MATHÉMATIQUES - Ecricome E 2020

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

Soit a un réel ; on pose $M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$.

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Ici, $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

   d'où : $\quad (M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1+0-1 & 0+0+0 & -1+0+1 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 1+0-1 & 0+0+0 & -1+0+1 \end{pmatrix} = 0_3 \quad$ (matrice nulle).

2. Le résultat précédent signifie que $P(X) = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de la matrice M : on sait alors d'après le cours, que les valeurs propres de M sont toutes à chercher *parmi* les racines de $P(X)$.

   Comme $P(X) = (X-1)^2$ a évidemment pour seule racine 1, on en conclut que $\lambda = 1$ est la seule valeur propre possible de M.

3. Comme 0 ne fait pas partie des valeurs propres potentielles de M, $M - 0.I_3 = M$ est donc bien inversible.

   Pour savoir si M est diagonalisable : il est clair que $M - I_3$ calculée ci-dessus est non-inversible, car elle possède une colonne nulle ; $\lambda = 1$ est donc effectivement valeur propre de M, et c'est la seule.

   Le rang de $M - I_3$ est par ailleurs clairement égal à 1, à cause d'une deuxième colonne nulle et d'une troisième colonne proportionnelle à la première qui n'est pas nulle.

   Le théorème du rang permet d'en déduire que le sous-espace propre associé à M pour la seule valeur propre 1 est de dimension $3 - 1 = 2 \neq 3$, ce qui suffit pour affirmer que M n'est *pas* diagonalisable.

Partie B : Étude du cas où $a = 0$.

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. On a donc $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Comme ses trois colonnes sont égales ou opposées (et non nulles), alors il est clair que $M - I_3$ est non-inversible, donc que $\lambda = 1$ est valeur propre de M.

Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ appartient au sous-espace propre associé $E_1(M)$ si et seulement si :

$$MX = 1.X \iff (M - I_3)X = 0_{3,1} \iff x - y - z = 0 \iff x = y + z$$

Les trois lignes du système sont identiques : il y a une inconnue principale et deux variables libres, et

$$E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big)$$

On a ainsi obtenu une famille génératrice de $E_1(M)$ formée de deux vecteurs non colinéaires : $\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big)$ est une base de $E_1(M)$, et $\dim E_1(M) = 2$ (ce qui est cohérent avec le théorème du rang et le fait que $\text{rg}(M - I_3) = 1$).

5. La matrice M vérifie un critère évident de non-inversibilité : la somme des éléments de chaque ligne est toujours nulle, ce qui garantit que $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, situation impossible en cas d'inversibilité.

   On en déduit que 0 est valeur propre de M, et que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

6. Si on fait le bilan des résultats déjà obtenus jusqu'ici :
   - 1 est valeur propre de M, et le sous-espace propre associé est de dimension 2.
   - 0 est valeur propre de M, et le sous-espace propre associé est de dimension supérieure ou égale à 1.

   La somme des dimensions des deux sous-espaces propres déjà connus est donc supérieure ou égale à 3.

   Or

   D'après le théorème spectral, la somme des dimensions de tous les sous-espaces propres de M est inférieure ou égale à 3.

   Donc :
   - $\dim E_0(M) + \dim E_1(M) = 3$, $\dim E_0(M) = 1$, $\dim E_1(M) = 2$ et M n'a pas d'autre valeur propre que 0 et 1.
   - M est diagonalisable, semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1.

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1,1,1)$, $v = (1,0,1)$ et $w = (1,1,0)$.

7. La famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une famille de trois vecteurs d'un espace de dimension 3 : il suffit donc de prouver que c'est une famille libre, pour que ce soit une base de l'espace.

   Soient donc trois réels x, y, z tels que : $x.u + y.v + z.w = 0_{\mathbb{R}^3}$, qui donne le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ z = 0 \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases} \iff y = z = 0 = x$$

La famille $\mathcal{B}'$ est bien libre, et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

8. On calcule assez facilement $f(u)$ et $f(v)$ en passant par la représentation matricielle de f et de ces deux vecteurs dans la base canonique :
   - $f(u)$ est ainsi représenté dans $\mathcal{B}$ par $M \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}$, ce qui permet de conclure directement que $f(u) = (a,a,a) = a.(1,1,1) \iff \boxed{f(u) = a.u}$.
   - $f(v)$ est de même représenté dans $\mathcal{B}$ par $M \times \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, ce qui permet de conclure que $f(v) = (1,0,1) \iff \boxed{f(v) = v}$.

