

EXERCICE 1

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}.$$

1. Recopier et compléter les trois lignes incomplètes du script Scilab ci-dessous pour qu'il calcule u_n pour n entier naturel entré par l'utilisateur :

```
n = input('Entrer n : ')
u = 0 ; v = 1
for k = .....
    w = u
    u = .....
    v = .....
end
disp(u)
```

2. Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique de raison 8. En déduire l'expression de s_n en fonction de n .
3. On pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = (-1)^n u_n \quad \text{et} \quad t_n = v_n - v_{n+1}.$$

- (a) Exprimer t_n en fonction de s_n pour tout entier naturel n .
 - (b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a $t_n = (-8)^n$.
4. Soit n un entier naturel non nul.
 - (a) Calculer la somme $\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i$.
 - (b) Justifier que : $\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = -v_n$.
 - (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}.$$

Partie B

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme $Q(X) = X^2 - 7X - 8$ est un polynôme annulateur de M .
2. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et de I .
- 3.(a) On pose : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Vérifier que : $M^0 = a_0M + b_0I$.
- (b) Déterminer deux réels a_1 et b_1 tels que : $M^1 = a_1M + b_1I$.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_nM + b_nI$. Prouver alors que :

$$M^{n+1} = a_n(7M + 8I) + b_nM$$

En déduire deux réels a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n tels que $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$.

- (d) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = u_n,$$

où (u_n) est la suite définie dans la Partie A.

Partie C

Soient X et Y deux variables aléatoires pour lesquelles on suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	2β	3β	3β
2	3β	2β	3β
3	3β	3β	2β

1. Déterminer la valeur du réel β pour que ce tableau représente effectivement la loi du couple (X, Y) .
2. Reconnaître les lois marginales de X et Y . En déduire les espérances $E(X)$ et $E(Y)$.
- 3.(a) Vérifier que la covariance de X et Y est donnée par :

$$\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{12}.$$

- (b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 2

Partie A

1. Justifier que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, d'inconnue réelle x , n'admet aucune solution. ✓

On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f .

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. ✓
3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de f . ✓
On remarquera en particulier que f est croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$. ✓
- 4.(a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0. ✓
(b) Montrer que pour tout réel x de $[-1, +\infty[$, on a : $f(x) \leq x$. ✓
Donner une interprétation graphique de ce résultat. ✓
5. Tracer l'allure de $(\mathcal{C}_f)$ et (T) dans un repère orthonormé. ✓
On soignera en particulier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (T) . ✓

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}.$$

1. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}.$$

2. Montrer, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et préciser sa limite.
4. Recopier et compléter le script du programme Scilab suivant, pour qu'il affiche le plus petit entier naturel non nul n tel que $u_n \leq 1/1000$.

```
function y=f(x)
    y = x/(1+x+x^2)
endfunction
u = .....
n = .....
while u .....
    u = .....
    n = .....
end
disp(.....)
```

Partie C

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

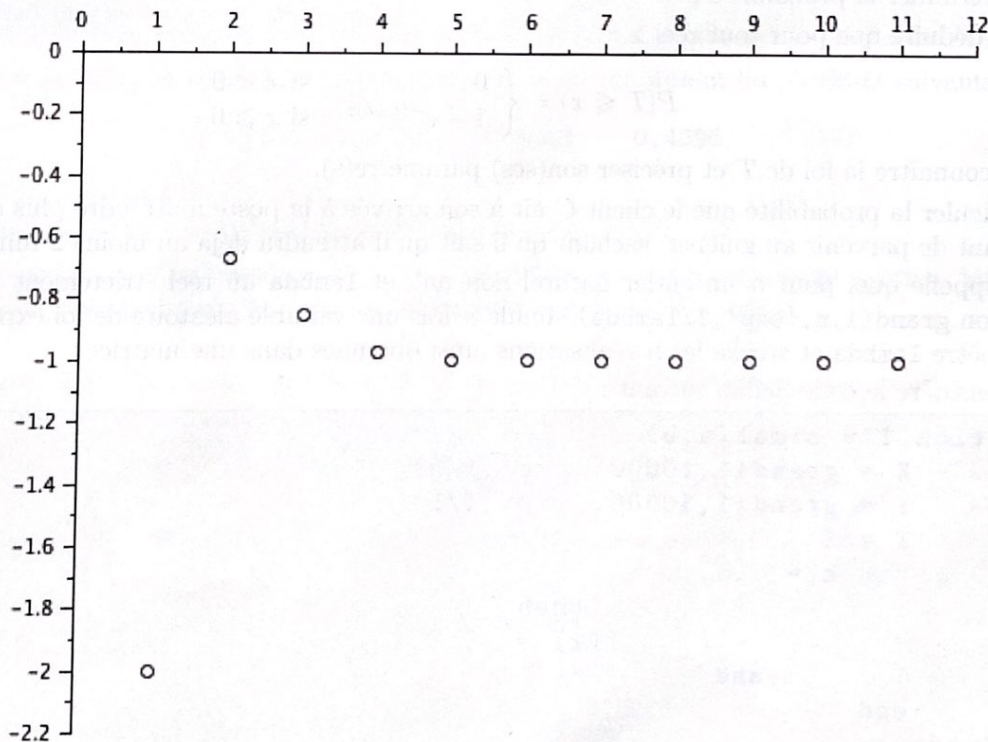
$$v_1 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1 + v_n + v_n^2}.$$

