N3-00120
362654
Maths T

Code épreuve : 294

Nombre de pages : 16

Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

$\boxed{1}$ a- On a $\det(A) = 1 \times -1 - 1 \times 1 = 2$, donc $\det(A) > 0$ et P est inversible.

avec $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b- Calculons A^2 : $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

D'où $A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = O_3$

On peut donc en déduire que $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de A. et admet comme racines 0 et 2. Donc 0 et 2 sont les valeurs propres possibles de A.

c- Calculons $U.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.U$, donc 2 est une valeur propre de A associée au vecteur propre U

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Calculons $V.A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.V$, donc 0 est une valeur propre de A associée au vecteur propre V.

d. Calculons d'abord $P^{-1}.A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Maintenons, trouvons $P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Or, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où $P^{-1}.A.P = C$

2) a. Exprimons B par I_2 et A : $B = A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exprimons D par I_2 et C : $D = C + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. D'après la question précédente : $P^{-1}(B - I_2)P = D - I_2$

D'où : $P^{-1}.B.P - I_2 = D - I_2$

Ainsi : $P^{-1}B.P = D$

3) a. Montrons par récurrence que $P^{-1}B^nP = D^n \; \forall n \in \mathbb{N}$:

* Initialisation : Pour $n = 0$, $P^{-1}.B^0.P = I$ et $D^0 = I$ donc vraie.
* Hérédité : Supposons que $P^{-1}B^nP = D^n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, et montrons que c'est vrai pour $(n+1)$

On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$D^m = P^{-1}.D^m P$

Donc : $D^m.D = P^{-1}.D^m.P.D$

Ainsi : $D^{m+1} = P^{-1}.D^m.P.P^{-1}.D^m.P$

$= P^{-1}.D^m.I.D.P$

$= P^{-1}.D^m.D.P$

$= P^{-1}.D^{m+1}.P$

D'où propriété vraie pour $(n+1)$

* Conclusion : $\forall m \in \mathbb{N}$, $D^m = P^{-1}B^m P$

b. $D^m = \begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc ses coefficients sont 3^m et 1.

c. On a $P^{-1}.B^m.P = D^m$

Donc $B^m = P^{-1}D^m.P$

Ainsi $B^m = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3^m & -1 \\ -3^m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^m+1 & 3^m-1 \\ 3^m-1 & 3^m+1 \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ a. $a_1 = \frac{2}{3}$ puisque Antoine a le service au premier échange

$b_1 = \frac{1}{3}$ puisque Béatrice n'a pas le service au premier échange.

~~(On a $\{A_1, A_2\}$ système complet d'événements. Donc selon la formule des probabilités totales :)~~

On cherche : $P(A_2) = a_2 = P_{A_1}(A_2).P(A_1) + P_{\bar{A}_1}(A_2).P(\bar{A}_1) = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3}$

$= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

Donc $a_2 = \frac{5}{9}$

b. On cherche à trouver $P_{A_2}(A_1)$. D'après la formule de Bayes :

$$P_{A_2}(A_1) = \frac{P_{A_1}(A_2)\,P(A_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5}$$

Donc la probabilité qu'il ait remporté le premier échange sachant qu'il a emporté le deuxième échange est de $\frac{4}{5}$

c. On a $\{A_n, \bar{A}_n\}$ système complet d'événement. Donc d'après la formule des probabilités totales : $P(A_{n+1}) = a_{n+1} = P_{A_n}(A_{n+1})\,P(A_n) + P_{\bar{A}_n}(A_{n+1})\,P(\bar{A}_n)$

$$= \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} P(B_n)$$

$$= \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n$$

Et de la même manière, on trouve : $b_{n+1} = \frac{2}{3} b_n + \frac{1}{3} a_n$

d. On a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}a_n \end{pmatrix}$

et $\frac{1}{3} B . X_n = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix}$

D'où $\frac{1}{3} B . X_n = X_{n+1}$

e. Montrons par récurrence que $X_n = \frac{1}{3^{n-1}} B^{n-1} X_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$:

$*$ <u>Initialisation</u>. $X_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{3^0} B^0 X_1 = X_1$.

Donc propriété vraie pour $n = 1$.

Code épreuve : 294	Nombre de pages : 16	Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

* Hérédité : Supposons que $X_m = \frac{1}{3^{m-1}} B^{m-1} X_1$ est vraie pour $m \geq 1$ et montrons qu'elle est vraie pour $(m+1)$.

On a $X_{m+1} = \frac{1}{3} B X_m$ D'après 4.d)

D'où $X_{m+1} = \frac{1}{3} B \frac{1}{3^{m-1}} . B^{m-1} . X_1$ D'après hypothèse de récurrence

$= \frac{1}{3^m} . B^m . X_1$

Donc vraie pour $m+1$.

