



15059021200

N° 505902

Mathématiques option Scientifique

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 5 0 5 9 0 2

Note en toutes lettres : _____

Note en chiffres : 20,00 / 20

Commentaire : _____

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES
SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

Exercice 1

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$$

1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto (\cos(t))^n$ est une fonction continue
sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par conséquent l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$
converge ² pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc I_n est bien défini pour tout
 $n \in \mathbb{N}$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt \quad \text{ainsi}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \left[\sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

donc

$$I_1 = 1$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2 dt$$

par intégration par partie sachant $u(t) = \cos(t) \quad v(t) = \sin(t)$
(u et v de classe C^1) $u'(t) = -\sin(t) \quad v'(t) = \cos(t)$

$$= \left[\cos(t) \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 dt$$

$$= \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2 dt \quad \cos(\sin(t))^2 = 1 - (\cos(t))^2$$

Mentionnez le nombre de pages :

1

sur :

35

Donc $2I_2 = \frac{\pi}{2}$

Donc $I_2 = \frac{\pi}{4}$

Réservé
à la
correction

2a $t \rightarrow \cos(t)$ une fonction continue et positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

De plus $0 \leq \cos(t) \leq 1 \quad \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Ainsi par croissance de la fonction puissance n-ème
On a $0 \leq (\cos(t))^{n+1} \leq \cos^n(t)$

Par conséquent par croissance de l'intégrale

$I_{n+1} \leq I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est donc décroissante, de plus on

a montré que $0 \leq (\cos(t))^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc par croissance de l'intégrale, on voit que
 $0 \leq I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est donc décroissante et minorée,
d'après le théorème de la limite monotone

$(I_n)_{n \geq 0}$ converge

$$2b \quad I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$$

On pose $u(t) = (\cos(t))^{n+1}$ $v(t) = \sin(t)$

$$u'(t) = -(n+1) \sin(t) (\cos(t))^n \quad v'(t) = \cos(t)$$

u et v de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

Par intégrations par parties

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[(\cos(t))^{n+1} \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 (\cos(t))^n dt \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (\cos(t))^2) (\cos(t))^n dt \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale

$$= (n+1) \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+2} dt \right]$$

Donc, en reconnaissant les termes:

$$I_{n+2} = (n+1) (I_n - I_{n+2}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2c d'après 2b $I_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2} \right) I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrons aussi par récurrence sur n : $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$

Pour $n=0$ $I_0 = \frac{\pi}{2}$ d'après 1

$n=1$ $I_2 = \frac{\pi}{4}$ d'après 1

Réservé
à la
correction

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$
 Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

d'après 2b

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n}$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)2(n+1)} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2(n+1))!}{2^2 (n+1)^2 (2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$I_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)! 2^{n+1})^2} \frac{\pi}{2}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$, d'après le principe de récurrence, on peut alors affirmer que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

En une récurrence croissante, en s'aidant de la relation

$$I_{2n+2} = \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n+1}$$

on obtient de même

$$I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Réservé

à la

correction



15059021200

N° 505902

Mathématiques option Scientifique

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 505902

Note en toutes lettres : _____

Note en chiffres : _____ / 20

Commentaire : _____

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES
SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

2d fonction $y = I(n)$
 $u = \text{zeros}(1, m)$

$$u(0) = \frac{1}{2}$$

$$u(1) = 1$$

for $k = 1:m$

Si k pair $u(2k) = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{1}{2}$ then $u(2k+1) = \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!}$

end

$y = u$

endfunction

3a Au voisinage de 0 $\ln(1+u) \sim u$
 $u \rightarrow 0$

le plus

$$\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

3b Tout d'abord, $n^{-\frac{1}{4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Réservé
à la
correction

Ainsi $\cos\left(n^{-\frac{1}{4}}\right) \underset{(n \rightarrow \infty)}{\sim} 1 - n^{-\frac{1}{4}}$

En d'autres termes $\cos\left(n^{-\frac{1}{4}}\right) \underset{(n \rightarrow \infty)}{=} 1 - \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} + o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$
 $\underset{(n \rightarrow \infty)}{=} 1 - \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} + o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$

Ainsi $\ln\left(\cos\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} + o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$
 $= -\frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} + o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)$

Pu conséquent $n \ln\left(\cos\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2} n^{1-\frac{1}{2}}$

Finalement $n \ln\left(\cos\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sqrt{n}$

On déduit $\ln\left(\left(\cos\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right)^n\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sqrt{n}$

Al, $e^{-\frac{1}{2} \sqrt{n}} \underset{(n \rightarrow \infty)}{\rightarrow} 0$ $\left(-\frac{1}{2} \sqrt{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} -\infty\right)$

Pu conséquent $\exp\left(\ln\left(\cos\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right)^n\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$

Donc finalement $\left(\cos\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right)^n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$

