MATHÉMATIQUES - EMLyon E 2020

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par :

$$\forall x \in]0;1[, \quad f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$

PARTIE A : Étude de la fonction f.

1. Pour tout x de $]0;1[$, $x > 0$ et $1-x > 0$, tandis que $\ln(x) < 0$ donc f est dérivable sur $]0;1[$ comme composée et quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur de s'y annulant pas.

$$\forall x \in]0;1[, \quad f'(x) = \frac{\frac{-1}{1-x}.\ln(x) - \ln(1-x).\frac{1}{x}}{\big(\ln(x)\big)^2} = \frac{-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\big(\ln(x)\big)^2}$$

2. a) Pour tout $t \in]0;1[$: $\ln(t) < 0$ par propriété du logarithme népérien et $t > 0$, donc $t\ln(t) < 0$.

b) On en déduit que pour tout x de $]0;1[$: $x\ln(x) < 0$ et $(1-x)\ln(1-x) < 0$ puisque $t = 1-x$ appartient à $]0;1[$ si $x \in]0;1[$.

Par conséquent : pour tout x de $]0;1[$, $-x\ln(x) > 0$ et $-(1-x)\ln(1-x) > 0$,

donc $-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x) > 0$ et $x(1-x)\big(\ln(x)\big)^2 > 0$ comme produit de trois facteurs strictement positifs : de tout cela on en déduit que pour tout x de $]0;1[$, $f'(x) > 0$ comme quotient de deux fonctions strictement positives sur $]0;1[$.

La fonction f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

3. a) Lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1-x) = \ln(1) = 0$ par continuité de ln en 1.

Par quotient de limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$: la fonction f est donc prolongeable par continuité en 0, en posant $\boxed{f(0) = 0}$.

b) Pour étudier la dérivabilité de ce prolongement en 0, on pose le taux d'accroissement de f en ce point :

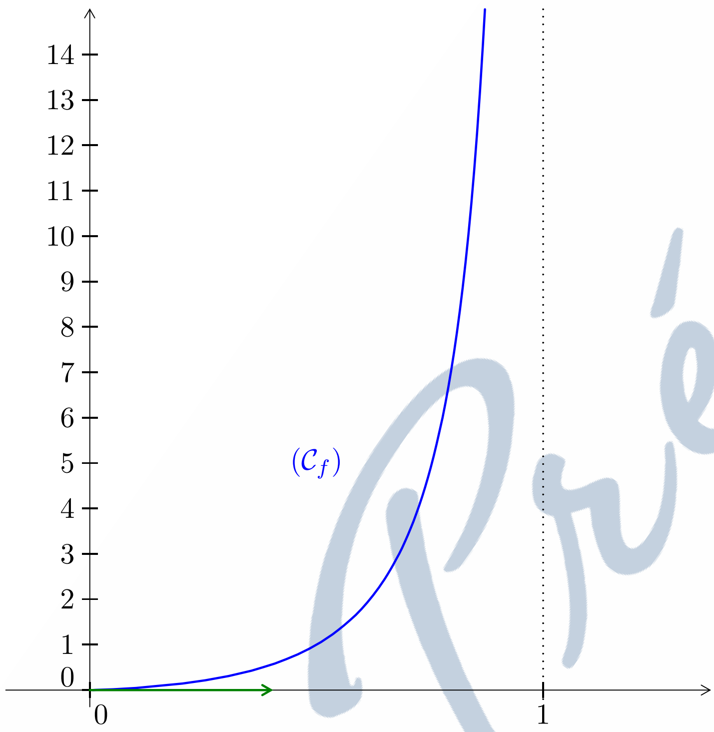
$\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} - 0}{x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x\ln(x)}$, où :

$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$ puisque $-x$ tend vers 0, donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x}{x\ln(x)} = -\dfrac{1}{\ln(x)}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{\ln(x)} = 0^+$: le taux d'accroissement admet une limite finie, donc f ainsi prolongée est dérivable en 0, avec $\boxed{f'(0) = 0}$.

4. $\lim_{x\to 1^-} \ln(1-x) = \lim_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$, et $\lim_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$, donc par quotient, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$: ce résultat prouve que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

5. On trace alors l'allure de la courbe de f en tenant compte de la valeur du prolongement en 0 ($f(0) = 0$), du fait qu'au point d'abscisse 0 la tangente est horizontale (puisque $f'(0) = 0$), de la stricte croissance de f sur $]0;1[$ et de l'asymptote verticale en $x = 1$.



PARTIE B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n : $x \mapsto x^n + x - 1$, fonction polynômiale donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, avec : $\forall n \in \mathbb{R}^+$, $p_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$ puisque $x > 0$: la fonction p_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Par ailleurs, $p_n(0) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} x^n = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} p_n(x) = +\infty$. Ainsi :

Sur $\mathbb{R}^+$, la fonction p_n est :
- continue (car de classe $\mathcal{C}^1$),
- strictement croissante,
- d'intervalle-image $[-1;+\infty[$ qui contient 0.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $p_n(x) = 0 \iff x^n + x - 1 = 0$, admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, que l'on note u_n.