* Conclusion : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $X_m = \frac{1}{3^{m-1}} B^{m-1} X_1$.

f. D'après 3.c) : $B^{m-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{m-1}+1 & 3^{m-1}-1 \\ 3^{m-1}-1 & 3^{m-1}+1 \end{pmatrix}$

Donc $X_m = \frac{1}{3^{m-1}} . B^{m-1} . \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2 . 3^{m-1}} \begin{pmatrix} \frac{2.3^{m-1}+2+3^{m-1}-1}{3} \\ \frac{2.3^{m-1}-2+3^{m-1}+1}{3} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{3^m+1}{2.3^m} \\ \frac{3^m-1}{2.3^m} \end{pmatrix}$

D'où $a_m = \frac{3^m+1}{2.3^m}$ et $b_m = \frac{3^m-1}{2.3^m}$ pour tout $m \geq 1$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5 a. 4. if a == 1 then a = grand(1, 1, 'bin', 1, 2/3)
5. else a = grand(1, 1, 'bin', 1, 1/3)

b. 2. S = 0

7. S = S + a.

Exercice 2.

1 a. $\forall x > 0, \; g'(x) = (x - \ln(x))' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$

b. $g(1) = 1 - \ln(1) = 1$

c. $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} x - \ln(x) = 0 - 0 = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

d. Tableau de variation de g :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

avec $g'(x) > 0$

~~(e) (On a $x > 0$, donc ... > 0, et $1 - \frac{1}{x} > 1$~~

~~Donc $g(x) > 0$~~)

e. D'après le tableau de variations, g est strictement croissante, et croît de 0 à $+\infty$. Donc elle n'est jamais en dessous de l'axe des abscisses.

Ainsi $g(x) > 0$

$\boxed{2}$ a. Pour tout $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{-g'(x)}{(x - \ln(x))^2} = \dfrac{-\frac{x-1}{x}}{(x-\ln(x))^2}$

$= \dfrac{\frac{-x+1}{x}}{(x-\ln(x))^2} = \dfrac{1-x}{x(x-\ln(x))^2}$

b. On a $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{g(x)} = \infty$.

[car limites de $g(x)$ connues.]

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{g(x)} = 0$ d'où f admet une asymptote horizontale aux voisinages de $+\infty$

c. Tableau de variation de f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

car $f'(x) > 0$ sur $]0, 1[$ puisque $x < 1$

$\boxed{3}$ a. On a $f(x) = \dfrac{1}{x - \ln(x)}$

Donc $f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff \dfrac{1}{x-\ln(x)} - x = 0$

et $\dfrac{1}{x-\ln(x)} - x = \dfrac{1 - x^2 - x\ln(x)}{x - \ln(x)} = \dfrac{x \cdot (\cancel{1}/x = 1 - \ln(x))}{x - \ln(x)}$

Or $x \neq 0$ et $1 - \ln(x) \neq 0$, donc $x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0$

Donc $f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x) - \frac{1}{x} = 0$

b. $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$ pour tout $x > 0$

Donc le sens de la variation dépend du signe de $h'(x)$ qui est toujours positif (*) car $x^2 > 0$ et $x^2 - x + 1 > 0$. D'où h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

(*) sur $]0, +\infty[$

c. Tableau de variation de h :

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$+\infty$

d. ~~(L'équation $f(x) = x$ signifie que la courbe de C_f ... tableau)~~

Trouver la solution de $f(x) = x$ reviens à trouver la solution pour $h(x) = 0$ d'après 3.a).

Or h coupe l'axe des abscisses une seule et unique fois, puisque elle croît strictement de $-\infty$ à $+\infty$.

Donc $f(x) = x$ admet une seule et unique solution α.

$f(1) = \frac{1}{1 - 0} = 1$. D'où $\alpha = 1$

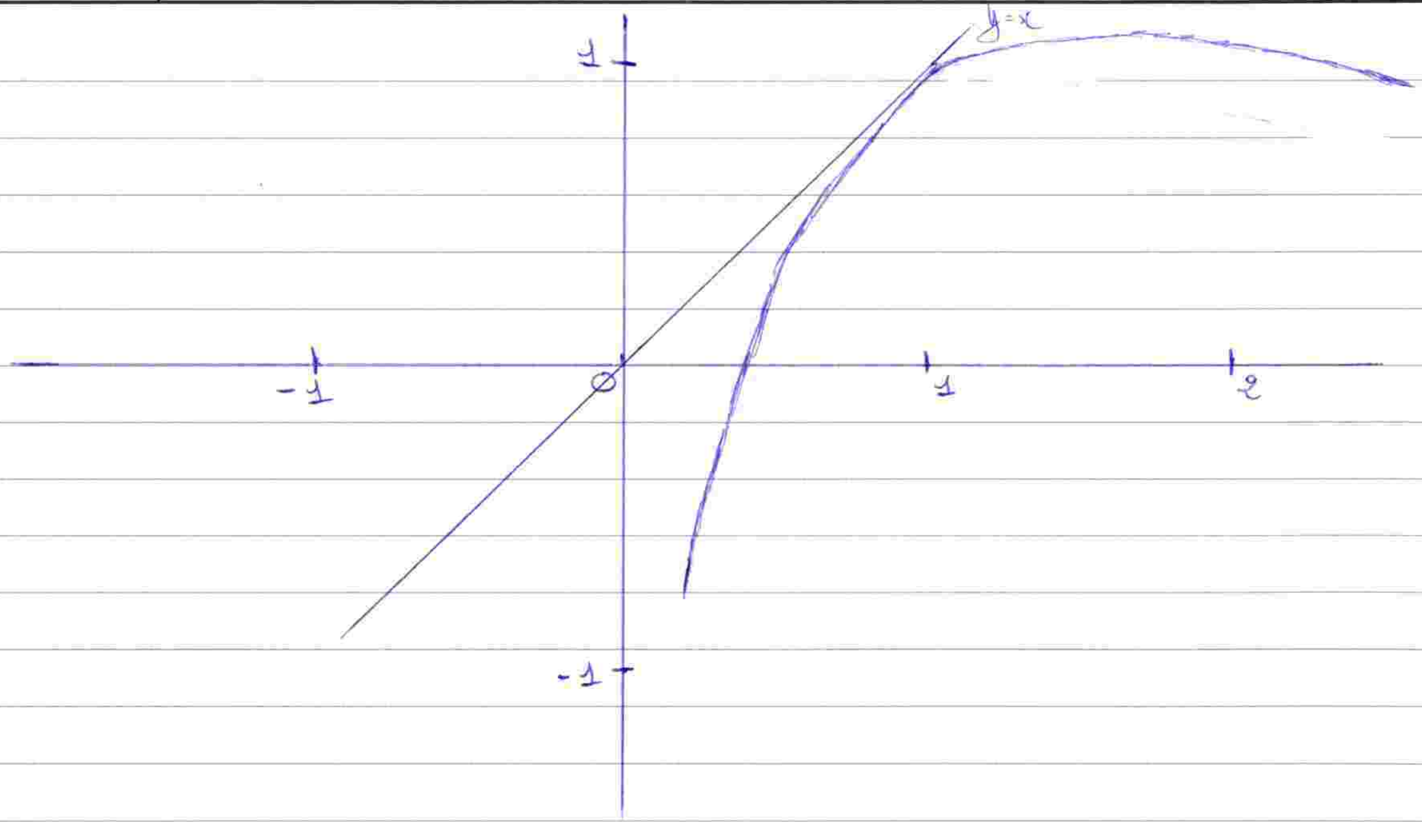
$\boxed{4}$. (Voir prochaine page)

Code épreuve : 294 | Nombre de pages : 16 | Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques

Emplacement QR Code

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*



Exercice 3,

1 a. X compte le nombre de succès de l'épreuve de Bernoulli " On a une cartouche défectueuse ". Donc X suit la loi binomiale de paramètres: de paramètre 2%
$n = 100$ et $p = 2\%$

Donc : $X(\Omega) = [0, 100]$ et $P(X=k) = \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{2}{100}\right)^k \cdot \left(\frac{98}{100}\right)^{n-k}$

b. $E(X) = n \cdot p = 100 \times \frac{2}{100} = 2$

et $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 2 \cdot \frac{98}{100} = \frac{98}{50} = \frac{49}{25} = \left(\frac{7}{5}\right)^2$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c. 1. X = grand(1, 1, 'bin', 100, 2/100)
2. if X == 0 then Y = (1, 1, 'bin', 1, 100)
else Y = X

2] a. X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Donc $E(X_i) = p$

et $V(X_i) = (1-p).p$

b. $E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= n.\frac{1}{n}. E(X_i) = p$

M_n est un estimateur car il est en fonction de variables aléatoire de même loi indépendantes.

Puisque $b_p(M_n) = E(M_n) - p$ et que $E(M_n) = p$

alors $b_p(M_n) = 0$.