9. Toujours selon le même principe : $f(w)$ est représenté dans $\mathcal{B}$ par $M \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+1\\1\\a\end{pmatrix}$, donc $f(w) = (a+1,1,a)$.

   On cherche alors comme demandé, deux réels α et β tels que :
$$f(w) = \alpha.v + \beta.w \iff (a+1,1,a) = (\alpha+\beta,\beta,\alpha) \iff \alpha = a \quad \text{et} \quad \beta = 1$$
   par identification des coefficients, on trouve bien un unique couple solution, et $\boxed{f(w) = a.v + w}$.

10. Les trois images calculées aux deux questions précédentes permettent alors d'écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (u,v,w)$:
$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \end{array}$$

11. La matrice T est (comme son nom le suggérait d'ailleurs), triangulaire : ses valeurs propres sont donc ses éléments diagonaux, et ce sont aussi les valeurs propres de f et de M :
$$\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(M) = \{1; a\}$$
   Comme $a \neq 1$: $\quad T - a.I_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 1-a\end{pmatrix}$ est une matrice de rang 2 puisqu'une de ses colonnes est nulle, et que les deux autres sont non proportionnelles.

   On en déduit, d'après le théorème du rang, que :
$$\dim E_a(T) = 3 - 2 = 1 = \dim E_a(f) = \dim E_a(M)$$
   (la dimension du sous-espace propre ne change pas selon la base dans laquelle on représente l'endomorphisme f).

   De même : $\quad T - 1.I_3 = \begin{pmatrix}a-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ est une matrice de rang 2, puisqu'une de ses colonnes est nulle et que les deux autres sont non proportionnelles.

   Le théorème du rang s'applique encore, qui affirme que :
$$\dim E_1(M) = 3 - 2 = 1 = \dim E_1(f) = \dim E_1(M)$$

Les réels a et 1 étant les seules valeurs propres de f, on a alors :
$$\dim E_a(M) + \dim E_1(M) = 1 + 1 = 2 < 3$$
Lorsque a est différent de 0 et de 1, la matrice M n'est donc *pas* diagonalisable.

Exercice 2

On ne pourra pas s'empêcher ici de faire le lien avec l'exercice 2 du sujet EML E 2002 : on étudie la même fonction, en changeant un peu l'ordre des questions !

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1} \mathrm{d}t.$$

Partie A : Étude de la fonction f_n.

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. C'est une question de cours souvent mal maîtrisée par les candidats : la fonction $g : \ x \mapsto \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions polynômiales qui le sont, avec $x+1 \neq 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

   Cette seule hypothèse suffit pour affirmer que la fonction f_n définie sous sa forme intégrale ci-dessus, est La primitive de g sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0 : à ce titre, f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et on obtient sans calcul,

$$\forall x \geqslant 0, \quad f_n'(x) = g(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$$

2. Les variations de f_n dépendent du signe de sa dérivée :
   sur $\mathbb{R}_+$, $x+1>0$ donc $f_n'(x) \geqslant 0 \iff x^{2n}-1 \geqslant 0 \iff x^{2n} \geqslant 1 \iff x \geqslant 1$ (on ne travaille qu'avec des réels positifs).

   La fonction f_n est donc strictement décroissante sur $[0;1]$, puis strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

3. La fonction $f_n' = g$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions qui le sont, donc f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, avec :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f_n''(x) = \frac{2nx^{2n-1}(x+1)-(x^{2n}-1).1}{(x+1)^2} = \frac{2nx^{2n}+2nx^{2n-1}-x^{2n}+1}{(x+1)^2} = \frac{(2n-1)x^{2n}+2nx^{2n-1}+1}{(x+1)^2}$$

   Il est alors clair que pour tout $x \geqslant 0$ (et sachant que $n \geqslant 1$) : $\quad f_n''(x) \geqslant 0$ comme somme de termes tous positifs ; le critère pour les fonctions de classe C^2 assure alors que f_n est une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$.