7. On passe ici par une classique comparaison d'images :
$p_n(0) = -1$, $p_n(u_n) = 0$ et $p_n(1) = 1^n + 1 - 1 = 1$, il est donc évident que :

$$p_n(0) < p_n(u_n) < p_n(1) \Longrightarrow 0 < u_n < 1 \quad \text{par stricte croissance de } p_n \text{ sur } \mathbb{R}^+$$

8. Par définition, u_1 est l'unique solution positive de l'équation (E_1) :

$$x^1 + x - 1 = 0 \iff 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2} = u_1.$$

De même, u_2 est l'unique solution positive de l'équation (E_2) : $x^2+x-1 = 0$; c'est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$, dont l'unique solution positive est $u_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

9. a) L'algorithme de dichotomie est un grand classique de l'EMLyon, et un incontournable des sujets ECE[1] : il faut absolument l'avoir compris et le connaître pour compléter correctement le script proposé !

```
function u = valeur_approchee(n)
    a = 0
    b = 1
    while b-a > 10^(-3)     // tant que les deux bornes de l'intervalle de recherche sont trop éloignées
        c = (a+b)/2         // on coupe en deux l'intervalle de recherche
        if (c^n+c-1)>0 then // dans ce cas p_n s'annule entre a et c
            b = c           // c devient donc la nouvelle borne de droite
        else
            a = c           // sinon p_n(c)<0 et p_n s'annule entre c et b
        end
    u = (a+b)/2   // ou a, ou b, ou même c : quatre réponses possibles ici
    end           // end mal placé : u n'est censé n'être calculé et rendu qu'une fois la boucle while terminée
endfunction
```

b) Le script suivant n'était pas demandé, c'est lui qui permet d'utiliser la fonction précédente pour créer le graphique fourni par l'énoncé des 50 premiers termes de la suite implicite (u_n) :

```
T = []
for n=1:50
    T = [T,valeur_approchee(n)]  // chaque nouvelle solution calculée est rajoutée à la fin du vecteur T
end
plot2d(T,style=-1, rect = [0,0,50,1.2]) // affichage du nuage de points
xgrid(1)                                // affiche la grille
```

Il semble au vu de ce graphique, que la suite (u_n) soit strictement croissante et majorée par 1, donc convergente vers 1 ou un réel inférieur proche.

10. a) On part de la relation que le nombre u_n est le seul à vérifier en tant que réel de $]0;1[$ (appartenant donc au domaine de définition de f :

$$(u_n)^n+u_n-1=0 \iff (u_n)^n=1-u_n \iff n\ln(u_n)=\ln(1-u_n) \iff n=\frac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} \iff f(u_n)=n.$$

b) On peut donc à nouveau passer par une comparaison d'images :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad n<n+1 \iff f(u_n)<f(u_{n+1}) \iff u_n<u_{n+1}$$

par définition de u_n et u_{n+1}, et par stricte croissance de f sur $]0;1[$ auquel appartiennent u_n et u_{n+1}.

c) Remarquons qu'on peut déjà conclure ici que (u_n) est convergente : c'est une suite croissante d'éléments de $]0;1[$, elle est donc majorée par 1. Le théorème de limite monotone assure alors que (u_n) converge vers une limite $\ell\in]0;1]$. Reste à trouver la valeur exacte de $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

On peut raisonner de deux façons différentes ici :

- **Par l'absurde** : supposons que $0<\ell<1$, alors dans ce cas f est continue au point ℓ, et $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=f(\ell)$ est un nombre réel, ce qui est absurde puisque dans le même temps, $f(u_n)$ vaut n qui tend vers $+\infty$!

  On a donc $\ell\in]0;1]$ mais $\ell\notin]0;1[$, donc $\boxed{\ell=1=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n}$.

1. il est tombé à Ecricome l'année précédente !

- **Par un argument de bijection réciproque** : on sait que la fonction f est continue, strictement croissante sur $[0;+\infty[$: d'après le théorème éponyme, f réalise donc une bijection de $[0;+\infty[$ dans son intervalle-image $[f(0);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=[0;+\infty[$. Le tableau de variations de la bijection réciproque avec ses limites, s'obtient par lecture inversée de celui de f :

x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\longrightarrow$

x	0		$+\infty$
f^{-1}	0	$\nearrow$	$+\infty$

Or la bijection réciproque permet d'écrire :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f(u_n)=n \iff \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=f^{-1}(n),$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n)=\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty.$$

PARTIE C : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0;+\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x,y)\in]0;+\infty[^2,\quad F(x,y)=x^2y+x^2-\frac{y^2}{2}-2x.$$

11. a) La fonction F est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0;+\infty[^2$ comme fonction polynômiale en les deux variables x et y, avec pour tout couple (x,y) de $]0;+\infty[^2$:

$$\partial_1(F)(x,y)=2xy+2x-2,\qquad \partial_2(F)(x,y)=x^2-y$$

b) Le couple (x,y) de $]0;+\infty[^2$ est point critique de F si et seulement s'il est solution du système :

$$\begin{cases}\partial_1(F)(x,y) &= 0\\ \partial_2(F)(x,y) &= 0\end{cases} \iff \begin{cases}2xy+2x-2=0\\ y=x^2\end{cases} \iff \begin{cases}x^3+x-1=0\\ y=x^2\end{cases}$$

(pour la dernière étape, on a remplacé y par x^2 dans L_1 et simplifié cette ligne par 2). On reconnaît l'équation (E_3) en ligne L_1, dont on sait qu'elle admet pour unique solution dans $]0;+\infty[$ le nombre u_3.

La fonction F admet donc en effet un unique point critique sur $]0;+\infty[^2$, qui est le couple (u_3,u_3^2).

