Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 29 | Session : 2024

Épreuve de : Mathématiques E emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

P2-00157 712570 Maths E

Exercice 1 :

Partie A : Etude de la fonction f

1) On a : $x \mapsto 1-x$ dérivable sur $]0;1[$ et à valeur dans $]0;1[$ car $x \in]0;1[$

et $X \mapsto \ln X$ dérivable sur $]0;1[$

Ainsi par composé on a $x \mapsto \ln(1-x)$ dérivable sur $]0;1[$ et par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas ($x<1$) on a bien f dérivable sur $]0;1[$

Puis : $f'(x) = \dfrac{\frac{-1}{1-x} \times \ln(x) - \ln(1-x) \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$

$$= \frac{-\frac{\ln(x) \times x}{(1-x)x} - \frac{\ln(1-x)(1-x)}{x(1-x)}}{(\ln(x))^2}$$

D'où $f'(x) = \dfrac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2}\left(-x\ln x - (1-x)\ln(1-x)\right)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

2)a) $\forall t \in]0;1[$ on a $\ln(t) < 0$ (en effet $\ln(1)=0$ et $x \mapsto \ln(x)$ est une bijection croissante sur $]0,+\infty[$)

en multipliant par $t > 0$ $(t \in]0;1[)$

On a bien : $t\ln(t) < 0$

2)b) On a $x \in]0;1[$

d'où : $0 < x < 1$

en multipliant par $-1<0$: $-1 < -x < 0$

et : $0 < 1-x < 1$

de plus $(\ln(x))^2 > 0$ par définition d'un carré.

Ainsi, on a $x(1-x)(\ln(x))^2 > 0$ par produit et donc $f'(x)$ du signe de $-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$

or comme $x \in]0;1[$ on a : $x\ln x < 0$

et comme $(1-x) \in]0;1[$ on a $(1-x)\ln(1-x) < 0$

Dès lors en multipliant par $-1<0$ on a :

$-x\ln(x) > 0$ et $-(1-x)\ln(1-x) > 0$

Enfin par somme on a bien $-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x) > 0$

Donc on a $\forall x \in]0;1[$, $f'(x) > 0$

et donc : f est strictement croissante sur $]0;1[$.

3)a) On a $\lim_{x \to 0^+} 1-x = 1$

Dès lors, par continuité du logarithme en 1
On a $\lim_{x \to 0^+} \ln(1-x) = 0$

De plus $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Par quotient on a finalement $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Cette limite étant finie on a bien f prolongeable ~~en~~ par continuité en 0 et $f(0) = 0$

3) b) On a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} \times \frac{1}{x}$

or comme $\lim_{x \to 0} x = 0$

On a $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$

Dès lors $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{0}{\sim} \frac{-x}{\ln(x) x}$

et donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \sim -\frac{1}{\ln(x)}$

Comme $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

On a par quotient $\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{\ln(x)} = 0$

On trouve une limite finie, on a bien f dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4) On a $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$