4. a) Méthode basique, mais efficace : on démontre l'inégalité demandée en étudiant le signe de la fonction différence.

   Soit la fonction $h : \ t \mapsto t^{2n}-1-n(t^2-1)$, bien définie et dérivable sur $[1;+\infty[$ comme fonction polynômiale.

   $\forall t \geqslant 1 : \quad h'(t) = 2n.t^{2n-1}-2nt = 2n(t^{2n-1}-t)$. Comme $t \geqslant 1$ et $2n-1 \geqslant 1$ puisque $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall t \in [1,\infty[$, $t^{2n-1} \geqslant t$, ce qui implique : $\quad \forall t \in [1;+\infty[$, $h'(t) \geqslant 0$.

   La fonction h est donc croissante sur $[1;+\infty[$, par conséquent elle admet un minimum sur $[1;+\infty[$ en $t=1$ qui vaut $h(1) = 1^{2n}-1-n(1^2-1) = 0$, et donc :

$$\forall t \in [1;+\infty[, \quad h(t) \geqslant 0 \iff \forall t \in [1;+\infty[, \ t^{2n}-1 \geqslant n(t^2-1)$$

   b) De l'inégalité démontrée précédemment on déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1;+\infty[$:

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geqslant n\frac{t^2-1}{t+1} = n\frac{(t-1)(t+1)}{t+1} \iff \frac{t^{2n}-1}{t+1} \geqslant n(t-1)$$

selon l'identité remarquable bien connue (!).

Les deux fonctions concernées sont bien définies et continues sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, donc par *croissance de l'intégrale*, pour tout $x \geqslant 1$:

$$\int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x n(t-1)\mathrm{d}t \iff f_n(x) - f_n(1) \geqslant n\Big[(t-1)^2\Big]_1^x \iff f_n(x) \geqslant f_n(1) + n(x-1)^2$$

c) Puisque $n \geqslant 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(1) + \dfrac{n}{2}(x-1)^2 = +\infty$, et le théorème de comparaison des limites assure, grâce à l'inégalité précédente, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

5. Par définition même, on a bien sûr $f_n(0) = \displaystyle\int_0^0 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = 0$ (les bornes de l'intégrale sont confondues).

Comme la fonction f_n est strictement décroissante sur $[0;1]$, cela suffit pour pouvoir affirmer que :

$$f_n(1) < f_n(0) \iff f_n(1) < 0.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: sur $[1;+\infty[$, la fonction f_n est continue, strictement croissante et change de signe puisque $f_n(1) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

Le *théorème de la bijection* assure donc que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n sur $[1;+\infty[$.

Comme $f_n(1) \neq 0$, alors $x_n \neq 1$ et donc $x_n > 1$.

Partie B : Étude d'une suite implicite.

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation $f_n(x) = 0$.

L'énoncé admettait que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}-1}{t+1}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^{2n+2}-1-t^{2n}+1}{t+1}\mathrm{d}t && \text{linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^x \frac{t^{2n}(t^2-1)}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^{2n}(t-1)(t+1)}{t+1}\mathrm{d}t && \text{factorisation, identité remarquable} \\ &= \int_0^x (t^{2n+1}-t^{2n})\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2} - \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x \\ &= \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - 0 = x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

8. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout réel $x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$: $\quad \dfrac{x}{2n+2} \geqslant \dfrac{1}{2n+1} \iff \dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1} \geqslant 0$ et par produit avec $x^{2n+1} > 0$, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0 \iff f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x).$$

b) Le résultat admis au début de cette partie permet alors d'écrire l'inégalité qu'on vient de démontrer, avec $x = x_n$, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_{n+1}(x_n) \geqslant f_n(x_n) \iff f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$$

Par définition même de x_n.

c) On a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ (à chaque fonction son unique racine !), donc d'après le résultat précédent, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1})$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ qui contient x_n et x_{n+1}, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \geqslant x_{n+1}$$

et la suite (x_n) est bien décroissante ; puisque $x_n \in [1; +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite (x_n) est également minorée par 1 : elle est donc convergente, d'après le théorème de limite monotone.

9. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on sait déjà que $f_n(1) \leqslant 0$, montrons que $f_n(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t+1} \mathrm{d}t \geqslant -\ln(2)$.

On remarque pour cela qu'on peut écrire, par linéarité de l'intégrale :

$$f_n(1) = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1} \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{t+1} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1} \mathrm{d}t - \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1} \mathrm{d}t - \ln(2)$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1} \mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[0; 1]$, avec $0 < 1$: par positivité de l'intégrale, cette intégrale est positive et $f_n(1) \geqslant -\ln(2)$.

b) L'inégalité obtenue en 4.b) peut alors être réécrite en remplaçant x par x_n, qui appartient bien à son domaine de validité $[1; +\infty[$, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 = f_n(x_n) \geqslant f_n(1) + \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \leqslant -f_n(1) \leqslant \ln(2)$$

d'après l'inégalité précédente ; par transitivité, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (x_n - 1)^2 \leqslant \frac{2\ln(2)}{n} \iff |x_n - 1| \leqslant \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}} \Longrightarrow 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}$$

par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, et parce que $x_n \in [1; +\infty[$
(donc $x_n - 1 \geqslant 0$ et $|x_n - 1| = x_n - 1$).

Puisque $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}} = 0$, le théorème d'encadrement permet de conclure :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n - 1 = 0 \iff \lim_{n \to +\infty} x_n = 1$$

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables.

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.
L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad G_n(x, y) = f_n(x) \times f_n(y)$$

10. Rédigeons très proprement : les fonctions coordonnées $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$ sont de classe C^2 (polynômiales en les variables x et y) sur le domaine $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction d'une variable f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$: par composition, $(x, y) \mapsto f_n(x)$ et $(x, y) \mapsto f_n(y)$ sont de classe C^2 sur D.
La fonction G_n est donc de classe C^2 sur D comme produit de fonctions qui le sont.

Pour tout (x, y) élément de D :

$$\partial_1(G_n)(x, y) = f_n'(x) \times f_n(y) \quad \text{et} \quad \partial_2(G_n)(x, y) = f_n(x) \times f_n'(y)$$

11. Les points critiques de G_n sont alors les couples (x,y) de D tels que :

$$\begin{cases} \partial_1(G_n)(x,y) & = 0 \\ \partial_2(G_n)(x,y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f_n'(x).f_n(y) & = 0 \\ f_n(x).f_n'(y) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f_n'(x) = 0 \text{ ou } f_n(y) = 0 \\ f_n(x) = 0 \text{ ou } f_n'(y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \text{ ou } y = x_n \\ x = x_n \text{ ou } y = 1 \end{cases}$$

Les combinaisons de valeurs possibles pour x et y, sachant que $x_n \neq 1$, sont donc :

$$(1,1) \quad \text{et} \quad (x_n, x_n)$$

qui appartiennent bien à D, et sont donc les deux seuls points critiques de G_n sur ce domaine.

12. Pour tout (x,y) élément de D :

$$\partial^2_{1,1}(G_n)(x,y) = f_n''(x).f_n(y), \quad \partial^2_{2,2}(G_n)(x,y) = f_n(x).f_n''(y)$$

$$\partial^2_{1,2}(G_n)(x,y) = f_n'(x).f_n'(y) = \partial^2_{2,1}(G_n)(x,y) \quad \text{(théorème de Schwarz)}$$

On rappelle que : $f_n(x_n) = 0,\ f_n'(1) = 0,\ f_n''(1) = \dfrac{(2n-1)+2n+1}{(1+1)^2} = \dfrac{4n}{4} = n$, donc :

la Hessienne de G_n en (x_n, x_n) est $H_{(x_n,x_n)} = \begin{pmatrix} 0 & (f_n'(x_n))^2 \\ (f'(x_n))^2 & 0 \end{pmatrix}$.