12. a) On commence par calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de F : pour tout couple (x,y) de $]0;+\infty[^2$,

$$\partial^2_{1,1}(F)(x,y)=2y+2,\quad \partial^2_{2,2}(F)(x,y)=-1,\quad \partial^2_{1,2}(F)(x,y)=2x=\partial^2_{2,1}(F)(x,y)\quad \text{(théorème de Schwarz)}$$

La Hessienne de F au point critique (u_3,u_3^2) est donc :

$$H=\begin{pmatrix}\partial^2_{1,1}(F)(u_3,u_3^2) & \partial^2_{1,2}(F)(u_3,u_3^2)\\ \partial^2_{1,2}(F)(u_3,u_3^2) & \partial^2_{2,2}(F)(u_3,u_3^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u_3^2+2 & 2u_3\\ 2u_3 & -1\end{pmatrix}$$

b) On donne ici la rédaction la plus efficace, mais pas la plus facile à mettre en œuvre, avec beaucoup d'initiatives à prendre et un vrai recul sur les notions à avoir !

La matrice H est symétrique réelle, donc diagonalisable, et elle admet deux valeurs propres distinctes ou confondues λ_1 et λ_2.

Si λ_1 et λ_2 étaient égales, alors H serait semblable à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda.I_2$, via une matrice de passage P.

On devrait donc avoir : $H = P \times \lambda_1.I_2 P^{-1} = \lambda_1.PI_2P^{-1} = \lambda_1.PP^{-1} = \lambda_1.I_2$, ce qui n'est évidemment pas le cas (puisque $2u_3 \neq 0$), donc $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Les valeurs propres de H sont les réels λ tels que $H - \lambda.I_2$ n'est pas inversible ; s'agissant d'une matrice carrée d'ordre 2, c'est le cas si et seulement si le déterminant $\det(H - \lambda.I_2)$ est nul, soit :

$$\det(H - \lambda.I_2) = 0 \iff (2u_3^2 + 2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 4u_3^2 = 0$$

Dans cette équation du second degré selon l'inconnue λ, les relations coefficients-racines nous apprennent que le produit $\lambda_1\lambda_2$ est égal au quotient $\dfrac{c}{a}$, où a est le coefficient de degré 2, ici égal à 1, et c est le terme constant, obtenu pour $\lambda = 0$, donc :

$$\lambda_1\lambda_2 = -2u_3^2 - 2 - 4u_3^2 = -6u_3^2 - 2 \qquad CQFD$$

13. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0; +\infty[^2$: si elle admet un extremum, c'est en un point critique, donc (u_3, u_3^2) est le seul candidat possible.

En ce point, la Hessienne admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 dont le produit vaut $-6u_3^2 - 2$ et est donc clairement négatif : les deux valeurs propres sont de signes opposés, donc en ce point critique F n'admet pas d'extrémum, mais un point-col.

On peut donc conclure que F n'admet aucun extremum sur l'ouvert $]0; +\infty[^2$.

Exercice 2

On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \left\{ M(a,b) \middle| \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
L'objectif de cet exercice était de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. a) Le plus rapide ici est de remarquer que toute matrice de l'ensemble E se décompose sous la forme :

$$M(a,b) = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où la première matrice est en fait $M(1,0)$ et la deuxième $M(0,1)$, ce qui permet d'écrire :

$$E = \text{Vect}\big(M(1,0), M(0,1)\big)$$

et E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ comme sous-espace engendré par deux matrices carrées d'ordre 4.

La famille $\big(M(1,0), M(0,1)\big)$ est génératrice de E, et comme elle est constituée de deux matrices clairement non proportionnelles, elle est aussi libre : c'est donc une base de E, et $\dim E = 2$.

b) Le simple produit : $M(1,0) \times M(0,1)$ de ces deux matrices de base de E, donne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ne peut en aucun cas être une matrice $M(a,b)$ dont les trois premiers coefficients des colonnes 2 et 3 sont toujours nuls. Ce contre-exemple suffit pour conclure qu'il est faux de dire que le produit de deux matrices quelconques de E appartient encore à E.

2. Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.

La matrice $M(0,0)$ est en fait la matrice nulle d'ordre 4 : on peut la voir comme une matrice diagonale (avec des zéros comme éléments diagonaux), et à ce titre elle est bien diagonalisable.

3. Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.

Soit a un réel non nul : on note A la matrice $M(a,0) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Le calcul matriciel donne : $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc : $A^2 = a.A \iff A^2 - a.A = 0_4$.

On en conclut que $P(X) = X^2 - a.X$ est un polynôme annulateur de A.

b) On sait alors d'après le cours que les valeurs propres de A se trouvent *parmi* les racines de $P(X)$: celui-ci se factorise sous la forme $X(X-a)$, donc ses racines sont 0 et a, et $\text{Sp}(A) \subset \{0; a\}$.

Réciproquement, testons chacune de ces deux valeurs propres :

- Pour $\lambda = 0$: la matrice $A - 0.I = A$ est clairement non-inversible car deux de ses colonnes sont nulles, donc 0 est valeur propre de A.

  Il est par ailleurs clair que A est de rang 1 car une fois ses deux colonnes nulles prises en compte, on remarque que ses colonnes C_1 et C_4 sont identiques (et non nulles puisque $a \neq 0$).

