0}) = 0$  et :

$$\frac{\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k < w_{k_0}}} (w_k)^x \cdot \ln(w_k)}{\sum_{k=1}^n (w_k)^x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k < w_{k_0}}} (w_k)^x \cdot \ln(w_k)}{n_0 \cdot (w_{k_0})^x} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k < w_{k_0}}} \left( \frac{w_k}{w_{k_0}} \right)^x \cdot \ln(w_k)$$

où : pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $w_k < w_{k_0}$ ,  $0 < \frac{w_k}{w_{k_0}} < 1$  et :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{w_k}{w_{k_0}} \right)^x = 0$ .

$$\text{On a alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k < w_{k_0}}} \left( \frac{w_k}{w_{k_0}} \right)^x \cdot \ln(w_k) - \frac{1}{x} = 0 + 0 = 0.$$

- Si  $w_{k_0} \neq 1$ , alors  $\ln(w_{k_0}) \neq 0$  et on peut cette fois écrire :

$$\sum_{k=1}^n (w_k)^x \cdot \ln(w_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n_0 \cdot (w_{k_0})^x \cdot \ln(w_{k_0}), \text{ et : } \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x \cdot \ln(w_k)}{\sum_{k=1}^n (w_k)^x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n_0 \cdot (w_{k_0})^x \cdot \ln(w_{k_0})}{n_0 \cdot (w_{k_0})^x} = \ln(w_{k_0})$$

Et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \ln(w_{k_0})$ .

Dans les deux cas, en fait :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \ln(w_{k_0}) = \ln\left(\max_{1 \leq k \leq n} w_k\right)$ .

f) Puisque, pour tout réel  $a$  strictement positif :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(a)} = e^0 = 1$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{k=1}^n (w_k)^x = \sum_{k=1}^n 1 = n, \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{k=1}^n (w_k)^x \cdot \ln(w_k) = \sum_{k=1}^n \ln(w_k).$$

Ainsi :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty$  comme somme d'une limite finie et de  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ .

Ainsi : sur  $\mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $\varphi$  est continue, strictement croissante : elle réalise donc une bijection de  $]0, +\infty[$  dans l'intervalle-image  $] -\infty, \ln(w_{k_0})[$ .

Or :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $w_k \leq w_{k_0} = \max_{1 \leq k \leq n} w_k$ , donc  $\ln(w_k) \leq \ln(w_{k_0})$  par stricte croissance de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par conséquent :  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k) \leq \frac{1}{n} \cdot n \cdot \ln(w_{k_0}) = \ln(w_{k_0})$ . C'est même une inégalité stricte puisque le cas d'égalité ne se produit que lorsque les réels  $w_k$  sont tous égaux, cas exclu par l'énoncé.

Le réel  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k)$  appartient donc à l'intervalle-image : l'équation  $\varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k)$  admet donc une unique solution sur  $\mathbb{R}_+^*$ , d'après le théorème de la bijection.

11. On note  $(W_1, W_2, \dots, W_n)$  un  $n$ -échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi  $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$  définie dans la question 8, dont une réalisation est le  $n$ -uplet  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ . On suppose que les paramètres  $\lambda$  et  $\alpha$  sont inconnus.

Soit  $G$  la fonction de  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\prod_{k=1}^n f_{(\lambda, \alpha)}(w_k)\right)$ .

a) L'expression et la stricte positivité de la densité  $f_{(\lambda, \alpha)}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \forall (\lambda, \alpha) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, G(\lambda, \alpha) &= \sum_{k=1}^n \ln(f_{(\lambda, \alpha)}(w_k)) = \sum_{k=1}^n \ln(\lambda) + \ln(\alpha) + (\alpha - 1) \ln(w_k) - \lambda \cdot w_k^\alpha \\ &= n \ln(\lambda) + n \ln(\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{k=1}^n \ln(w_k) - \lambda \cdot \sum_{k=1}^n w_k^\alpha \end{aligned}$$

La fonction  $G$  des deux variables  $\lambda$  et  $\alpha$  apparaît bien ainsi comme une fonction de classe  $C^1$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ , comme somme et produit de fonctions de classe  $C^1$ , et :

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(\lambda, \alpha) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^n w_k^\alpha, \quad \frac{\partial G}{\partial \alpha}(\alpha, \lambda) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{k=1}^n \ln(w_k) - \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \ln(w_k) \cdot w_k^\alpha$$