3c On procède à l'aide de la même méthode

$$\cos\left(n^{-\frac{2}{3}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1 - \frac{1}{2} n^{-\frac{4}{3}} + o\left(n^{-\frac{4}{3}}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } n \ln\left(\cos\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)\right) &= n \times \left(-\frac{1}{2} n^{-\frac{4}{3}}\right) + o\left(n \times n^{-\frac{4}{3}}\right) \\ &= -\frac{1}{2} n^{-\frac{1}{3}} + o\left(n^{-\frac{1}{3}}\right) \end{aligned}$$

Réservé
à la
correction

Donc,

$$n \ln\left(\cos\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2} n^{-\frac{1}{3}}$$

$$\text{Or } -\frac{1}{2} n^{-\frac{1}{3}} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 \quad \text{donc } \exp\left(-\frac{1}{2} n^{-\frac{1}{3}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 1$$

par composition

On déduit alors de la même façon que précédemment :

$$\exp\left(n \ln\left(\cos\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)\right)\right) = \exp\left(\ln\left(\cos\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)\right)^n\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 1$$

$$\text{Donc } \boxed{\left(\cos\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)\right)^n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 1}$$

$$\forall t \in [0, n^{-\frac{1}{4}}], \quad \cos(t) \leq 1$$

Par conséquent par croissance de la fonction puissance n -ième :

$$(\cos(t))^n \leq 1$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{n^{-\frac{1}{4}}} (\cos(t))^n dt \leq \int_0^{n^{-\frac{1}{4}}} 1 dt = n^{-\frac{1}{4}}$$

On conclut :

$$\boxed{\int_0^{n^{-\frac{1}{4}}} (\cos(t))^n dt \leq n^{-\frac{1}{4}}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

4b la fonction $\cos$ est décroissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$,

par conséquent elle l'est aussi sur $[\pi^{-\frac{1}{4}}; \frac{\pi}{2}]$, autrement dit :

$$\cos(t) \leq \cos(\pi^{-\frac{1}{4}}) \quad \forall t \in [\pi^{-\frac{1}{4}}; \frac{\pi}{2}]$$

Puis par croissance de la fonction puissance n -ème et par croissance de l'intégrale :

$$\int_{\pi^{-\frac{1}{4}}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt \leq (\cos(\pi^{-\frac{1}{4}}))^n \int_{\pi^{-\frac{1}{4}}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt$$

$$\leq (\cos(\pi^{-\frac{1}{4}}))^n \left(\frac{\pi}{2} - \pi^{-\frac{1}{4}} \right)$$

$$\leq (\cos(\pi^{-\frac{1}{4}}))^n \frac{\pi}{2}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\int_{\pi^{-\frac{1}{4}}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt \leq \frac{\pi}{2} (\cos(\pi^{-\frac{1}{4}}))^n}$$

4c D'après la relation de Charles, et d'après la question 2a ($I_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$) et 4a et 4b, on obtient :

$$0 \leq \int_0^{\pi^{-\frac{1}{4}}} (\cos(t))^n dt + \int_{\pi^{-\frac{1}{4}}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt \leq \pi^{-\frac{1}{4}} + \frac{\pi}{2} (\cos(\pi^{-\frac{1}{4}}))^n$$

$$0 \leq I_n \leq \pi^{-\frac{1}{4}} + \frac{\pi}{2} (\cos(\pi^{-\frac{1}{4}}))^n$$

Or, d'après 3b, $(\cos(\pi^{-\frac{1}{4}}))^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

De plus $\pi^{-\frac{1}{4}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc par encadrement
(et par somme de limites pour le terme de droite)

$$\boxed{I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$



15059021200

N° 505902

Mathématiques option Scientifique

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 505902

Note en toutes lettres : _____

Note en chiffres : _____ / 20

Commentaire : _____

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES
SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

5a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

La fonction $\cos$ étant décroissante comme on l'a déjà
énoncé et par croissance de la fonction puissance n -ème

$$(\cos(n^{-\frac{2}{3}}))^n \leq (\cos(t))^n \quad \forall t \in [0; n^{-\frac{2}{3}}]$$

Donc par croissance de l'intégrale

$$n^{-\frac{2}{3}} (\cos(n^{-\frac{2}{3}}))^n \leq \int_0^{n^{-\frac{2}{3}}} (\cos(t))^n dt$$

De plus la fonction $t \mapsto (\cos(t))^n$ étant positive sur
 $[\frac{n^{-\frac{2}{3}}}{2}; \frac{1}{2}]$, d'après la relation de Chasles :

$$\int_0^{n^{-\frac{2}{3}}} (\cos(t))^n dt \leq \int_0^{n^{-\frac{2}{3}}} (\cos(t))^n dt + \int_{n^{-\frac{2}{3}}}^{\frac{1}{2}} (\cos(t))^n dt$$

$$\leq I_n$$

Donc finalement

$$I_n \geq \int_0^{n^{-\frac{2}{3}}} (\cos(t))^n dt \geq n^{-\frac{2}{3}} (\cos(n^{-\frac{2}{3}}))^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

Réduisons la nature de la série de terme général I_n

$$1) \text{après } \underline{3c} \quad n^{-\frac{2}{3}} (\cos(n^{-\frac{2}{3}})) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{-\frac{2}{3}} > 0$$

$$\text{or } n^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \text{ et d'après le critère de Riemann :}$$

$$\left(\frac{2}{3} < 1\right) \text{ on sait que la série } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \text{ diverge}$$

Donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs (c'est bien le cas ici) on déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{2}{3}} (\cos(n^{-\frac{2}{3}}))^n \text{ diverge}$$

Ainsi d'après l'énoncé précédent, par comparaison on peut affirmer finalement :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} I_n \text{ diverge}}$$

5b

6a On pose $g(t) = \cos(t+1) - \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \forall t \in]-\pi, \pi[$

On observe tout d'abord que $g(0) = 1 + 1 - \frac{2}{1} = 0$

De plus, g est une fonction de classe C^1 étant que somme de fonctions de classe C^1 , on a alors

$$g'(t) = -\sin(t+1) - 2 \left(\frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right) \times \frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}}{\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2} \right)$$

$$= -\sin(t+1) - \frac{2}{\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2} \frac{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}$$

Par des calculs analogues on obtient :

$$g'(t) = 0 \quad \forall t \in]-\pi, \pi[$$

Par conséquent, g est une fonction constante sur $]-\pi, \pi[$

De plus $g(0) = 0$, on déduit : $\cos(t+1) - \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 0 \quad \forall t \in]-\pi, \pi[$

Finalement

$$\forall t \in]-\pi, \pi[$$

$$\cos(t+1) = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Réservé
à la
correction

Réservé

à la

correction

$$\begin{aligned} 6b \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt \quad \text{d'après 6a} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t}{2} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2\left(\frac{t}{2}\right) dt \end{aligned}$$

$t \mapsto u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ un changement de variable de classe C^1
strictement monotone, ainsi on applique

$$(2 \arctan(u) = t$$

$$\begin{aligned} &= \frac{t}{4} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du \\ &= \frac{t}{4} + \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2} du \\ &= \frac{t}{4} + \int_0^1 \frac{1+u^2}{1+u^2} du - \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \frac{t}{4} + 1 - \arctan(1) \\ &= \frac{t}{4} - \frac{\pi}{4} + 1 \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)} dt = 1}$$

6c $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2k} dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^n (-1)^k (\cos(t))^{2k} dt \quad \text{par linéarité de} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (\cos(t))^{2n+2}}{1 - (-\cos(t))} dt \quad \text{l'intégrale} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{2n+2}}{1+\cos(t)} dt}$$



15059021200

N° 505902

Mathématiques option Scientifique

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 505902

Note en toutes lettres : _____

Note en chiffres : _____ / 20

Commentaire : _____

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES
SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

$$\text{6d } \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{1}{1 + \cos(t)} \leq 1$$

$$\text{Donc } \frac{|(-\cos(t))^{n+1}|}{1 + \cos(t)} \leq |(\cos(t))^{n+1}| \quad \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Or } (\cos(t))^{n+1} \geq 0 \quad \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Donc } \frac{|(-\cos(t))^{n+1}|}{1 + \cos(t)} \leq (\cos(t))^{n+1}$$

Par encadrement de l'intégrale et d'après l'inégalité triangulaire

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|(-\cos(t))^{n+1}|}{1 + \cos(t)} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+1} dt = I_{n+1}$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \right| \leq I_{n+1}$$

6e D'après 6d et d'après $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

$$\text{On déduit par encadrement } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-\cos(t))^{n+1}}{1 + \cos(t)} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Réservé
à la
correction

6e Par conséquent, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'expression obtenue en 6c, on observe que le terme de droite converge, par conséquent la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n$ est une suite convergente ce qui permet d'affirmer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n \text{ est convergente}$$

De plus, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'expression de la question 6c, et d'après 6b, on déduit

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n = 1 - 0$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n = 1$$

Exercice 2

Partie A

$$1 \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $S^2 = I_3$

Par conséquent $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de la matrice S , par conséquent sachant que les racines de ce polynôme sont 1 et -1 , on déduit que les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1 .

Donc $\text{Sp}(S) \subset \{1, -1\}$

On vérifie alors que ce sont bien deux valeurs propres de S .
Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

$$SX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

Il existe donc un vecteur non nul X (par exemple $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$) tel que $SX = X$, par conséquent 1 est bien valeur propre.

Pour $E_\lambda(S)$ le sous-espace propre de S associé à la valeur propre λ , on peut alors noter :

$$E_1(S) = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$$

De même, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ les vecteurs non nuls

$$SX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_1 \\ x_2 = -x_2 \\ x_3 = -x_3 \end{cases}$$

Il existe donc un vecteur non nul (par exemple $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$) tel que $SX = -X$, donc -1 est bien valeur propre et on a de plus :

$$E_{-1}(S) = \text{Vect}((1, 0, -1))$$

Donc

$$Sp(S) = \{1, -1\}$$

2. F est l'ensemble des vecteurs symétriques

$$X \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

Par conséquent les familles $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 0)$ sont des familles génératrices de F .

$$\text{Ainsi } \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0)) = F$$

De plus, ces vecteurs ne sont pas colinéaires, par conséquent ces vecteurs forment aussi une famille libre.

Ainsi $((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ est une famille libre et génératrice de F , elle forme donc une base de F .



15059021200

N° 505902

Mathématiques option Scientifique

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 5 0 5 9 0 2

Note en toutes lettres : _____

Note en chiffres : _____ / 20

Commentaire : _____

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES
SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

De plus, la famille $(1; 0; -1)$ est génératrice de G (on la détermine de la même façon que l'on a fait pour F), de plus c'est un vecteur non nul donc automatiquement ce vecteur forme une famille libre, ainsi

$(1; 0; -1)$ est une base de G
 $((1, 0; 1); 0; 1; 0)$ est une base de F

De plus, d'après 1 on observe que $G = E_{-1}(S)$ et $F = E_1(S)$

F et G sont donc des sous-espaces propres de S

3 S est une matrice possédant deux valeurs propres distinctes, de plus, on observe :

$$\dim(E_{-1}(S)) + \dim(E_1(S)) = 2 + 1 = 3 = \dim M_{3,1}(\mathbb{R})$$

la somme des dimensions des sous-espaces propres de S étant égale à la dimension de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, on peut conclure que S est diagonalisable et donc $E_1(S) \oplus E_{-1}(S) = M_{3,1}(\mathbb{R})$

Ainsi finalement

$$F \oplus G = M_{3,1}(R)$$

Partie B

 $m \geq 2$

Réservé

à la

correction

4a Tout d'abord, S est une matrice symétrique réelle donc S est diagonalisable

Explanations S

[illegible]

avec: $\forall (i, j) \in [1, n]^2 \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n+1-j \\ 0 & \text{si } i \neq n+1-j \end{cases}$

$$\underline{4b} \quad SX = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m \\ x_{m-1} \\ . \\ 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{h_c} \quad (S^c)_{ij} = \left(\sum_{r=1}^n s_{i,r} s_{r,j} \right)_{i,j} \quad \forall i,j \in \{1, \dots, n\}$$

Or $S_{i, q} \neq 0 \Rightarrow i = m+1-q$

et $g_{r,i} \neq 0 \Leftrightarrow r = m+1-i$

Donc $S_{i,j} = 0 \iff i \neq j$

Par conséquent

$$(S^2)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc on conclut.

$$S^2 = I_m$$

Réservé

à la

correction

5a On raisonne par analyse-synthèse : Analyse Supposons qu'il
~~soit~~
soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $(Y, Z) \in F \times G$ tel que

$$X = Y + Z$$

On a $Y \in F$ donc
 $Z \in G$

$$\text{on pose } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

On obtient donc $X = \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \\ y_3 + z_3 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{pmatrix}$ et on a bien trouvé

un vecteur $Y \in F$, $Z \in G$, tel que $Y + Z = X$ avec $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

On a donc bien unicité.

Synthèse Pour $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a bien $y_i = y_{n+1-i} \quad \forall i \in [1, n]$

Pour $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ on a bien $z_i = -z_{n+1-i} \quad \forall i \in [1, n]$

Par conséquent $Y \in F$, $Z \in G$, et bien sûr $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$
tel que $Y + Z = X$
On a donc bien existence.

Pu conséquent: il existe un unique couple $(\gamma, \alpha) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{G}$, tel que

$$X = \gamma + \alpha \quad \text{pour } X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

5b Montrons que Γ et $\mathbb{G}$ sont les sous espaces propres de S
 Pour $\alpha = 1$ une valeur propre de S (on suppose qu'elle existe), on trouve

$$SX = X \quad (\text{d'après 4b}) \quad \text{pour } X \in \Gamma$$

Il existe donc un vecteur non nul de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que
 $SX = X$, ainsi 1 est bien valeur propre de S .