1. En utilisant la question 3 de la Partie A, démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 2, \quad -1 \leq v_n \leq 0$$

2. En utilisant la question 4 de la Partie A, montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. À l'aide de Scilab, on trace les premiers termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et on obtient la figure ci-dessous.

Conjecturer alors la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.



- 5.(a) Résoudre l'équation $f(x) = -1$, d'inconnue réelle x .

- (b) Montrer par l'absurde que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \neq -1.$$

EXERCICE 3

Un bureau de poste dispose de deux guichets. Trois clients notés A, B, C arrivent en même temps. Les clients A et B se font servir tandis que C attend, puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.

On définit les variables aléatoires X, Y, Z égales à la durée en minutes de l'opération des clients A, B et C respectivement lorsqu'ils sont au guichet.

On fixe a et b deux réels strictement positifs, et on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre a , et que Y suit une loi exponentielle de paramètre b .

On suppose enfin que X et Y sont indépendantes.

1. Rappeler l'expression de la fonction de répartition F de X , et donner l'expression d'une densité f de X . Préciser les valeurs de l'espérance et de la variance de X .
2. On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente en minutes du client C avant de parvenir à un des guichets. La variable aléatoire T prend donc **la plus petite** des valeurs prises par X et Y .
 - (a) Expliquer pour tout réel x , l'égalité $[T > x] = [X > x] \cap [Y > x]$.
 - (b) Déterminer la probabilité $P(T > x)$.
 - (c) En déduire que pour tout réel x :

$$P(T \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-(a+b)x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Reconnaître la loi de T et préciser son(ses) paramètre(s).

- (d) Calculer la probabilité que le client C ait à son arrivée à la poste à attendre plus de 5 minutes avant de parvenir au guichet, sachant qu'il sait qu'il attendra déjà au moins 2 minutes.
3. On rappelle que, pour n un entier naturel non nul, et λ un réel strictement positif, l'instruction `grand(1,n,'exp',1/lambda)` simule n fois une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ et stocke les n réalisations ainsi obtenues dans une matrice.

On considère le code Scilab suivant :

```
function T = simul(a,b)
    X = grand(1,10000,'exp',1/a)
    Y = grand(1,10000,'exp',1/b)
    T = X
    for k = .....
        if ..... then
            T(k) = .....
        end
    end
end
endfunction
a = input('a : ')
b = input('b : ')
T = simul(a,b)
```

- (a) Compléter le code de la fonction `simul` pour qu'elle construise une matrice T contenant 10000 réalisations de la variable aléatoire T .
- (b) Laquelle de ces deux instructions est la plus adaptée pour représenter graphiquement la répartition des simulations obtenues pour la variable T par le code Scilab précédent :

`histplot(0:max(T),T)` ou `bar(T)` ?

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $a = b = \frac{1}{2}$, et on suppose que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle, de paramètre 1, la variable aléatoire Z étant indépendante de X et Y . On s'intéresse à $V = T + Z$ qui représente le temps total passé par le client C dans la poste, attente et service compris.

4. On s'intéresse à la fonction Scilab suivante :

```
function f = simul2()
    T = simul(1/2,1/2)
    Z = grand(1,10000,'exp',1)
    n=0
    for k = 1:10000
        if T(k)+Z(k) > 2 then
            n=n+1
        end
    end
    f=n/10000
endfunction
```

On lance la fonction `simul2` plusieurs fois de suite, et on obtient les résultats suivants :

0.4045 0.4151 0.4221 0.4096 0.4188

- Que retourne la fonction `simul2`?
On pourra utiliser la définition de la variable aléatoire V .
- On constate que les résultats renvoyés sont différents mais relativement proches. Sans démonstration, indiquer quel théorème de probabilité assure ce phénomène.

5. On admet que V est encore une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $A > 0$:

$$\int_0^A g(x)dx = 1 - e^{-A} - Ae^{-A}.$$

- Pour tout réel $A > 0$, calculer la valeur de $\int_0^A xg(x)dx$.
- Vérifier que g est bien une densité de probabilité.
- Calculer $P(V \leq 2)$. En déduire la valeur de $P(V > 2)$.
On donne : $e^{-2} \simeq 0,14$. En déduire alors une valeur approchée de $P(V > 2)$.
Le résultat vous semble-t-il cohérent avec les résultats Scilab de la question 4 ?
- Montrer que V admet une espérance et donner sa valeur.