  Le théorème du rang assure alors que $\dim E_0(A) = 3$; au vu de ce qui précède, on sait que les matrices-colonnes $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $E_0(A)$.

  Il est à peu près évident que (U, V, W) est une famille libre : pour le vérifier on considère une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs : soient x, y, z trois réels tels que

$$x.U + y.V + z.W = 0_{4,1} \iff \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y = z = 0 \quad \text{par identification des coefficients}$$

  La famille (U, V, W) est bien libre, et c'est une famille de trois vecteurs de $E_0(A)$ qui est de dimension 3 : (U, V, W) est donc une base de $E_0(A)$.

- Pour $\lambda = a$: $\quad A - a.I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$. Cette matrice a deux lignes L_1 et L_4 opposées, donc elle n'est pas inversible et 0 est bien valeur propre de A.

  En remarquant aussi que la somme des trois premières colonnes de $A - a.I_4$ est nulle, on en déduit que $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $(A - a.I_4)Z = 0_{4,1} \iff AZ = a.Z$, donc que Z est vecteur propre de A pour la valeur propre a, et $\dim E_a(A) \geqslant 1$.

  Or, d'après le théorème spectral : $\dim E_0(A) + \dim E_a(A) \leqslant 4$, et d'après ce qui précède, $\dim E_0(A) + \dim E_a(A) \geqslant 3 + 1 = 4$. On en déduit donc que :

  - La matrice A a pour valeurs propres 0 et a et n'en admet pas d'autre.
  - $\dim E_0(A) + \dim E_a(A) = 4$ et donc $\dim E_a(A) = 1$ puisqu'on sait déjà que $\dim E_0(A) = 3$.
  - La matrice-colonne Z est un vecteur propre non nul, donc formant à lui seul une famille libre de $E_a(A)$ qui est de dimension 1 : (Z) est donc une base de $E_a(A)$.

Remarque : on utilise ici des arguments qui évitent au maximum le recours aux calculs avec les systèmes, mais une méthode plus traditionnelle les utilisant, donne les mêmes résultats.

c) De tout ce qui précède, en particulier du fait que $\dim E_0(A) + \dim E_a(A) = 4$, on déduit que la matrice A est bien diagonalisable, que la réunion des bases de $E_0(A)$ et $E_a(A)$, à savoir la famille (U, V, W, Z) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour A, et que l'on dispose de la relation :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.

Soit b un réel non nul ; on note B la matrice $M(0, b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$.

a) La matrice B a quatre colonnes identiques et non nulles puisque $b \neq 0$, donc : $\operatorname{rg}(B) = 1$.

$B - b.I_4 = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 3.

Il s'agit en effet de calculer la dimension du sous-espace engendré par ses quatres colonnes : la dernière est nulle, et les trois premières forment une famille libre ; pour le prouver on peut considérer x, y et z trois réels tels que :

$$x.\begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a tout divisé par $b \neq 0$, et l'identification des coefficients donne $x = y = z = 0$.

b) De ce qui précède, et gtrâce au théorème du rang, on en déduit que :

- 0 et b sont valeurs propres de B et $\dim E_0(B) = 3$, $\dim E_b(B) = 1$.

- $\dim E_0(B) + \dim E_b(B) = 4$ donc B n'admet pas d'autre valeur propres, et B est diagonalisable.

5. Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a, b)$.

On pose : $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 0, 0, 1)$ et $T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$.

a) La matrice $M(a, b)$ est de rang 2 puisque ses colonnes C_1 et C_4 d'une part, et C_2 et C_3 d'autre part, sont identiques et puisque C_1 et C_2 forment une famille libre, étant non proportionnelles ($a \neq 0$). On a donc aussi $\operatorname{rg}(f) = 2$, et d'après le théorème du rang pour f :

$$\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rg}(f) = 4 - 2 = 2.$$

Il est de plus assez clair au vu de ce qu'on vient de dire, que $v_3 = (1, 0, 0, -1)$ et $v_4 = (0, 1, -1, 0)$ sont éléments de $\operatorname{Ker}(f)$: comme ils forment une famille libre puisqu'ils sont non proportionnels, et puisque $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2$, alors les vecteurs (v_3, v_4) ainsi définis forment une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

b) Montrons que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$: comme c'est une famille de 4 vecteurs d'un espace de dimension 4, il suffit de prouver que la famille est libre.

Pour cela, on considère 4 réels x, y, z, t tels que :

$$x.v_1 + y.v_2 + z.v_3 + t.v_4 = 0_{\mathbb{R}^4} \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & & & = & 0 \\ x & & & & & + & t & = & 0 \\ x & & & & & - & t & = & 0 \\ & & y & - & z & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Dans ce système, l'opération $L_2 + L_3$ donne : $2x = 0 \Longrightarrow x = 0$; L_1 devient alors $z = 0$, donc L_4 devient $y = 0$ et L_2 redonne finalement $t = 0$; la famille $\mathcal{B}'$ est libre, c'est bien une base de $\mathbb{R}^4$.

c) On sait déjà que v_3 t v_4 appartiennent à $\mathrm{Ker}(f)$, donc $f(v_3) = f(v_4) = 0_{\mathbb{R}^4}$.

L'image $f(v_1)$ est représentée dans la base canonique par le produit matriciel $M(a,b)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a\\a\\3b\end{pmatrix}$;

on remarque ainsi que $\boxed{f(v_1) = a.v_1 + 3b.v_2}$.