Et la Hessienne de G_n en $(1,1)$ est $H_{(1,1)} = \begin{pmatrix} n.f_n(1) & 0 \\ 0 & n.f_n(1) \end{pmatrix}$,

13. Les valeurs propres de la Hessienne $H_{(x_n,x_n)}$ sont les réels λ pour lesquels :

$$H_{(x_n,x_n)} - \lambda.I_2 \text{ est non-inversible } \iff \det(H_{(x_n,x_n)} - \lambda.I_2) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} -\lambda & (f_n'(x_n))^2 \\ (f_n'(x_n))^2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \lambda^2 - (f_n'(x_n))^4 = 0 \iff \lambda = (f_n'(x_n))^2 \text{ ou } \lambda = -(f_n'(x_n))^2$$

Puisque $x_n > 1$, alors $f_n'(x_n) > 0$ et $H_{(x_n,x_n)}$ admet donc deux valeurs propres distinctes opposées : la fonction G_n n'admet donc pas d'extremum en ce point (qui est plutôt un point-selle).

14. La Hessienne $H_{(1,1)}$ est déjà une matrice diagonale : ses valeurs propres se lisent donc sur la diagonale, on trouve donc $n.f_n(1) < 0$ comme seule valeur propre. On conclut donc qu'au point $(1,1)$, la fonction G_n admet un extremum local et c'est un maximum local.

Exercice 3

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose : $\quad I_n(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t.$

   On sait déjà, d'après le cours, que $I_n(a)$ est une intégrale de Riemann d'exposant $n \geqslant 2 > 1$, donc convergente. Pour calculer sa valeur, on rappelle que :

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty} \int_a^X \frac{1}{t^n}\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty} \left[-\frac{1}{(n-1).t^{n-1}}\right]_a^X = \lim_{X\to+\infty} -\frac{1}{(n-1)X^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)a^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$$

   puisque $n-1 \geqslant 1 > 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geqslant a \end{cases}.$

   a) La fonction f est positive sur $]-\infty; a[$ comme constante nulle, et positive sur $[a; +\infty[$ comme quotient de réels positifs puisque $a > 0$ (et $t \geqslant a > 0$ dans ce cas) : f est positive sur tout $\mathbb{R}$.
   La fonction f est continue sur $]-\infty; a[$ comme fonction constante, et continue sur $]a; +\infty[$ comme fonction de référence (puissance inverse) multipliée par des constantes : f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en a.
   Sous réserve de convergence : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} 0 \ \mathrm{d}t + 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4}\mathrm{d}t = 3a^3.I_4(a) = \frac{3a^3}{3a^3} = 1,$
   ce qui achève de démontrer que f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

   b) Par définition : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$ On distingue deux cas :

   - Si $x < a$: alors $]-\infty; x] \subset]-\infty; a[$, intervalle sur lequel f est nulle, donc $\boxed{F_X(x) = 0}$.
   - Pour tout $x \geqslant a$: $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{a} 0 \ \mathrm{d}t + \int_a^x \dfrac{3a^3}{t^4}\mathrm{d}t = 3a^3.\left(-\dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{3a^3}\right),$

     soit $\boxed{F_X(x) = 1 - \dfrac{a^3}{x^3}}$

     d'après le calcul d'intégrale déjà fait à la question 1, en remplaçant n par 4 et X par x.

   c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
   Comme la fonction $t :\mapsto t.f(t)$ est nulle sur $]-\infty; a[$, positive sur $[a; +\infty[$ (produit de deux facteurs positifs) puisque $t \geqslant a > 0$), il suffit alors de prouver la convergence simple de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} t.\frac{3a^3}{t^4}\mathrm{d}t = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = 3a^3.I_3(a).$
   Or on sait d'après 1. que $I_3(a)$ converge puisque $3 \geqslant 2$: la variable aléatoire X admet une espérance qui vaut

$$E(X) = 3a^3.\frac{1}{2a^2} = \frac{3a}{2}$$

   d) La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2 : d'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Là encore, pour les mêmes raisons, cela revient à prouver la convergence simple de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^2.f(t)\mathrm{d}t = 3a^3\int_a^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = 3a^3.I_2(a)$.

