EXEMPLE MAJOR PREPA

1) Prouver qu'une fonction est bien une densité de probabilité

EDHEC 2019 :

Enoncé :

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

Dans cet exercice, θ (theta) désigne un réel élément de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$.

1) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

Corrigé :

Problème

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

Dans cet exercice, θ (theta) désigne un réel élément de $\left]0;\frac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x\geqslant 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$.

1. On vérifie les trois points qui font d'une fonction une densité de probabilité :
   - La fonction f est nulle donc positive sur $]-\infty;1[$, et positive sur $[1;+\infty[$ puisque θ est positif, et x aussi.
   - La fonction f est continue comme fonction constante sur $]-\infty;-1[$, et continue sur $]1;+\infty[$ comme fonction puissance réelle de référence (à un facteur constant près).
   - Enfin, sous réserve de convergence :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1}0\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\theta}x^{-1-\frac{1}{\theta}}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\theta}\left[\frac{x^{-1/\theta}}{-1/\theta}\right]_1^A=\frac{1}{\theta}\times\left(-\theta.A^{-1\theta}+\theta\right)=\frac{1}{\theta}.(0+\theta)=1$$

   En effet, $-\frac{1}{\theta}$ est un exposant négatif donc $\lim\limits_{A\to+\infty}A^{-1/\theta}=0$, et on a bien $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$.

   Les trois points sont vérifiés : f est bien une densité de probabilité.

2) Prouver qu'une fonction est bien une fonction de répartition et calculer la densité associée :

EDHEC 2015

Sujet :

b) Il suffit ici de remarquer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = 1 - \big(1 - F_X(x)\big)^2$, pour pouvoir conclure que F_U est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[,\ ]0,1[$ et $]1, +\infty[$ puisque c'est le cas de F_X.

La variable aléatoire U est donc à densité, et une densité f_U de U est obtenue par dérivation de F_U sauf en 0 et en 1, où on donne à f_U la valeur abitraire 0, de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ 2 - 2x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Corrigé :

b) Il suffit ici de remarquer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = 1 - \big(1 - F_X(x)\big)^2$, pour pouvoir conclure que F_U est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[,\ ]0,1[$ et $]1, +\infty[$ puisque c'est le cas de F_X.

La variable aléatoire U est donc à densité, et une densité f_U de U est obtenue par dérivation de F_U sauf en 0 et en 1, où on donne à f_U la valeur abitraire 0, de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ 2 - 2x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

3) Trouver une fonction de répartition à partir d'une densité de probabilité :

EDHEC 2018

Sujet

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a} e^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

1) Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Corrigé (ici la question 1) montre déjà que f est à densité si ce n'est pas fait, il faut le faire!)

2. La fonction de répartition F_X de X est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

- Pour tout réel x négatif : f est nulle sur $]-\infty, x]$, donc $F_X(x) = 0$.
- Pour tout réel $x > 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{t}{a} e^{-\frac{t^2}{2a}}\mathrm{d}t = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a}}$$

d'après un calcul déjà fait.

Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

4) Minimum et maximum :

EML 2019 (NB : souvent ces deux questions en sont en fait qu'une seule, ici c'était guidé pour simplifier la tâche aux étudiants).

Sujet :

PARTIE B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ.

On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbb{N}^*$ tel que $T_k \leqslant T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $\quad M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.

a. Calculer, pour tout t de $\mathbb{R}^+$, $\mathbf{P}([M_n > t])$.

b. En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbb{R}$.
Reconnaître la loi de M_n et préciser son(ses) paramètre(s).

Corrigé :

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $\quad M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.

a) Pour tout réel t de $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([M_n > t]) &= \mathbb{P}\big(\min(T_1, \ldots, T_n) > t\big) = \mathbb{P}\big([T_1 > t] \cap \ldots \cap [T_n > t]\big) \\
&= \mathbb{P}(T_1 > t) \times \ldots \times \mathbb{P}(T_n > t) \qquad \text{par indépendance des v.a.r. } T_1, \ldots, T_n \\
&= \big(\mathbb{P}(T_1 > t)\big)^n \qquad \text{car les } T_i \text{ suivent toutes la même loi} \\
&= \big(1 - F_{T_1}(t)\big)^n = \begin{cases} \left(e^{-\lambda t}\right)^n & \text{si } t \geqslant 0 \\ 1^n & \text{si } t < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-\lambda.nt} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 1 & \text{si } t < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

b) On en déduit que : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \ F_{M_n}(t) = 1 - \mathbb{P}(M_n > t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda.nt} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

On reconnaît ici la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda.n$, loi que suit donc M_n.