L'image $f(v_2)$ du quatrième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ se lit directement sur la matrice :

$$\boxed{f(v_2) = (a,a,a,b) = a.v_1 + b.v_2}$$

On en déduit que la matrice N de l'endomorphisme f dans cette nouvelle base $\mathcal{B}'$ est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{array} \\ N = & \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Par définition :

$$X \text{ est vecteur propre de } N \text{ pour la valeur propre } \lambda \iff NX = \lambda.X \iff \begin{pmatrix}ax+ay\\3bx+3by\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda.x\\\lambda.y\\\lambda.z\\\lambda.t\end{pmatrix}$$

Puisqu'ici $\lambda \neq 0$, le principe d'identification et la règle du produit nul assurent que :

$$\begin{aligned} X \in E_\lambda(N) &\iff \begin{pmatrix}ax+ay\\3bx+3by\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda.x\\\lambda.y\end{pmatrix} \text{ et } z = t = 0 \\ &\iff \underbrace{\begin{pmatrix}a & a\\3b & b\end{pmatrix}}_{T}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } z = t = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ est vecteur propre de } T \text{ pour la valeur propre } \lambda \text{ et } z = t = 0 \end{aligned}$$

e) On suppose dans cette question uniquement que $(a,b) = (1,1)$. La matrice T est donc alors égale à $\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}$, et ses valeurs propres λ sont les réels pour lesquels $T - \lambda.I_2$ est non-inversible ; s'agissant d'une matrice carrée d'ordre 2, on peut utiliser le critère sur son déterminant :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \iff \det(T - \lambda.I_2) = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 3 \times 1 = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$$

Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 \times 2 = 12 > 0$, donc T admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = \dfrac{2 - \sqrt{12}}{2} = 1 - \sqrt{3}$ et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{3}$.

Comme ces deux réels sont non nuls, on en déduit d'après d) que λ_1 et λ_2 sont aussi valeurs propres de $M(a,b)$ avec $\dim E_{\lambda_1}\big(M(a,b)\big) \geqslant 1$ et $\dim E_{\lambda_2}\big(M(a,b)\big) \geqslant 1$.

Comme par ailleurs, $\mathrm{Ker}(f) = E_0\big(M(a,b)\big)$ est de dimension 2, alors 0 est aussi valeur propre de $M(1,1)$, de sorte que 0, λ_1 et λ_2 sont valeurs propres de $M(1,1)$, avec

$$\dim E_0\big(M(1,1)\big) + \dim E_{\lambda_1}\big(M(1,1)\big) + \dim E_{\lambda_2}\big(M(1,1)\big) \geqslant 4$$

Or, d'après le théorème spectral : $\dim E_0\big(M(1,1)\big)+\dim E_{\lambda_1}\big(M(1,1)\big)+\dim E_{\lambda_2}\big(M(1,1)\big)\leqslant 4$; on en conclut donc que :
$\dim E_0\big(M(1,1)\big)+\dim E_{\lambda_1}\big(M(1,1)\big)+\dim E_{\lambda_2}\big(M(1,1)\big)=4$, donc $M(1,1)$ n'admet pas d'autres valeurs propres que 0, λ_1 et λ_2 et $M(1,1)$ est diagonalisable.

f) On suppose dans cette question uniquement que $(a,b)=(1,-1)$, et donc que $T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$.

Comme précédemment, les valeurs propres de T sont les réels λ vérifiant :

$$\det(T-\lambda.I_2)=0 \iff (1-\lambda)(-1-\lambda)-(-3)=0 \iff -1+\lambda^2+3=0 \iff \lambda^2=-2$$

c'est une équation qui n'admet évidemment aucune solution réelle : la matrice T n'admet aucune valeur propre réelle, donc toujours d'après d), $M(1,-1)$ n'admet aucune valeur propre réelle non nulle.
Ainsi 0 est la seule valeur propre réelle de $M(1,-1)$, et comme $\dim E_0\big(M(1,-1)\big)=\dim \mathrm{Ker}(f)$ $=2<4$, on peut conclure que $M(1,-1)$ n'est pas diagonalisable.

g) Plus généralement, pour a et b non nuls et quelconques, les valeurs propres de $T=\begin{pmatrix}a & a\\ 3b & b\end{pmatrix}$ sont les réels tels que :

$$\det(T-\lambda.I_2)=0 \iff (a-\lambda)(b-\lambda)-3ab=0 \iff \lambda^2-(a+b)\lambda-2ab=0$$

Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta=(a+b)^2+8ab=a^2+10ab+b^2$, et on sait qu'il y a alors 3 cas possibles :

- Si $a^2+10ab+b^2<0$, alors T n'admet aucune valeur propre réelle, et on conclut comme en f) que $M(a,b)$ n'est pas diagonalisable.

- Si $a^2+10ab+b^2>0$, alors T admet deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2. Comme le terme constant de l'équation est $-2ab\neq 0$ (puisque a et b sont non nuls), ces deux racines sont non nulles, et sont alors aussi valeurs propres de $M(a,b)$: la même argumentation qu'à la question e) prouve que $M(a,b)$ est alors diagonalisable.

- Reste à traiter le cas où $a^2+10ab+b^2=0$: dans ce cas la matrice T admet une unique valeur propre λ_0.

  Si on avait $\dim E_{\lambda_0}(T)=2$, alors T serait diagonalisable, semblable à la matrice $\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}=$ $\lambda_0.I_2$ via une matrice de passage Q inversible d'ordre 2, et alors on aurait :
  $T=Q(\lambda_0.I_2)Q^{-1}=\lambda_0 QQ^{-1}=\lambda_0.I_2$: T serait *égale* à la matrice $\lambda_0.I_2$, ce qui n'est évidemment pas le cas puisque $a\neq 0$ et $b\neq 0$.

  De tout ceci on déduit que $\dim E_{\lambda_0}(T)=1<2$ et que tout vecteur propre de T pour la valeur propre λ_0, est un multiple scalaire d'un vecteur de base $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$.

  L'équivalence obtenue à la question d) assure alors que les vecteurs propres de la matrice $M(a,b)$ associés à la valeur propre λ_0 sont eux-même tous multiples scalaires du vecteur $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, et donc que $\dim E_{\lambda_0}\big(M(a,b)\big)=1$.

  Les seules valeurs propres de $M(a,b)$ sont dans ce cas 0 et λ_0, avec :
  $\dim E_0\big(M(a,b)\big)+\dim E_{\lambda_0}\big(M(a,b)\big)=2+1=3<4$: $M(a,b)$ n'est donc pas diagonalisable dans ce cas.

On conclut donc effectivement cette longue étude en disant qu'on a prouvé l'équivalence :

$$M(a,b) \text{ est diagonalisable } \iff a^2+10ab+b^2>0$$

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

PARTIE A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ a\dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}.$$

1. La fonction f est positive sur $]-\infty; b[$ comme constante nulle, et positive sur $[b; +\infty[$ comme quotient de réels positifs puisque $b > 0$ (et $t \geqslant b > 0$ dans ce cas) : f est positive sur tout $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $]-\infty; b[$ comme fonction constante, et continue sur $]b; +\infty[$ comme fonction de référence (puissance inverse) multipliée par des constantes : f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en b.

Sous réserve de convergence : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{b} 0 \, \mathrm{d}x + ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a+1}}\mathrm{d}x$; on reconnaît une intégrale de Riemann d'exposant $a+1 > 1$ (puisque $a > 0$), donc convergente, et valant :

$$ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a+1}}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} ab^a\Big[-\frac{1}{ax^a}\Big]_b^A = \lim_{A\to+\infty} ab^a\Big(-\frac{1}{aA^a} + \frac{1}{ab^a}\Big) = \frac{ab^a}{ab^a} = 1$$

ce qui achève de démontrer que f est bien une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité, suivant ainsi la loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Par définition : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. On distingue deux cas :

- Si $x < b$: alors $]-\infty; x] \subset]-\infty; b[$, intervalle sur lequel f est nulle, donc $\boxed{F_X(x) = 0}$.
- Pour tout $x \geqslant b$: $\quad F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{b} 0 \, \mathrm{d}t + ab^a \int_b^x \mathrm{d}t = ab^a\Big(-\frac{1}{ax^a} + \frac{1}{ab^a}\Big)$,

  soit $\boxed{F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^a}$

  d'après le calcul d'intégrale déjà fait à la question **1.**, en remplaçant A par x.

3. a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; 1[$, on considère la variable aléatoire $V = bU^{-1/a}$, presque-sûrement bien définie puisque $\mathbb{P}(U > 0) = 1$.

Puisque $1/a > 0$, $U^{1/a}$ est presque-sûrement à valeurs dans $]0; 1[$ et par inverse $U^{-1/a}$ est presque-sûrement à valeurs dans $]1; +\infty[$, donc $V = bU^{-1/a}$ est presque-sûrement à valeurs dans $]b; +\infty[$: on en déduit déjà que pour tout $x \leqslant b$, $F_V(x) = \mathbb{P}(V \leqslant x) = 0$.

Pour tout $x > b$:

$$F_V(x) = \mathbb{P}(bU^{-1/a} \leqslant x) = \mathbb{P}\Big(\frac{b}{x} \leqslant U^{1/a}\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{b^a}{x^a} \leqslant U\Big) = 1 - F_U\Big(\frac{b^a}{x^a}\Big)$$

où : $\quad x > b \Longrightarrow 0 < \dfrac{b}{x} < 1 \Longrightarrow \dfrac{b^a}{x^a} \in]0; 1[$, donc : $F_V(x) = 1 - \dfrac{b^a}{x^a}$ puisque $F_U(t) = t$ pour tout t de $[0; 1[$.

On a donc vérifié que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ F_V(x) = F_X(x)$, ce qui prouve que les variables aléatoires $V = bU^{-1/a}$ et X suivent bien la même loi de Pareto de paramètres a et b.

b) On en déduit le script `Scilab` permettant d'obtenir une simulation de la loi de Pareto suivie par X : il suffit de simuler U de loi uniforme sur $[0;1[$, et de calculer la valeur de $V = bU^{-1/a}$ correspondante.

```
function X = pareto(a,b)
    U = rand()
    X = b*U^(-1/a)
endfunction
```

c) On reproduit ici en le commentant, le script de la fonction `mystere` proposé par l'énoncé :

```
function L = mystere(a,b)
    L = []
    for p = 2:6
        S = 0
        for k = 1 : 10^p
            S = S + pareto(a,b)
        end
        L = [L,S/10^p]
    end
endfunction
```

Le calcul très classique fait ici, est celui de la *moyenne empirique* d'échantillons de simulations de la loi de Pareto de paramètres a et b, avec 5 tailles d'échantillons successives : 100, 1000, 10000, 100000 et 1000000 de simulations; les cinq moyennes empiriques sont concaténés successivement à la fin du vecteur `L`.

d) Les valeurs rendues pour différentes valeurs des paramètres a et b, permettent d'illustrer la convergence éventuelle de cet estimateur vers l'espérance de la loi de Pareto (conséquence de la loi des grands nombres).

On voit ainsi que pour $a = 2$ et $b = 1$, ainsi que pour $a = 3$ et $b = 2$, la convergence est assez rapide vers les valeurs respectives 2 et 3 (qui correspondent bien aux espérances des lois de Pareto associées comme on le verra ci-dessous), alors que pour $a = 1$ et $b = 4$ il ne semble pas y avoir convergence, les valeurs rendues ayant un comportement complètement désordonné (à mettre en lien avec le fait qu'on va voir dans la suite, que X n'admet pas d'espérance avec cette valeur de a).

4. a) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
Comme la fonction $x :\mapsto x.f(x)$ est nulle sur $]-\infty; b[$, positive sur $[b;+\infty[$ (produit de deux facteurs positifs puisque $x \geqslant b > 0$), il suffit alors de prouver la convergence simple de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_b^{+\infty} x.\frac{ab^a}{x^{a+1}}\mathrm{d}x = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a}\mathrm{d}x$.
Cette intégrale de Riemann converge si et seulement si $a > 1$, auquel cas X admet une espérance qui vaut :

$$E(X) = ab^a . \lim_{A\to+\infty} \Big[-\frac{1}{(a-1)x^{a-1}} \Big]_b^A = \frac{ab^a}{(a-1)b^{a-1}} = \frac{ab}{a-1}$$

b) La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2 : d'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Là encore, pour les mêmes raisons, cela revient à prouver la convergence simple de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_b^{+\infty} x^2.f(x)\mathrm{d}x = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a-1}}\mathrm{d}x$.
Là encore, on reconnaît une intégrale de Riemann qui converge si et seulement si cette fois

$a-1>1 \iff a>2$, auquel cas X admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$E(X^2) = ab^a . \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{(a-2)x^{a-2}} \right]_b^A = \frac{ab^a}{(a-2)b^{a-2}} = \frac{ab^2}{a-2}$$

La variable aléatoire X admet donc une variance, donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{ab^2}{a-2} - \frac{a^2b^2}{(a-1)^2} = \frac{a(a-1)^2b^2 - a^2(a-2)b^2}{(a-1)^2(a-2)} = \frac{b^2(a^3-2a^2+a-a^3+2a^2)}{(a-1)^2(a-2)}$$
$$= \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

PARTIE B : Estimation du paramètre b

On suppose dans cette partie uniquement que $a=3$ et on cherche à déterminer un estimateur performant de b.
Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b, \\ \dfrac{3b^3}{x^4} & \text{si } x \geqslant b. \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.
On définit : $\quad Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n) \quad$ et $\quad Z_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$.

5. a) Pour tout réel $x \in [b; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n > x) &= \mathbb{P}\big(\min(X_1, \ldots, X_n) > x\big) = \mathbb{P}\big([X1 > x] \cap \ldots \cap [X_n > x]\big) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_n > x) \qquad \text{les } (X_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \text{ sont indépendantes} \\ &= \big(\mathbb{P}(X > x)\big)^n \qquad \text{les } (X_k)_{1\leqslant k\leqslant N} \text{ suivent la même loi que } X \\ &= \big(1 - F_X(x)\big)^n = \left(\frac{b}{x}\right)^{3n} \qquad \text{puisque } x \geqslant b \text{ et } a = 3 \end{aligned}$$

b) Comme par ailleurs, Y_n est le minimum de variables alétoires qui sont toutes presque-sûrement à valeurs dans $[b; +\infty[$: on peut déjà conclure sans calcul supplémentaire que Y_n est elle-même presque-sûrement à valeurs dans $[b; +\infty[$, et donc que :
pour tout $x \in]-\infty, b[$, $F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = 0$, de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^{3n} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

ce qui correspond bien à la fonction de répartition d'une loi de Pareto de paramètres $3n$ et b, loi que suit donc Y_n.

c) Au vu des calculs fait à la fin de la partie A : comme $3n > 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n admet une espérance qui vaut : $E(Y_n) = \dfrac{3n.b}{3n-1}$, donc $Y_n' = \dfrac{3n-1}{3n} Y_n$ admet une espérance, et la linéarité de celle-ci donne

$$E(Y_n') = \frac{3n-1}{3n} E(Y_n) = \frac{3n-1}{3n} . \frac{3n}{3n-1} b = b$$

ce qui prouve que Y'_n est bien un estimateur (puisque sa loi dépend de b, mais pas son expression explicite) sans biais de b.

Le risque quadratique de l'estimateur Y'_n est alors égal à sa variance, et vaut :

$$r_b(Y'_n) = V(Y'_n) = \frac{(3n-1)^2}{(3n)^2}V(Y_n) = \frac{(3n-1)^2}{9n^2}.\frac{3n.b}{(3n-1)^2(3n-2)} = \frac{b^2}{3n(3n-2)}$$

6. a) La variable aléatoire Z_n est une fonction de variables aléatoires dont la loi commune dépend de b, sans que b n'intervienne explicitement dans sa définition : il s'agit bien d'un estimateur de b.

Puisque X admet une espérance, alors il en est de même de toutes les variables aléatoires $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$: par linéarité de l'espérance, Z_n admet donc une espérance qui vaut :

$$E(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{3b}{2} = \frac{3nb}{2n} = \frac{3b}{2}$$

Puisque les $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont mutuellement indépendantes et admettent chacune, comme X, une variance puisque $a = 3 > 2$, alors Z_n admet aussi une variance qui vaut :

$$V(Z_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{n^2}\times n \times \frac{3b^2}{(3-1)^2(3-2)} = \frac{3b^2}{4n}$$

b) De ce qui précède, on déduit que $Z'_n = \dfrac{2Z_n}{3}$ est un estimateur, comme Z_n, de b, vérifiant : $E(Z'_n) = \dfrac{2}{3}.E(Z_n) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3b}{2} = b$ toujours par linéarité de l'espérance.

Ainsi défini, Z'_n est bien un estimateur sans biais de b, dont le risque quadratique est égal à sa variance, qui vaut : $\quad r_b(Z'_n) = V(Z'_n) = \dfrac{4}{9}V(Z_n) = \dfrac{4}{9}.\dfrac{3b^2}{4n} = \dfrac{b^2}{3n}$.

7. Il apparaît donc clairement que $r_b(Y'_n) = \dfrac{1}{3n-2}.r_b(Z'_n)$, donc que le risque quadratique de Y'_n est négligeable devant celui de Z'_n lorsque la taille de l'échantillon $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ tend vers $+\infty$: en cela, l'estimateur Y'_n) est bien plus performant que Z'_n, et doit donc être préférentiellement choisi [2].

PARTIE C : Estimation du paramètre a

On suppose dans cette partie que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\quad W_n = \ln(X_n)$.

Puisque X_n est presque-sûrement à valeurs dans $[1;+\infty[$, alors $W_n = \ln(X_n)$ est presque-sûrement à valeurs dans l'intervalle-image $[0;+\infty[$, ce qui permet déjà d'écrire sans calcul :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty;0[,\ F_{W_n}(x) = \mathbb{P}(W_n \leqslant x) = 0.}$$

Pour tout réel $x > 0$:

$$F_{W_n}(x) = \mathbb{P}(W_n \leqslant x) = \mathbb{P}(\ln(X_n) \leqslant x) \overset{(1)}{=} \mathbb{P}(X_n \leqslant e^x) = F_X(e^x) \overset{(2)}{=} 1 - \left(\frac{1}{e^x}\right)^a \boxed{= 1 - e^{-ax}}$$

(1) : par stricte croissance et continuité de exp sur $\mathbb{R}_+^*$

(2) : d'après le calcul fait à la question 2. avec $b = 1$ et $e^x > 1 = b$ pour $x > 0$.

On reconnaît donc au vu de sa fonction de répartition, que la variable aléatoire W_n suit la loi exponentielle de paramètre a.

Le cours sur cette loi donne alors, directement : $\quad E(W_n) = \dfrac{1}{a}$ et $V(W_n) = \dfrac{1}{a^2}$.

2. voir le sujet Ecricome sorti 6 jours plus tôt pour une illustration graphique de ce fait !

9. On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(X_k)$ et $T_n = \sqrt{n}(a.M_n - 1)$.

a) Il s'agit ici d'un cas d'application du théorème de la limite centrée : la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constituées de variables aléatoires mutuellement indépendantes (car les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le sont, lemme des coalitions), de même loi exponentielle de paramètre a admettant une espérance ainsi qu'une variance non nulle.

D'après le théorème de la limite centrée : la suite des variables aléatoires centrées, réduites associées à aux moyennes empiriques $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} W_k$, converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Comme $E(M_n) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(W_k) = \dfrac{1}{n}.n.\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a}$, et $V(M_n) = \dfrac{1}{n^2}.\sum_{k=1}^{n} V(W_k) = \dfrac{1}{n^2}.n.\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{na^2}$,
la variable aléatoire centrée réduite associée à M_n est :

$$\frac{M_n - E(M_n)}{\sigma(M_n)} = (M_n - \frac{1}{a}) \times a\sqrt{n} = \sqrt{n}.(aM_n - 1) = T_n$$

C'est donc bien la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, réduite.

b) Du résultat précédent, on déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(-2 \leqslant T_n \leqslant 2) = \Phi(2) - \Phi(-2)$, où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Or d'après les propriétés de Φ :

$\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$, donc $\Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \geqslant 2 \times 0,975 - 1 = 0,95$,

et par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(-2 \leqslant T_n \leqslant 2) \geqslant 0,95$.

Or en travaillant sur la probabilité $\mathbb{P}(-2 \leqslant T_n \leqslant 2)$, on peut la réécrire :

$$\mathbb{P}\Big(-2 \leqslant \sqrt{n}(aM_n - 1) \leqslant 2\Big) = \mathbb{P}\Big(-\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant aM_n - 1 \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}} \leqslant aM_n \leqslant \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}}\Big)$$
$$= \mathbb{P}\Big(\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}\Big)$$

Et ainsi : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n} \leqslant a \leqslant \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}\Big) \geqslant 0,95$,

ce qui prouve bien que l'intervalle $\Big[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n}; \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}\Big]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.

★ ★ ★ **FIN DU SUJET** ★ ★ ★