Là encore, l'intégrale $I_2(a)$ converge, et X admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$E(X^2) = \frac{3a^3}{1.a^1} = 3a^2$$

La variable aléatoire X admet donc une variance, donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3a^2 - \frac{9a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \qquad CQFD.$$

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0;1]$; on pose : $\quad Y = \dfrac{a}{U^{1/3}}$.

   a) On sait que $U(\Omega) =]0;1]$, donc $U^{1/3}$ est presque-sûrement encore à valeurs dans $]0;1]$: par inverse, $\dfrac{1}{U^{1/3}}$ est presque-sûrement à valeurs dans $[1;+\infty[$, et $Y = \dfrac{a}{U^{1/3}}$ est presque-sûrement à valeurs dans $[a;+\infty[$ qu'on note donc $Y(\Omega)$.

   De ce résultat on déduit immédiatement que pour tout réel $x < a$, $]-\infty;x] \cap Y(\Omega) = \varnothing$, donc $F_Y(x) = 0$ pour tout $x < a$.

   Pour tout réel $x \geqslant a$:

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}\Big(\frac{a}{U^{1/3}} \leqslant x\Big) = \mathbb{P}\big(\frac{a}{x} \leqslant U^{1/3}\big) = \mathbb{P}\big(\frac{a^3}{x^3} \leqslant U\big)$$

   par stricte croissance et continuité de la fonction cube sur $\mathbb{R}$. Comme ici $x \geqslant a$, alors $\dfrac{a^3}{x^3} \in]0;1]$, et on peut donc finir le calcul :

$$F_Y(x) = 1 - F_U\big(\frac{a^3}{x^3}\big) = 1 - \frac{a^3}{x^3} = F_X(x) \qquad \text{puisque } F_U(t) = t \text{ pour tout } t \in]0;1]$$

   On a donc démontré que les fonctions de répartition des variables aléatoires X et Y sont identiques sur tout $\mathbb{R}$: X et Y suivent bien la même loi.

   b) On en déduit que pour simuler X, il suffit de simuler Y qui elle-même utilise U de loi uniforme sur $]0;1]$ qui est à son tour simulée par l'appel `rand()`, d'où le script :

```
function Y = simulX(a,m,n)
    U = rand(m,n)    // matrice de taille m x n contenant mn simulations de la loi de U
    Y = a*U.^(-1/3)  // opération terme à terme : ne surtout pas oublier le "."
endfunction
```

   et c'est tout !

4. a) $\mathbb{P}(X > 2a) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 2a) = 1 - F_X(2a) = 1 - \Big(1 - \dfrac{a^3}{(2a)^3}\Big) = 1 - 1 + \dfrac{a^3}{8a^3} = \dfrac{1}{8}$.

   b) Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{[X>2a]}(X > 6a) = \frac{\mathbb{P}\big([X > 2a] \cap [X > 6a]\big)}{\mathbb{P}(X > 2a)} = \frac{\mathbb{P}(X > 6a)}{\mathbb{P}(X > 2a)}$$

   puisqu'en effet, $[X > 6a] \subset [X > 2a]$ vu que $6a > 2a$,

   et où $\mathbb{P}(X > 6a) = 1 - \Big(1 - \dfrac{a^3}{(6a)^3}\Big) = \dfrac{a^3}{216a^3} = \dfrac{1}{216}$, donc :

$$\mathbb{P}_{[X>2a]}(X > 6a) = \frac{1/216}{1/8} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$$

c) Le script ci-dessous doit calculer, sur un échantillon de 100000 simulations de X, une valeur approchée de $\mathbb{P}_{[X>2a]}(X>6a) = \dfrac{\mathbb{P}(X>6a)}{\mathbb{P}(X>2a)}$ comme le rapport entre les fréquences de réalisation des événements $[X>6a]$ et $[X>2a]$:

comme $\dfrac{f_{[X>6a]}}{f_{[X>2a]}} = \dfrac{\dfrac{\text{Nb d'occurrences de } [X>6a]}{100000}}{\dfrac{\text{Nb d'occurrences de } [X>2a]}{100000}} = \dfrac{\text{Nb d'occurrences de } [X>6a]}{\text{Nb d'occurrences de } [X>2a]}$, il suffit de compter (à l'aide de la variable `n1`) s le nombre de fois où en 100000 simulations, $[X>2a]$ est réalisé, et *dans ce cas/parmi celles-ci* on compte à l'aide de la deuxième variable `s2`, le nombre de fois où $[X>6a]$ est réalisé. Le résultat rendu est donc censé être proche de $\dfrac{1}{27}$ (et ce d'ailleurs, quelle que soit la valeur choisie pour a).

```
a=10
N=100000
s1=0
s2=0
X = simul(a,1,N)  // vecteur-ligne de 100000 simulations de la loi de X
for k=1:N
    if X(k) > 2*a then
        s1 = s1+1
        if X(k) > 6*a then
            s2 = s2+1
        end
    end
end
if s1>0 then
    disp(s2/s1)
end
```

À l'exécution, on obtient bien des valeurs proches de 0.037, donc de 1/27.

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a.
Soit n un entier naturel non nul, et $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

5. On pose $V_n = \dfrac{2}{3n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

a) La variable aléatoire V_n est une fonction de variables aléatoires dont la loi commune dépend de a, sans que a n'intervienne explicitement dans la définition de V_n : il s'agit bien d'un estimateur de a.

Puisque X admet une espérance, alors il en est de même de toutes les variables aléatoires $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$: par linéarité de l'espérance, V_n admet donc une espérance qui vaut :

$$E(V_n) = \frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n}\frac{3a}{2} = \frac{2}{3n}\times n\times\frac{3a}{2} = a$$

ce qui prouve bien que V_n est un estimateur sans biais du paramètre a.

b) Les variables aléatoires $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ admettent chacune une variance (la même que celle de X) et sont mutuellement indépendantes, donc V_n admet elle-même une variance qui vaut :

$$V(V_n) = \left(\frac{2}{3n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{4}{9n^2}\times n\times\frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{3n}$$

Comme V_n est un estimateur sans biais, ce dernier résultat est aussi la valeur de son risque quadratique.

6. On pose $W_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Pour tout réel x, on calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_n > x) &= \mathbb{P}\big(\min(X_1, \ldots, X_n) > x\big) = \mathbb{P}\big([X1 > x] \cap \ldots \cap [X_n > x]\big) \\
&= \mathbb{P}(X_1 > x) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_n > x) \qquad \text{les } (X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \text{ sont indépendantes} \\
&= \big(\mathbb{P}(X > x)\big)^n \qquad \text{les } (X_k)_{1 \leqslant k \leqslant N} \text{ suivent la même loi que } X \\
&= \big(1 - F_X(x)\big)^n
\end{aligned}$$

et donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{W_n}(x) = 1 - \mathbb{P}(W_n > x) = 1 - \Big(1 - \big(F_X(x)\big)\Big)^n = \begin{cases} 1 - 1^n = 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \big(\dfrac{a^3}{x^3}\big)^n = 1 - \dfrac{a^{3n}}{x^{3n}} & \text{si } x \geqslant a \end{cases}$.

La relation : $\forall x \in \mathbb{R}, \ F_{W_n}(x) = 1 - \Big(1 - \big(F_X(x)\big)\Big)^n$ suffit pour pouvoir affirmer que par opérations sur de telles fonctions, F_{W_n} est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sauf peut-être en a, comme F_X ; ainsi, W_n est bien une variable à densité.

b) Une densité f_n de W_n est alors obtenue par dérivation de F_{W_n}, sauf en a où on choisit une valeur arbitraire positive :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ -a^{3n}.\Big(-\dfrac{3n}{t^{3n+1}}\Big) = \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geqslant a \end{cases}$$

c) La variable aléatoire W_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t.f_n(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Comme la fonction $t \mapsto t.f_n(t)$ est nulle sur $]-\infty; a[$ et positive sur $[a; +\infty[$, il suffit de prouver la convergence simple de :

$$\int_a^{+\infty} t.\frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}}\mathrm{d}t = 3na^{3n} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{3n}}\mathrm{d}t = 3na^{3n}.I_{3n}(a)$$