De plus, on a $X \in \Gamma$ tel que $SX = X$ donc

$$\boxed{\Gamma \subset \mathcal{E}_1(S)}$$

Le même, on observe $SX = -X$ pour $X \in \mathbb{G}$

$$\text{donc } \boxed{\mathbb{G} \subset \mathcal{E}_{-1}(S)}$$

Réciproquement

Pour $X \in \mathcal{E}_1(S)$, on a $SX = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et on sait $SX = X$ ($X \in \mathcal{E}_1(S)$)

Ainsi $(SX)_{i,1} = (SX)_{1,i}$, ainsi $x_i = x_1$ pour $x \in \Gamma$, on observe

$$SX = X, \quad \text{ce qui permet d'affirmer } X \in \Gamma$$

$$\text{et par conséquent } \boxed{\mathcal{E}_1(S) \subset \Gamma}$$

D'après le même raisonnement, pour $X \in \mathcal{E}_{-1}(S)$ tel que $SX = -X$

$$\text{on a } X \in \mathbb{G} \quad \text{donc } \boxed{\mathcal{E}_{-1}(S) \subset \mathbb{G}}$$

Donc

$$\boxed{\Gamma = \mathcal{E}_1(S) \quad \mathbb{G} = \mathcal{E}_{-1}(S)}$$

par double
inclusion



15059021200

N° 505902

Mathématiques option Scientifique

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 505902

Note en toutes lettres : _____

Note en chiffres : _____ / 20

Commentaire : _____

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES
SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

6

$$\forall (i,j) \in [1,n] \quad a_{i,n+1-j} = a_{n+1-i,j}$$

6a
$$AS = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,n} & \dots & a_{1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \dots & a_{n,1} \end{pmatrix}$$

De même par des calculs analogues et sachant

$a_{i,n+1-j} = a_{n+1-i,j} \quad \forall (i,j) \in [1,n]$, A est donc symétrique, on obtient finalement

$$AS = SA$$

64 Montions Sx un nouveau pope de A

Réservé
à la
correction

Réservé
à la
correction

Problème

Partie A X_1 : le nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste avant le $(k+1)$ -ème tirage (ou après le k -ème tirage)

1 Déterminons la loi de X_1

$$\text{On a } X_1(\Omega) = \{1, 2\}$$

$[X_1=1]$ signifie que l'on a pas ajouté de boule blanche après le premier tirage, autrement dit que l'on a pioché une boule blanche au premier tirage.

On prélève de façon équiprobable, autrement dit comme au départ il n'y a qu'une boule blanche et une boule noire, la probabilité de piocher une boule blanche est donc de $\frac{1}{2}$ (pour le premier tirage)

On note B_2 "On tire une boule blanche au k -ème tirage"

Alors

$$P([X_1=1]) = P(B_1) = \frac{1}{2}$$

Donc
$$P(X_1=1) = \frac{1}{2} \text{ et } P(X_1=2) = \frac{1}{2}$$

Alors

$$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$E(X_1) = \frac{3}{2}$$

$$V(X_1) = (E(X_1^2)) - (E(X_1))^2 \quad (\text{formule de Koenig})$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + 2 - \frac{9}{4} = \frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

$$V(X_1) = \frac{1}{4}$$



15059021200

N° 505902

Mathématiques option Scientifique

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 505902

Note en toutes lettres : _____

Note en chiffres : _____ / 20

Commentaire : _____

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES
SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

$$\underline{2} \quad X_2(\Omega) = \{1; 2; 3\}$$

On conserve la notation B_2 "on prélève une boule blanche au 2^e tirage"

$$[X_2 = 1] = B_1 \cap B_2$$

$$[X_2 = 2] = B_1 \cap \bar{B}_2 \cup \bar{B}_1 \cap B_2$$

$$[X_3 = 3] = \bar{B}_1 \cap \bar{B}_2$$

Or les tirages sont indépendants (on effectue une succession de tirage), cependant les événements ne sont pas indépendants

$$P(X_2 = 1) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)$$

Or, si on sait qu'on a poché une boule blanche au premier tirage, cela veut dire que avant le second tirage il y a 2 boules noires et une boule blanche dans l'urne, par conséquent on a alors une chance sur trois de prélever une boule blanche. Ainsi $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3}$

Donc
$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Pu la suite, les événements étant disjoint, on a

$$P(X_2=2) = P(B_1) \times P(\bar{B}_2) + P(\bar{B}_1) \times P_{\bar{B}_1}(B_2)$$

Or, avec la même analyse que précédemment, on déduit que l'on a deux chances sur 3 de piocher une boule noire après le premier tirage où l'on a tiré une boule blanche, donc $P_{B_1}(\bar{B}_2) = \frac{2}{3}$

De même, si on a tiré une boule noire au premier tirage, on a deux chances sur trois de tirer une boule blanche au second tirage :

$$\text{donc } P_{\bar{B}_1}(B_2) = \frac{2}{3}$$

Ainsi

$$P(X_2=2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$P(X_2=2) = \frac{2}{3}$$

Enfin, si on a pioché une boule noire au premier tirage, il y aura une chance sur trois de piocher une boule noire au second tirage et donc

$$P_{\bar{B}_1}(\bar{B}_2) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Finalement } P(X_2=3) = \frac{1}{6}$$

3) Par une simple récurrence, pour l'affirmation $X_3(\Omega) = \llbracket 1; 8+1 \rrbracket$ pour $x=0, 1, 2$, c'est vrai

On suppose la propriété vraie pour $x \leq n$

Ainsi au $x+1$ ème tirage, soit on a encore pioché la même boule que l'on a tiré depuis le début et par conséquent

Réservé
à la
correction

X_{k+1} perd la valeur $k+2$, soit ce n'est pas le cas, mais l'encore X_{k+1} prend une valeur dans l'intervalle $[1, k+2]$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$, d'après le principe de récurrence on déduit finalement

$$X_k(\Omega) = \mathcal{I} [1, k+1]$$

Réservé

à la

correction

4 Soient $i \in \mathbb{N}^*$, $j \in X_k(\Omega)$

$$\text{Si } i < j \text{ alors } P_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i) = 0$$

En effet, le nombre de boules blanches dans l'urne ne peut que croître.

$$\text{Si } i = j \quad P_{[X_k=j]}(X_{k+1}=j) = P(B_{k+1})$$

En effet si le nombre de boules blanches reste inchangé entre le k -ème et le $k+1$ -ème tirage, cela signifie que l'on a pioché une boule blanche au $k+1$ -ème tirage

$$\text{Si } i = j+1 \quad P_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i) = P(\overline{B_{k+1}})$$

Si $i > j+1$ $P_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i) = 0$ En effet le nombre de boules blanches ne peut pas croître de 2 ou plus entre deux tirages.

Donc :

$$\begin{cases} \text{Si } i < j & P_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i) = 0 \\ \text{Si } i = j & P_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i) = P(B_{k+1}) \\ \text{Si } i = j+1 & P_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i) = P(\overline{B_{k+1}}) \\ \text{Si } i > j+1 & P_{[X_k=j]}(X_{k+1}=i) = 0 \end{cases}$$

5 $\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*$

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $X_{k+1} = \{1, 2, 3\}$ $\{X_{k+1} = j\}_{j \in \{1, 2, 3\}}$

$$P(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{k+2} P(X_k = j) \times P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$$

$$= P(X_k = i) \times P_{(X_k=i)}(B_{k+1}) + P(X_k = i-1) \times P_{(X_k=i-1)}(\overline{B_{k+1}}) \text{ d'après 5}$$

On détermine $P_{(X_k=j)}(\overline{B_{k+1}})$

Tout d'abord, au $k+1$ ème tirage, il y a $k+2$ boules dans l'urne, de plus sachant que l'événement $\{X_k = j\}$ est réalisé, avant le $k+1$ ème tirage il y a donc $i-1$ boules blanches ($i=1$ d'après 4) Ainsi il y a $k+2 - (i-1)$ boules noires, donc finalement

$$P_{(X_k=j)}(\overline{B_{k+1}}) = \frac{k+2-i}{k+2} \text{ pour } j = i-1$$

On raisonne de même pour l'autre cas, sachant que il y a i boules blanches dans l'urne si l'événement $\{X_k = i\}$ est réalisé.

Donc

$$P_{(X_k=i)}(B_{k+1}) = \frac{i}{k+2}$$

On a donc : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*$ $P(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2} P(X_k = i) + \frac{k+2-i}{k+2} P(X_k = i-1)$

6 Déterminons la loi de X_3 ; $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$$P(X_3 = 1) = \frac{1}{4} P(X_2 = 1) + \frac{1}{4} P(X_2 = 0) = \frac{1}{24}$$

$$P(X_3 = 2) = \frac{2}{4} P(X_2 = 2) + \frac{3}{4} P(X_2 = 1) = \frac{11}{24}$$

$$P(X_3 = 3) = \frac{3}{4} P(X_2 = 3) + \frac{2}{4} P(X_2 = 2) = \frac{11}{24}$$



15059021200

N° 505902

Mathématiques option Scientifique

et reportez votre numéro de candidat :

N° : 505902

Note en toutes lettres : _____

Note en chiffres : _____ / 20

Commentaire : _____

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES
SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

$$P(X_3 = 4) = \frac{1}{4}$$

$$\underline{7a} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad [X_k = 1] = \bigcap_{j=1}^k B_j \quad \text{voir page 30}$$

En effet $[X_k = 1]$ signifie que lors des k premiers tirages, on a pioché une boule blanche.

$$\text{Donc } P(X_k = 1) = P(B_1) \times P(B_2) + P(B_1, B_2) \times \dots \times P(B_1, B_2, \dots, B_k)$$

Si on pioche une boule blanche au j -ème tirage, alors il y a une boule blanche de plus dans l'urne au tirage suivant, par conséquent

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{24} \times \dots \times \frac{1}{k+1}$$

$$\boxed{P(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}}$$

7b $\forall k \in \mathbb{N}$, $[X_k = k+1]$ signifie que l'on a tiré une boule blanche lors des k premiers tirages, en effet

$$[X_k = k+1] = \bigcap_{j=1}^k B_j$$

Donc avec le même raisonnement que la question 7a $\boxed{P(X_k = k+1) = \frac{1}{(k+1)!}}$

On montre la propriété par récurrence

7a Pour $k=0$ c'est vraie d'après 1

On suppose la propriété vraie pour $k \leq n$

$$\text{On veut } [X_{n+1}=1] = \prod_{j=1}^{n+1} B_j$$

$$\text{Donc } P(X_{n+1}=1) = P(B_1 | \dots | B_n, B_{n+1}) = P(B_1) \times P(B_2 | B_1) \times \dots \times P(B_{n+1} | B_1, \dots, B_n)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \times P(B_2 | \dots | B_n, B_{n+1}) \quad (\text{hypothèse de récurrence})$$

Or on a pioché que des boules blanches pour la $k+1$ ème tirage on a qu'une boule blanche dans l'urne, on a donc une chance sur $k+2$ de piocher une boule blanche aussi

$$P(X_{n+1}=1) = \frac{1}{(n+2)!}, \text{ la propriété est donc vraie au rang } k+1, \text{ d'après le principe de récurrence on déduit qu'elle est vraie pour tout } k \leq n$$

$$\text{Donc } \boxed{P(X_k=1) = \frac{1}{(k+1)!}}$$

$$\begin{aligned} \text{7c } a_k &= (k+1)! \cdot P(X_k=2) \\ &= \underline{(k+1)!} \end{aligned}$$

Réservé
à la
correction

Partie B

3 la fonction Sulat renvoie le nombre de boules blanches dans l'urne après le k -ème tirage.

Le fonctionnement de la ligne 5 renvoie au tirage d'une boule dans l'urne, en effet la commande `rand(2)` est une commande renvoyant une loi uniforme, c'est-à-dire le caractère équiprobable du prélèvement, et selon la valeur que prends i , on augmente le nombre de boule blanche, ou de boule noire dans l'urne, sachant que $n+b$ est le nombre de boules dans l'urne.

10

Réservé
à la
correction

Partie C 12 a D'après 5, en multipliant par i et en sommant pour i allant de 1 à $k+2$

$$\begin{aligned} E(X_{k+1}) &= \frac{1}{k+2} \left[\sum_{i=1}^{k+2} i^2 P(X_{k+1}=i) + \sum_{i=1}^{k+2} i(3+k-i) P(X_{k+1}=i-1) \right] \\ &= \frac{1}{k+2} \left[\sum_{i=1}^{k+1} i^2 P(X_k=i) + (3+k) \sum_{i=1}^{k+2} i P(X_k=i-1) - \sum_{i=1}^{k+2} i^2 P(X_k=i-1) \right] \\ &= \frac{1}{k+2} \left[\sum_{i=1}^{k+1} i^2 P(X_k=i) + (3+k) E(X_k+1) - E(X_k+1)^2 \right] \\ &= \frac{1}{k+2} \left[E(X_k^2) + (3+k) E(X_k) + (3+k) - 1 - 2 E(X_k) - E(X_k^2) \right] \\ &= \frac{1}{k+2} \left[E(X_k X_{k+1}) + 3+k-1 \right] = \frac{k+2}{k+2} + \frac{k+1}{k+2} E(X_k) \end{aligned}$$

$$E(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2} E(X_k) + 1$$

$$\text{car } \sum_{i=1}^{k+1} i^2 P(X_k=i) = E(X_k^2)$$

et

12a Pour $u_2 = 0(x_1) \ (\forall x \in N)$ on a d'après 12a

$$u_{k+1} = u_k \left(\frac{k+1}{k+2} \right) + 1$$

On est alors en présence d'une suite arithmético-géométrique

On pose alors l tel que $l = l \left(\frac{k+1}{k+2} \right) + 1$

$$-1 = l \left(\frac{k+1-(k+2)}{k+2} \right)$$

Donc $l = k+2$

On a donc $u_k = l \times \frac{1}{2} \quad \forall k \in N$

Ce qui permet de conclure :

$\forall k \in N$

$$0(x_1) = \frac{k+2}{2}$$

12c Y_k : nombre de boules ^{noires} présentes dans l'urne après k tirages

Le nombre de boules (après le k -ième tirage) dans l'urne est de $k+2$. De plus, ce nombre se décompose entre les boules blanches et les boules noires, on a donc

$$Y_k + X_k = k+2$$

Pu l'absence de l'équation, on a alors

$$\begin{aligned} 0(Y_k) &= k+1 - 0(X_k) \\ &= k+2 - \frac{k+2}{2} \end{aligned}$$

$$0(Y_k) = \frac{k+2}{2}$$

et on a bien X_k et Y_k qui ont la même espérance, ce qui n'est pas étonnant car on prélève de manière équiprobable les boules dès le départ

On a admet

$$0(X_k) = \frac{k+2}{2}$$

Note en toutes lettres : _____

Note en chiffres : _____ / 20

Commentaire : _____

Signature du correcteur

**IL EST IMPÉRATIF DE COLLER UNE ÉTIQUETTE CODE-BARRES
SUR LA PREMIÈRE PAGE DE CHAQUE COPIE COMPOSÉE.**

Commencez à composer dès la première page ...