Le(s) point(s) critique(s) de  $G$  sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial \lambda}(\lambda, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial \alpha}(\lambda, \alpha) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{n}{\sum_{k=1}^n w_k^\alpha} \\ \sum_{k=1}^n \ln(w_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^n w_k^\alpha \cdot \ln(w_k) - \frac{n}{\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{n}{\sum_{k=1}^n w_k^\alpha} \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(w_k) = \frac{\sum_{k=1}^n w_k^\alpha \cdot \ln(w_k)}{\sum_{k=1}^n w_k^\alpha} - \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

On sait d'après la question 10.f) que la deuxième équation possède une unique solution  $\hat{\alpha}$ , en fonction de laquelle la première équation donne une unique solution  $\hat{\lambda}$ .

On a donc bien démontré que la fonction  $G$  admet un unique point critique  $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .

b) La fonction  $G$  est aussi de classe  $C^2$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ , avec :

$$\forall (\lambda, \alpha) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(\lambda, \alpha) = -\frac{n}{\lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(\lambda, \alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 \cdot (w_k)^\alpha$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda \partial \alpha}(\lambda, \alpha) = \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \lambda}(\lambda, \alpha) = -\sum_{k=1}^n \ln(w_k) \cdot (w_k)^\alpha$$

► **Commentaire** : le nouveau programme de ECE2, qui abandonne les notations de Monge, oblige ici à une rédaction plus lourde quant à l'étude de la nature du point critique...

En notant respectivement :  $r = \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ ,  $s = \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda \partial \alpha}(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) = \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \lambda}(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$  et  $t = \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ , la Hessienne de  $G$  en  $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$  est :

$$H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

C'est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable. Ses valeurs propres  $a_1$  et  $a_2$  (éventuellement égales) sont les réels  $a$  tels que  $H - a.I_2 = \begin{pmatrix} r-a & s \\ s & t-a \end{pmatrix}$  soit non inversible, ce qui est le cas si et seulement si :  $(r-a) \cdot (t-a) - s^2 = 0 \iff a^2 - (r+t) \cdot a + (rt - s^2) = 0$  d'après le critère d'inversibilité des matrices  $2 \times 2$ .

Les relations coefficients-racines des trinômes du second degré donnent la relation :

$$a_1 \times a_2 = rt - s^2 = \frac{n^2}{\hat{\lambda}^2 \hat{\alpha}^2} + \frac{n}{\hat{\lambda}} \cdot \sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 \cdot (w_k)^{\hat{\alpha}} - \left( \sum_{k=1}^n \ln(w_k) \cdot (w_k)^{\hat{\alpha}} \right)^2$$

$$= \frac{\left( \sum_{k=1}^n (w_k)^{\hat{\alpha}} \right)^2}{\hat{\alpha}^2} + \left( \sum_{k=1}^n (w_k)^{\hat{\alpha}} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 \cdot (w_k)^{\hat{\alpha}} \right) - \left( \sum_{k=1}^n \ln(w_k) \cdot (w_k)^{\hat{\alpha}} \right)^2$$

D'après la relation qui lie les deux coordonnées  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\alpha}$  du seul point critique obtenu précédemment.

L'inégalité obtenue en 10.a) et utilisée en 10.b) sert à nouveau ici pour justifier que :

$\left( \sum_{k=1}^n (w_k)^{\hat{\alpha}} \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 \cdot (w_k)^{\hat{\alpha}} \right) - \left( \sum_{k=1}^n \ln(w_k) \cdot (w_k)^{\hat{\alpha}} \right)^2 \geq 0$ , et donc :  $rt - s^2 = a_1 \times a_2 > 0$ , ce qui implique que les deux valeurs propres de  $H$  sont de même signe.

L'autre relation coefficients-racines donne :  $a_1 + a_2 = r + t = -\frac{n}{\hat{\lambda}^2} - \frac{n}{\hat{\alpha}^2} - \hat{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^n \ln(w_k)^2 \cdot (w_k)^{\hat{\alpha}} < 0$ , donc  $a_1$  et  $a_2$  sont toutes les deux négatives.

**On en conclut d'après le cours, que la fonction  $G$  admet un maximum local au point  $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ .**