MATHÉMATIQUES - Edhec E 2012

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On admet [1] que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}a_j=\ell$.

On se propose d'étudir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0=0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $\quad u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1. a) On montre par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$: "$0\leqslant u_n\leqslant 1$", est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ L'énoncé donne $u_0=0$ qui vérifie bien $0\leqslant u_0\leqslant 1$.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n\in\mathbb{N}$, et montrons qu'alors la propriété est vraie au rang $n+1$:
On sait par hypothèse de récurrence que :

$$\begin{aligned}
& 0\leqslant u_n\leqslant 1\\
\iff\ & 0\leqslant u_n^2\leqslant 1 \text{ par croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}^+\\
\iff\ & 1\leqslant u_n^2+1\leqslant 2\\
\iff\ & \frac{1}{2}\leqslant\frac{u_n^2+1}{2}\leqslant 1
\end{aligned}$$

ce qui donne bien : $0<\dfrac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

b) Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:
$u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n^2+1}{2}-u_n=\dfrac{u_n^2-2u_n+1}{2}=\dfrac{(u_n-1)^2}{2}$ d'après l'identité remarquable classique, ce qui permet directement d'affirmer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n\geqslant 0$, et donc que la suite (u_n) est croissante.

c) D'après les deux questions précédentes : la suite (u_n) est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente d'après le théorème de limite monotone, de limite $\ell\in[0,1]$.

Par passage à la limite dans la relation de récurrence : $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{2}$ vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, on obtient :

$$\ell=\frac{\ell^2+1}{2}\iff 2\ell=\ell^2+1\iff \ell^2-2\ell+1=0\iff(\ell-1)^2=0\iff \ell-1=0\iff\boxed{\ell=1}$$

.

1. C'est le théorème de Césaro, hors programme en ECE mais souvent redémontré dans les sujets parisiens

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $\quad v_n = 1 - u_n$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{v_n - v_{n+1}}{v_{n+1} \times v_n} = \dfrac{v_n^2}{2v_{n+1}.v_n} = \dfrac{v_n}{2v_{n+1}}$, où :

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n^2 \iff v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2}v_n^2 = v_n(1 - \frac{1}{2}v_n)$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n}{2v_n(1 - \frac{1}{2}v_n)} = \frac{1}{2 - v_n}$$

Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$, CQFD.

b) Le théorème de Césaro admis en début d'exercice, s'applique ici à la suite $(a_n) = \left(\dfrac{1}{v_{n+1}} - \dfrac{1}{v_n}\right)$ et permet donc d'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j} = \frac{1}{2} \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{1}{2} \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n.v_n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

Ce qui revient à dire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nv_n} = \frac{1}{2}$ (puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$), on encore :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n.v_n} = 1 \quad \text{soit :} \quad v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

c) L'équivalence précédente se réécrit aussi, pour n au voisinage de $+\infty$:

$$v_n = \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n}) \iff 1 - u_n = \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n}) \iff u_n = 1 - \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})$$

On dit parfois qu'on a obtenu un *développement asymptotique* de u_n à l'ordre 1.

3. a)
```
function y = suite(n)
    u=0
    for i=1:n
        u = (u^2+1)/2
    end
y=u
endfunction
```

b)
```
u = 0; n = 0;
while 1-u > 1e-3
    u = (u^2+1)/2
    n = n+1
end
disp(n)
```

Exercice 2

1. Une question de cours pour commencer : par définition, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est *diagonalisable* si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle sa matrice est *diagonale* :
$D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, où a, b, c sont les valeurs propres de f, pas forcément distinctes d'ailleurs.
Mais alors, selon les propriétés de la représentation matricielle :
$$Mat_{\mathcal{B}}(f \circ f) = D^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$
Donc $f \circ f$ est, au sens de la définition, diagonalisable puisque sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est aussi diagonale !

   On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse, c'est-à-dire que $f \circ f$ peut être diagonalisable, sans que f le soit. Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

2. a) Le calcul matriciel donne :
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et $A^4 = \begin{pmatrix} 1-4+4 & -2+6-4 & 2-4+2 \\ 2-6+4 & -4+9-4 & 4-6+2 \\ 2-4+2 & -4+6-2 & 4-4+1 \end{pmatrix} = I.$
$A^4 = I \iff A^4 - I = 0$, donc $P(X) = X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A, et par conséquent : les valeurs propres *possibles* de A sont les racines de P.
Or : $P(X) = (X^2-1)(X^2+1) = (X-1)(X+1)(X^2+1)$, donc les racines de P sont 1 et -1 :
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}.$$

   b) Pour déterminer $\mathrm{Ker}(g - Id)$, on résout le système :
$$(A-I)X = 0 \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ \quad - 2y + 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \quad - 2y + 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 2y - z = z \\ y = z \end{cases}, \quad \text{donc } \mathrm{Ker}(g - Id) = \{(z,z,z) |\ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1,1)).$$
Ainsi 1 est bien valeur propre de g, et comme $u = (1,1,1)$ est non nul, il forme une base du sous-espace propre $\mathrm{Ker}(g - Id)$.

   c) De même, on détermine $\mathrm{Ker}(g + Id)$ en résolvant le système :
$$(A+I)X = 0 \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 7z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \quad - 8y + 6z = 0 & L_2 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ \quad - 14y + 10z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \quad - 8y + 6z = 0 \\ \quad\quad - 2z = 0 & L_3 \leftarrow 4L_3 - 7L_2 \end{cases} \iff x = y = z = 0.$$
Ainsi donc, $\mathrm{Ker}(g + Id) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, c'est-à-dire que -1 n'est en fait pas valeur propre de g.

d) L'endomorphisme g admet finalement une seule valeur propre réelle, et le sous-espace propre est de dimension 1 : g n'est donc pas diagonalisable.

3. a) $A^2X = -X \iff (A^2+I)X = 0 \iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff x = y - z.$

Ainsi, $\text{Ker}(g^2+Id) = \{(y-z, y, z) | \ (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1,1,0), (-1,0,1))$.

Les vecteurs $v = (1,1,0)$ et $w = (-1,0,1)$ sont non-colinéaires, donc forment une famille libre, et finalement une base de $\text{Ker}(g^2+Id)$.

b) La famille $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 : pour montrer que c'est une base de l'espace, il suffit de vérifier que cette famille est libre.

c) Soient a, b, c trois réels tels que : $\quad a.u + b.v + c.w = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\iff \begin{cases} a + b - c = 0 \\ a + b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - c = 0 \\ c = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -b + 2c = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$\iff a = b = c = 0$, donc $\mathcal{B}$ est bien libre, et est une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Comme v, w sont éléments de $\text{Ker}(g^2+Id)$: $\quad g^2(v) = -v$ et $g^2(w) = -w$.

Comme u appartient à $\text{Ker}(g-Id)$: $\quad g(u) = u$, donc $g^2(u) = g(g(u)) = g(u) = u$. Ainsi :

$$\text{Mat}_{(u,v,w)}(g^2) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g^2(u) & g^2(v) & g^2(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \end{array}$$

On a bien obtenu une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g^2 est diagonale, ce qui signifie que g^2 est diagonalisable alors que g ne l'est pas : la réciproque de la propriété démontrée à la question 1. est donc fausse à cause de ce contre-exemple.

Exercice 3

On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p \in]0;1[$ et "Face" avec la probabilité $q = 1-p$. On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Soit si l'on a obtenu "Pile"
- Soit si l'on a obtenu n fois "Face"

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n.

a) Pour $k = 1$: $[T_n = 1]$ est réalisé ssi on a tiré une boule blanche dès le premier tirage, donc : $P(T_n = 1) = p$.

Pour $k \in [\![2, n-1]\!]$: $[T_n = k]$ est réalisé ssi on a fait $k < n$ tirages en tout, donc si on a obtenu une boule blanche au $k^{\text{ième}}$ tirage, les $k-1$ précédentes étant noires.

En clair : $[T_n = k] = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$.

L'indépendance des tirages (avec remise) donne : $\quad P(T_n = k) = (1-p)^{k-1}.p, \quad$ formule dont on remarque qu'elle est encore vraie pour $k = 1$.

b) Il y a deux façons de réaliser l'événement $[T_n = n]$:

⋆ Soit les n boules tirées sont noires, et on arrête les frais.

⋆ Soit la boule blanche est obtenue in extremis au $n^{\text{ième}}$ tirage, les $n-1$ précédentes étant toutes noires !

En clair : $[T_n = n] = (N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap B_n) \cup (N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap N_n)$.

Par incompatibilité des deux événements, et par indépendance des tirages, on obtient :

$$P([T_n = n]) = (1-p)^{n-1}.p + (1-p)^n = (1-p)^{n-1}[p + 1 - p] = (1-p)^{n-1}.$$

c) On vérifie que :

$$\sum_{k=1}^{n} P([T_n = k]) = \sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{k-1}.p + (1-p)^{n-1} \overset{[j=k-1]}{=} p.\sum_{j=0}^{n-2}(1-p)^j + (1-p)^{n-1}$$
$$= p.\frac{1-q^{n-1}}{1-(1-p)} + q^{n-1} = 1 - q^{n-1} + q^{n-1} = 1.$$

d) La v.a.r. T_n est d'univers-image fini, donc elle admet une espérance, qui vaut :

$E(T_n) = \sum_{k=1}^{n} k.P([T_n = k]) = \sum_{k=1}^{n-1} k.q^{k-1}.p + n.q^{n-1}$: pour la deuxième fois, on particularise le terme pour $k = n$ car la formule générale ne s'y applique pas.

On est donc ramené, une fois de plus, à calculer : $\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} = f'(q)$,

où $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x^k$, définie et dérivable sur $]-1;1[$ (c'est un polynôme !), se calcule aussi : $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$ comme somme des termes d'une suite géométrique de raison $-1 < x < 1$ et se dérive alors de deux façons différentes :

$$\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} k.x^{k-1} = \frac{-nx^{n-1}(1-x) - (1-x^n).(-1)}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{-nx^{n-1} + nx^n + 1 - x^n}{(1-x)^2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}.$$

Ainsi :

$$E(T_n) = p.f'(q) + nq^{n-1} = (1-q).\frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{(1-q)^2} + nq^{n-1}$$
$$= \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1 + nq^{n-1}.(1-q)}{(1-q)}$$
$$= \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1 + nq^{n-1} - nq^n}{(1-q)},$$

ce qui est bien : $E(T_n) = \frac{1-q^n}{1-q}$.

Remarque : le calcul de cette fameuse somme géométrique dérivée partielle était laissé à l'initiative du candidat !

2. Loi de X_n.

a) Vu les conditions de l'expérience : soit celle-ci se termine par le tirage d'une première boule blanche, soit elle s'achève après n tirages n'ayant donné que des noires. Donc : $X_n(\Omega) = \{0;1\}$, c'est une variable de Bernoulli.

D'après ce qu'on vient d'expliquer, l'événement $[X_n = 0]$ est égal à $N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap N_n$, c'est-à-dire que : $P([X_n = 0]) = q^n$.

Par conséquent, $P([X_n = 1]) = 1 - P([X_n = 0]) = 1 - q^n$.

b) $E(X_n) = 0.P([X_n = 0]) + 1.P([X_n = 1])$ est bien égale à $1 - q^n$.

3. Loi de Y_n.

a) Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$: l'événement $[Y_n = k]$ est réalisé ssi on a obtenu $k < n$ boules noires ; c'est donc que l'expérience s'est arrêtée par l'obtention d'une boule blanche au tirage suivant. Comme dans les calculs précédents, on obtient :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad P([Y_n = k]) = q^k \cdot p.$$

b) $[Y_n = n]$ est réalisé ssi on n'a obtenu que des boules noires :
donc, $[Y_n = n] = [X_n = 0]$, et $P([Y_n = n]) = q^n$.

c) Puisque T_n est le nombre total de tirages réalisé dans l'expérience, on a clairement la relation : $T_n = X_n + Y_n$ puisque chaque boule tirée est soit blanche, soit noire.
D'où : $Y_n = T_n - X_n$, et d'après la linéarité de l'espérance (les v.a.r. en jeu sont ici finies), on obtient :

$$E(Y_n) = E(T_n) - E(X_n) = \frac{1-q^n}{1-q} - (1-q^n) = (1-q^n)\left[\frac{1}{1-q} - 1\right] = (1-q^n) \cdot \frac{q}{p}.$$

4. On pourrait parler, s'agissant de la loi de T_n, d'une "loi géométrique tronquée" puisqu'on est bien dans le cas d'un temps d'attente d'un premier succès (obtenir Pile) dans la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et sans mémoire, sauf qu'ici on se donne un nombre maximal d'essai n. Mais si on augmente indéfiniment le nombre maximal d'épreuves n, alors on se "rapproche" de plus en plus du modèle probabiliste associé à la loi géométrique !

Démontrons donc rigoureusement que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T qui suit la loi géométrique de paramètre p ; pour cela, on démontre que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* = T(\Omega), \ \lim_{n \to +\infty} P(T_n = k) = P(T = k) = q^{k-1}p.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque, maix fixé : alors tant que $n < k$, $P(T_n = k) = 0$, mais dès que $n > k$, $P(T_n = k) = q^{k-1}p = P(T_n = k)$, on peut donc bien dire que :
$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \lim_{n \to +\infty} P(T_n = k) = P(T = k)$, ce qui prouve la convergence en loi voulue.

5. Simulation informatique. Rappelons que l'instruction `rand()` affecte à la variable u une valeur aléatoire choisie dans $]0;1[$, selon la loi uniforme à densité sur cet intervalle. Le résultat principal à retenir est alors que : quel que soit l'intervalle I inclus dans $]0;1[$ choisi, la probabilité que le réel fourni par l'appel à `rand()` appartienne à I, est égale à la longueur de I.

Ici, notamment : $P(\texttt{rand()} > p) = P(\texttt{rand()} \in]p;1[) = 1 - p$, on simule ainsi un lancer de pièce et l'événement $[\texttt{rand()} > p]$ représente la sortie d'un Face.

La condition de la boucle `While` exprime bien que les tirages se poursuivent *tant que* (While) l'on n'a obtenu aucune boule blanche (`x=0`), et tant qu'on n'a pas fait plus de n tirages (`t<n`). À chaque nouvelle boucle, le nombre de tirages augmente d'une unité. Si la boule tirée est noire, c'est la valeur de `y` qui augment d'une unité, sinon c'est celle de `x`.

Les trois instructions manquantes sont donc, dans l'ordre :

```
t:=t+1;
y:=y+1;
x:=x+1
```

PROBLÈME

On désigne par λ , un réel strictement positif et on considère la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda\,|x|\,e^{-\lambda x^2}$$

1. a) Les fonctions carrée et valeur absolue sont toutes deux paires, ainsi :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \lambda.|-x|.e^{-\lambda(-x)^2} = \lambda.|x|.e^{-\lambda x^2} = f(x)$, donc f est bien une fonction paire.

   b) Soit A un réel strictement positif :
$\displaystyle\int_0^A f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}.\int_0^A (-2\lambda x).e^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}.\left[e^{-\lambda x^2}\right]_0^A = \frac{1-e^{-\lambda A^2}}{2}$.
Comme $\lambda > 0$: $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-\lambda A^2} = 0$, et ainsi :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

   c) La fonction f est clairement continue, positive sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions ayant ces propriétés.

   De plus, la parité de f et la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ assurent que :

   $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\times\frac{1}{2} = 1.$
On peut donc conclure que f est une densité de probabilité.
Soit X une v.a.r. admettant f pour densité.

2. a) Pour tout réel positif x : $xf(x) = \lambda.x^2.e^{-\lambda x^2}$, et $x^2.xf(x) = \lambda.x^4.e^{-\lambda.x^2}$.
Or par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} X^2e^{-\lambda X} = 0$ $(\lambda > 0)$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \lambda.x^4.e^{-\lambda x^2} = 0$, ce qui permet d'écrire que : $xf(x) = o_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$.

   Comme les fonctions concernées sont continues, positives sur $[1;+\infty[$, et que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), on conclut par le théorème de comparaison des intégrales impropres, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ converge, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ aussi puisque $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $[0,1]$.

   Il suffit alors, classiquement, de remarquer que puisque f est paire, la fonction $g:\ x \mapsto x.f(x)$ est impaire ($\forall x \in R,\ g(-x) = -x.f(-x) = -x.f(x) = -g(x)$).
La convergence (absolue) de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ assure alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xf(x)\mathrm{d}x$ est aussi (absolument) convergente, et vaut $\displaystyle-\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.

   On conclut que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, et que X admet une espérance, qui vaut :
$\displaystyle E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 xf(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = 0.$

3. a) Soit $A > 0$: dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A x^2f(x)\mathrm{d}x = \int_0^A \lambda.x^3e^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x$, on réalise une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{lll} u(x) = x^2 & \to & u'(x) = 2x \\ v'(x) = \lambda.xe^{-\lambda x^2} & \to & v(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-\lambda x^2} \end{array}$$

Les fonctions concernées sont de classe C^1 sur $[0;+\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^A x^2 f(x)\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{2}.x^2e^{-\lambda x^2}\right]_0^A + \int_0^A xe^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x\\ &= -\frac{A^2}{2}e^{-\lambda A^2} + \left[-\frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda x^2}\right]_0^A\\ &= -\frac{A^2}{2}e^{-\lambda A^2} - \frac{1}{2\lambda}e^{-\lambda A^2} + \frac{1}{2\lambda}\end{aligned}$$

Lorsque A tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{A\to+\infty} A^2e^{-\lambda A^2} = 0 = \lim\limits_{A\to+\infty} e^{-\lambda A^2}$ par croissances comparées (pour le premier cas).

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$ est (absolument) convergente, et vaut $\dfrac{1}{2\lambda}$.

b) Toujours par parité de la fonction f, la fonction $x \mapsto x^2.f(x)$ est, elle aussi, paire (et continue) sur $\mathbb{R}$. La convergence (absolue) de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$ assure que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $2\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$.

Le théorème de transfert assure alors que X admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, on peut enfin en déduire que X admet une variance qui vaut :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{\lambda} - 0 = \frac{1}{\lambda}$$

4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est aussi une variable à densité, définie sur le même espace probabilisé que X.

a) Pour tout réel x, et par définition : $F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^2 \leqslant x)$.

On peut déjà conclure que : $\forall x < 0,\ P(X^2 \leqslant x) = 0$ vu que X^2 ne prend que des valeurs positives.

Pour tout $x \geqslant 0$: $P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$.

b) L'énoncé admet déjà que Y est une v.a.r. à densité, c'est-à-dire que sa fonction de répartition est continue sur tout $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

L'expression précédente de F_Y en fonction de F_X permet de voir que le seul point en lequel F_Y n'est peut-être pas de classe C^1, est $x = 0$.

Une densité f_Y de Y est alors donnée par la dérivée de F_Y sur $\mathbb{R}^*$; en 0 on on choisit une valeur arbitraire positive (ici 0 par exemple), et ainsi :

$\forall x \leqslant 0,\ f_Y(x) = 0$; pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned}f_Y(x) = F_Y'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}F_X'(\sqrt{x}) - (-\frac{1}{2\sqrt{x}}).F_X'(-\sqrt{x})\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}.\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}.f(\sqrt{x}) \text{ car } f \text{ est paire}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}.\lambda.\sqrt{x}.e^{-\lambda(\sqrt{x})^2} = \lambda.e^{-\lambda x}\end{aligned}$$

Bilan : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \lambda.e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

On reconnaît bien une densité d'une loi exponentielle de paramètre λ, loi suivie par $Y = X^2$.

c) Le cours donne alors, sans calcul : $E(Y) = \dfrac{1}{\lambda} \iff E(X^2) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Comme on a toujours $E(X) = 0$, on retrouve bien $V(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ comme en 3.b).

5. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1[$.

a) L'énoncé pose $W = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ et admet que W est une variable aléatoire.
Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
F_W(x) = P(W \leqslant x) &= P(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x) \\
&= P(\ln(1-U) \geqslant -\lambda x) \text{ car } \lambda > 0 \iff -\frac{1}{\lambda} < 0 \\
&= P(1-U \geqslant e^{-\lambda x}) \text{ par stricte croissance de } \exp \text{ sur } \mathbb{R} \\
&= P(U \leqslant 1 - e^{-\lambda x})
\end{aligned}$$

Deux cas sont alors à considérer :

⋆ Si $x \leqslant 0$: alors $-\lambda.x \geqslant 0 \iff e^{-\lambda x} \geqslant 1 \iff 1 - e^{-\lambda x} \leqslant 0$, et alors : $P(U \leqslant 1 - e^{-\lambda x}) = 0$.

⋆ Si $x > 0$: $-\lambda.x < 0 \iff 0 < e^{-\lambda.x} < 1 \iff 0 < 1 - e^{-\lambda.x} < 1$.
Alors, vu que $F_U(t) = P(U \leqslant t) = t$ si $t \in]0;1[$: $\forall x > 0,\ P(U \leqslant 1 - e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}$.

$$\text{Bilan : } \quad F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda.x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On reconnaît bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ, que suit donc la v.a.r. W.

Remarque : cette question, extrêmement classique, doit toujours être soigneusement rédigée avec tous les arguments nécessaires ; il y a des points pour chacun d'eux !

b) La relation $Y = X^2$ qui assure notamment que Y ne prend que des valeurs positives, s'écrit aussi : $\sqrt{Y} = |X|$. Il suffit alors de simuler $W = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ qui suit la même loi exponentielle que Y, puis d'en prendre la racine carrée.

```
function res = vax(lambda)
    u = rand()
    y = -ln(1-u)/lambda
    res = sqrt(y)
endfunction

```

Le résultat de la question 1.b) se réécrit : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \iff P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$.

On a par conséquent : $P(X \leqslant 0) = P(X < 0) = 1 - P(X \geqslant 0) = \dfrac{1}{2}$ (X est à densité), et X a bien autant de chances de prendre des valeurs positives que négatives.

On a donc, maintenant, un moyen de simuler la v.a.r. X : `rand()` simule la loi uniforme à densité sur $]0;1[$: la probabilité que le résultat soit inférieur à $\dfrac{1}{2}$, est justement inférieure ou égal à $\dfrac{1}{2}$;

puisque : $\begin{cases} X \geqslant 0 \iff X = |X| \\ X \leqslant 0 \iff X = -|X| \end{cases}$, on peut utiliser la fonction `vax`.

```
function res = x(lambda)
    p = rand()
    if p<1/2 then
```

```
            res = vax(lambda)
        else
            res = -vax(lambda)
        end
    endfunction

```

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y.
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un échantillon $(Y_1; \ldots; Y_n)$ de la loi de Y.
Les variables $Y_1; \ldots; Y_n$ sont supposées définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ et on rappelle qu'elles sont indépendantes et de même loi que Y.

6. On considère des réels $x_1; \ldots; x_n$ strictement positifs, ainsi que la fonction L , à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0; +\infty[$ par $\forall \lambda \in]0; +\infty[\ , \ L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k)$.

   a) Vu la définition de la densité f_Y de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$:

   $$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k) = \prod_{k=1}^{n} \lambda.e^{-\lambda.x_k} = \lambda^n.e^{-\lambda.\sum_{k=1}^{n} x_k}, \quad \text{et :} \quad \ln(L(\lambda)) = n\ln(\lambda) - \lambda.\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

   b) On considère la fonction φ , définie pour tout réel λ de $]0; +\infty[$ par $\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - \lambda \sum_{=1}^{n} x_k$.

   La fonction φ de la variable λ, est dérivable sur $]0; +\infty[$, avec :

   $$\forall \lambda > 0, \ \varphi'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \text{et :} \quad \varphi'(\lambda) \geqslant 0 \iff \frac{n}{\lambda} \geqslant \sum_{k=1}^{n} x_k \iff \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} x_k} \geqslant \lambda.$$

   En notant $z = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} x_k}$: la fonction φ est alors strictement croissante sur $]0; z]$, puis strictement décroissante sur $[z; +\infty[$; elle admet donc bien un maximum en $\lambda = z$.

   Ainsi : $\forall \lambda > 0, \ \varphi(\lambda) \leqslant \varphi(z) \iff \ln(L(\lambda)) \leqslant \ln(L(z)) \iff \forall \lambda > 0, \ L(\lambda) \leqslant L(z)$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, et z est aussi le point en lequel la fonction L atteint son maximum sur $]0; +\infty[$.

7. On pose dorénavant, toujours avec n supérieur ou égal à 2, $Z_n = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}$.

   On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.
   La suite $(Z_n)_{n\geqslant 2}$ est appelée estimateur du maximum de vraisemblance (*likelihood* in english) pour λ.
   On admet que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ admet pour densité la fonction f_n définie par :

   $$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases} .$$

   a) D'après le théorème de transfert, $Z_n = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{n}{t} f_n(t) \mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Pour tout réel $t<0$: $\dfrac{n}{t}f_n(t)=0$, et pour tout réel $t>0$ et tout entier $n\geqslant 2$:

$$\frac{n}{t}f_n(t)=\frac{n\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-2}e^{-\lambda t}=\frac{n\lambda}{n-1}.\frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!}t^{n-2}e^{-\lambda t}=\frac{n}{n-1}\lambda.f_{n-1}(t).$$

Comme f_{n-1} est une densité de probabilité, nulle sur $]-\infty;0]$:
$\displaystyle\int_0^{+\infty}f_{n-1}(t)\mathrm{d}t=1$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n}{t}f_n(t)\mathrm{d}t=\frac{n}{n-1}\lambda.\int_0^{+\infty}f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
On en déduit que Z_n admet une espérance qui vaut $E(Z_n)=\dfrac{n}{n-1}\lambda$.

b) Par linéarité de l'espérance, $Z'_n=\dfrac{n-1}{n}Z_n$ est une v.a.r. fonction de l'échantillon $(Y_1,\ldots,Y_n)$ qui a pour espérance :

$$E(Z'_n)=\frac{n-1}{n}E(Z_n)=\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n-1}\lambda=\lambda,$$

ce qui assure que $Z'_n=\dfrac{n-1}{\sum\limits_{k=1}^{n}Y_k}$ est un estimateur sans biais de λ.