Part 13a $a > 0$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(\left|\underline{X}_{k+2} - E(\underline{X}_{k+2})\right| \geq a\right) \leq \frac{V(\underline{X}_{k+2}) \times 1}{a^2 (k+2)^2}$$

~~Donc~~ $1 - P\left(\left|\underline{X}_{k+2} - \frac{1}{2}\right| \geq (k+2)a\right) \leq \frac{V(\underline{X}_{k+2})}{(k+2)^2 a^2}$

Re plus $E(\underline{X}_{k+2}) = \frac{1}{2}$

Et on a $V(\underline{X}_{k+2}) = \frac{1}{(k+2)^2}$ $V(\underline{X}_{k+2}) = \frac{1}{(k+2)^2 12}$

Donc on déduit

$$P\left(\left|\underline{X}_{k+2} - \frac{1}{2}\right| \geq a\right) \leq \frac{1}{12(k+2)a}$$

Ainsi

$$1 - P\left(\left|\underline{X}_{k+2} - \frac{1}{2}\right| \geq a\right) \geq 1 - \frac{1}{12(k+2)a}$$

Donc par encadrement $P\left(\left|\underline{X}_{k+2} - \frac{1}{2}\right| < a\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$

Réservé
à la
correction

13b La variable X_k converge donc en probabilité vers
la variable $\frac{1}{2}$, ce qui n'est

pas étonnant car intuitivement il semble logique que la
proportion de boules blanches soit égale à la proportion de
boules noires.

Partie D

$$\begin{aligned} 14 \quad Y_{ij} : R[X] &\rightarrow R[X] \\ P &\rightarrow j P(X+1) - i P(X) \quad 1 \leq j < i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14a \quad \text{Soient } P \in R[X], R \in R[X], d \in R \\ Y_{ij}(P+R) &= j(dP+R)(X+1) - i(dP+R)(X) \\ &= j d P(X+1) + j R(X+1) - i d P(X) - i R(X) \\ &= j(j P(X+1) - i P(X)) + j R(X+1) - i R(X) \\ &= j Y_{ij}(P) + Y_{ij}(R) \end{aligned}$$

Donc Y_{ij} est linéaire

$$14b \quad \text{Soit } \deg(P) = h, \exists (a_0, \dots, a_h) \setminus P(X) = \sum_{i=0}^h a_i X^i$$

Donc :

$$\begin{aligned} Y_{ij}(P) &= j \sum_{i=0}^h a_i (X+1)^i - i \sum_{i=0}^h a_i X^i \\ &= (j-i) X^h + j \sum_{i=0}^{h-1} a_i (X+1)^i - i \sum_{i=0}^{h-1} a_i X^i \end{aligned}$$

Or $j-i \neq 0$ car $j < i$, on déduit

que j est le coefficient dominant de $\varphi_{i,j}(P)$ et X^j le terme de plus haut degré

$$\text{Ainsi } \deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(X^j) = \deg(P)$$

On conclut

$$\deg(\varphi_{i,j}(P)) = \deg(P)$$

Réservé

à la
correction

14c Soit $P \in \text{Ker}(\varphi_{i,i})$

$$\text{Ainsi } \varphi_{i,i}(P) = 0$$

Or $\deg(\varphi_{i,i}(P)) = \deg(P)$, or le seul polynôme de degré $-\infty$ est le polynôme nul, autrement dit :

$$\varphi_{i,i}(P) = 0 \Leftrightarrow \deg(\varphi_{i,i}(P)) = -\infty \Leftrightarrow P = 0$$

Donc si $P \in \text{Ker}(\varphi_{i,i})$ alors $P = 0$

On déduit : $\varphi_{i,i}$ est injective

14d On pose $\varphi_{i,i} : R_n[X] \rightarrow R_n[X]$

$$P \mapsto j \cdot P(X+1) - i \cdot P(X)$$

(l'espace d'arrivée est $R_n[X]$ car $\deg(\varphi_{i,i}(P)) = \deg(P)$)

Réservé
à la
correction

Les concours ECRICOME sont des marques déposées. Toute reproduction de la copie est interdite. Copyright © ECRICOME — Tous droits réservés