D'où M_n est un estimateur sans biais de p.

c. $V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

$= \frac{1}{n^2}. n V(X_i)$ [car les variables aléatoires sont indépendantes]

$= \frac{1}{n}.(1-p).p$

Le risque quadratique de M_n est égale à $V(M_n) - b_p(M_n)^2$. Or M_n est sans biais de p. Donc le risque est égal à la variance de $M_n = \frac{(1-p)p}{n}$

d. On a $(1-p).p \leqslant \frac{1}{4}$

D'où $\frac{(1-p).p}{n.\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

Ainsi $\frac{V(M_n)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

Or selon l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|M_n - E(M_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}$

Aussi, $E(M_n) = p$ et $\frac{V(X)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

D'où $P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

e. On a $P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

alors $P(-\varepsilon \leq M_n - p \leq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

d'où $P(M_n - \varepsilon \leq p \leq M_n + \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$

Si $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}$. D'où $\frac{1}{4n\varepsilon^2} = \frac{1}{4n \cdot \frac{1}{4n\alpha}} = \alpha$

Ainsi $P(M_n - \varepsilon \leq p \leq M_n + \varepsilon) \geq 1 - \alpha$

Donc $[M_n - \varepsilon ; M_n + \varepsilon]$ est un interval de confiance de p au niveau de confiance $1 - \alpha$

Exercice 4.

$\boxed{1}$ a. $\frac{t}{1+t} = \frac{t+1-1}{1+t} = 1 - \frac{1}{t+1}$

b. $I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^1 1\,dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$

$= 1 - [\ln(1+t)]_0^1 = 1 - \ln(2) + \ln(1) = 1 - \ln(2)$

c. $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$

Par intégration par parties : $I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = \frac{1}{n+1} - I_n$

D'où $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$

1)d) d- $I_2 = \frac{1}{1+1}$, $I_1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = -\frac{1}{2} + \ln(2)$

$I_3 = \frac{1}{2+1} - I_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \ln(2) = -\frac{1}{6} + \ln(2)$

car d'après la question précédente, $I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n$ pour tout $n \geq 1$.

2)

i- Pour que f soit une densité de probabilité, il faut que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

donc que $\int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} k.\frac{t}{1+t}\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0.\,dt = 1$

$\Leftrightarrow \int_{0}^{1} k.\frac{t}{1+t}\,dt = 1$

d'où $k.\int_{0}^{1} \frac{t}{1+t}\,dt = 1$

Or on a d'après 1.b) que $I_1 = \int_{0}^{1} \frac{t}{1+t}\,dt = 1 - \ln(2)$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow k.\left(1 - \ln(2)\right) = 1$

D'où $k = \frac{1}{1-\ln(2)}$

ii- → f est positive sur $[0;1]$ car $t \geq 0$
f est nulle sinon.

→ f est continue sur $]0,1[$ car fonction rationelle
f est constante donc continue sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 & & \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2} \\ & \text{et} & \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 & & \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \text{limites réelles}$$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

→ D'après (i), $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ pour $k = \frac{1}{1+\ln(2)}$

Donc f est bien une densité de probabilité, avec $k = \frac{1}{1+\ln(2)}$

Code épreuve : 294	Nombre de pages : 16	Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

3) a. Pour $x \leq 0$: 1

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0$$

Pour $x \geq 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} k.\frac{t}{1+t}\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt$$

$$= \int_{0}^{1} k.\frac{1}{1+t}\,dt = 1$$

b. Pour $0 \leq x \leq 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} k.\frac{t}{1+t}\,dt$$

$$= \int_{0}^{x} k\frac{t}{1+t}\,dt = K.\left(1 - [\ln(t+1)]_0^x\right)$$

$$= K(x - \ln(1+x)).$$

4) a. $E(X)$ correspond à $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,dt = \int_{0}^{1} k.\frac{t^2}{1+t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt$

Or $I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt = \ln(2) - \frac{1}{2}$ et $k = \frac{1}{1-\ln(2)}$

D'où $E(X)$ existe et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = K.I_2 = \frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1-\ln(2)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

et $E(X^2)$ correspond à $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} k\frac{t^3}{1+t}\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt$

Or $I_3 = \int_0^1 \frac{t^3}{1+t}\,dt = \ln(2) - \frac{1}{6}$ et $k = \frac{1}{1-\ln(2)}$

Donc $E(X^2)$ existe et vaut $\int_0^1 k\cdot\frac{t^3}{1+t}\,dt = k\cdot \ln(2) - \frac{1}{6}$

$= \frac{\ln(2) - \frac{1}{6}}{1-\ln(2)}$

Ainsi X admet une variance :

$$V(X) = \frac{\ln(2) - 1/6}{1-\ln(2)} - \left(\frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1-\ln(2)}\right)^2$$