On reconnaît une intégrale étudiée à la question 1. avec $3n \geqslant 1$: elle converge, donc W_n admet une espérance qui vaut :

$$E(W_n) = 3na^{3n}.I_{3n}(a) = \frac{3na^{3n}}{(3n-1)a^{3n-1}} = \frac{3n}{3n-1}.a$$

On en déduit, par linéarité de l'espérance, que :

$$E\Big(\frac{3n-1}{3n}.W_n\Big) = \frac{3n-1}{3n}.E(W_n) = \frac{3n-1}{3n}.\frac{3n}{3n-1}.a = a$$

Et donc qu'avec $\lambda_n = \dfrac{3n-1}{3n}$, $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais de a.

d) On cherche la variance de W_n : comme précédemment on commence par calculer son moment d'ordre 2, qui existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.f_n(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
Une fois de plus, on est ramené à étudier la convergence simple de l'intégrale impropre :
$\displaystyle\int_a^{+\infty} t^2.f_n(t)\mathrm{d}t = 3na^{3n} \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{3n-1}}\mathrm{d}t = 3na^{3n}.I_{3n-1}(a).$

Puisque $n \geqslant 1$, alors $3n-1 \geqslant 2$ donc l'intégrale converge, et W_n admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$E(W_n^2) = \frac{3na^{3n}}{(3n-2)a^{3n-2}} = \frac{3n}{3n-2}.a^2$$

On en déduit que W_n admet une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(W_n) = E(W_n^2) - E(W_n)^2 = \frac{3n}{3n-2}.a^2 - \frac{(3n)^2}{(3n-1)^2}.a^2 = \frac{3n(3n-1)^2 - (3n-2).(3n)^2}{(3n-2)(3n-1)^2}.a^2$$

L'estimateur $\lambda_n W_n$ étant sans biais, son risque quadratique est aussi sa variance, qui vaut :

$$V(\lambda_n W_n) = (\lambda_n)^2.V(W_n) = \frac{(3n-1)^2}{(3n)^2}.\frac{3n\big((3n-1)^2 - 3n(3n-2)\big)}{(3n-2)(3n-1)^2}.a^2 = \frac{9n^2-6n+1-9n^2+6n}{3n(3n-2)}.a^2$$

$$= \frac{a^2}{3n(3n-2)}$$

Remarque : ce risque quadratique est donc négligeable devant celui de V_n : W_n est en cela, un meilleur estimateur de a que V_n.

7. a) Il faut bien comprendre dans les deux questions qui suivent, l'intérêt d'avoir créé une matrice de format $m \times n$ avec la fonction `simulX` : on peut les voir comme m échantillons de n simulations de X, rangés ligne par ligne. Dans le script ci-dessous, on calcule donc à chaque fois la somme de tous les éléments d'une ligne de la matrice, en n'oubliant pas le facteur $\frac{2}{3n}$, ce qui donne à chaque fois une simulation de V_n :

```
function V = simulV(a,m,n)
    X = simulX(a,m,n)
    V = zeros(1,m)
    for k = 1:m
        V(k) = 2/(3*n)*sum(X(k,:))
    end
endfunction
```

b) On prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

```
W = simulW(5,20,100)
V = simulV(5,20,100)
plot2d(W,style=-1)   // les +
plot2d(V,style=-2)   // les x
```

Le graphique affichant 20 points pour chaque nuage, on a pris $m = 20$; l'un des deux nuages de points se concentre fortement autour de la valeur 5, il correspond donc à des simulations de $\lambda_n W_n$, qui est le meilleur des deux estimateurs, et on peut considérer que $a = 5$ ici.
L'estimateur V_n donne, lui, des valeurs plus dispersées autour de cette même valeur.
Pour le plaisir, on donne ci-dessous le script qui permettait de créer le nuage de points représentant un échantillon de l'estimateur $\lambda_n W_n$:

```
function W = simulW(a,m,n)
    X = simulX(a,m,n)
    W = zeros(1,m)
    for k = 1:m
        W(k) = (3*n-1)/(3*n)*min(X(k,:))
    end
endfunction
```