~~Posons $X = x-1$ dès lors~~

~~$f(X) = \dfrac{\ln(X)}{\ln(X+1)}$~~

~~et $\lim_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$~~

~~puis $\lim_{X \to 0^+} \ln(X+1) = 0$~~

~~Dès lors par quotient : $\lim_{x \to 1} f(x) =$~~

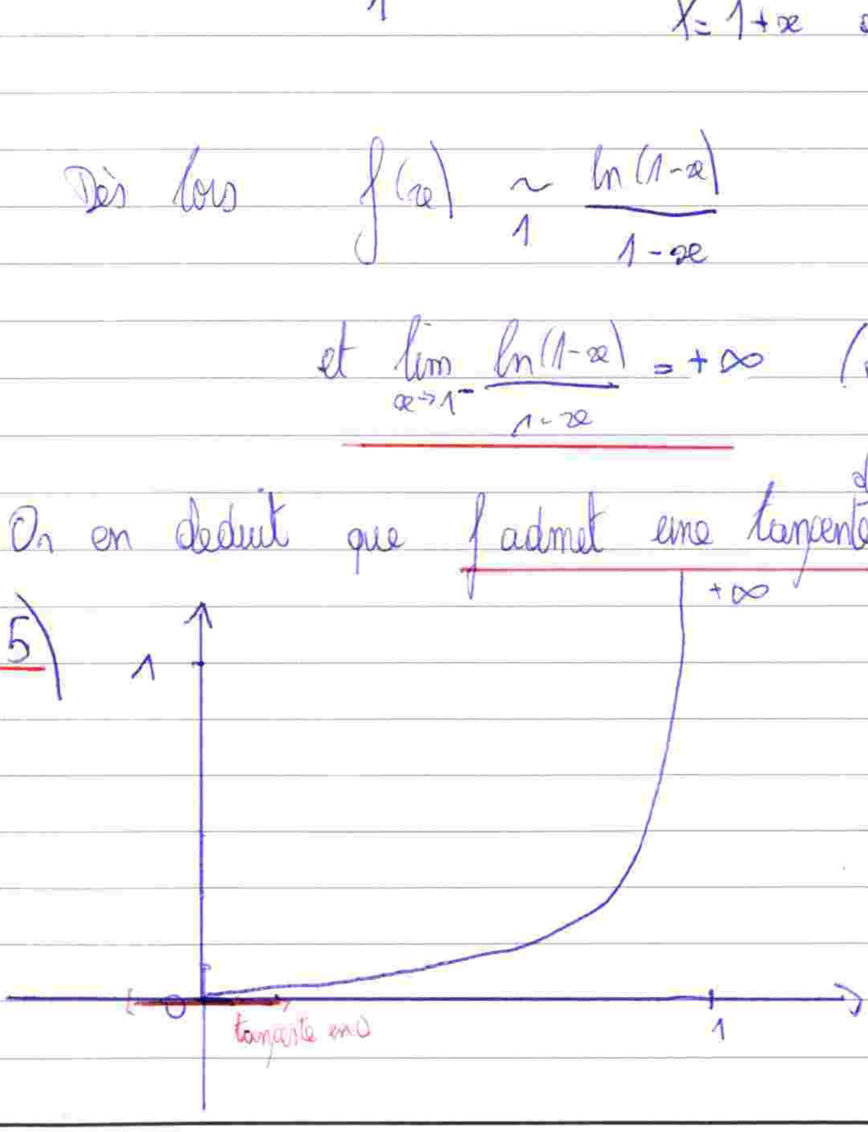
On a $\ln(x) \underset{1}{\sim} 1-x$ (en utilisant le changement de variable $X = 1+x$ dans l'équivalent usuel $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$)

Dès lors $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$

et $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = +\infty$ (car $\lim_{x \to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 1^-} (1-x) = 0^+$) donc par quotient on a bien ce résultat

On en déduit que f admet une tangente verticale en 1 : f tend vers l'infini $+\infty$

5)



Code épreuve : 296	Nombre de pages : 29	Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques E emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie B :

6) Soit g la fonction de l'énoncé. On a g dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car polynomiale. Ainsi : $g'(x) = nx^{n-1} + 1$

Comme $n > 0$ et $x > 0$ on a $g'(x) > 0$

et ainsi g strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

De plus on a $g(0) = -1$

et comme $x^n + x - 1 \underset{+\infty}{\sim} x^n$ (car polynomiale)

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ $(n \neq 0)$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, comme la fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $0 \in [-1, +\infty[$ c'est à dire à $[g(0); \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)[$, on a bien (E_n) admet une unique solution car les solutions de (E_n) sont celles telles que $g(x) = 0$.

7) ~~Prouvons ce résultat par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$.~~

~~initialisation : avec $n = 1$ on a $x^1 + x - 1 = 0$~~

~~$\iff x = \frac{1}{2}$~~

~~$0 < \frac{1}{2} < 1$~~

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7) On a : $g(0) = -1$

et $g(1) = 1$

Puis $g(u_n) = 0$

Ainsi on a : $g(0) < g(u_n) < g(1)$

en composant par g^{-1} (existe car g bijective) qui suit les mêmes variations que g (par propriété), c'est à dire croissante, on a bien :

$$0 < u_n < 1$$

8) Avec $n = 1$:

(E_1) :

$x + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

On a $u_1 = \frac{1}{2}$

Avec $n = 2$:

(E_2) :

$x^2 + x - 1 = 0$

On a $\Delta = 1 - 4(1)(-1) = 5$

Dès lors $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Or seul $x_2 > 0$

Donc on a $u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

9)a)

```
function u = valeur_approchee(n)
    a = 0
    b = 1
    while (b-a) >= 0,001
    c = (a+b)/2
     if (c^n+c-1)>0 then
            b=c

    else
            a=c
   end
  u = C
 end
endfunction
```

9b) Grâce à ce graphe, on peut conjecturer (u_n) croissante

et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

10)a) On a $u_n \in]0;1[$ donc on peut appliquer $f(u_n)$:

et $f(u_n) = \dfrac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)}$

or on a $u_n^n + u_n - 1 = 0$ car u_n solution de (E_n)

Dès lors : $u_n^n = 1 - u_n$

et en remplaçant dans f on a :

car $\ln(a^n) = n \ln a$

$f(u_n) = \dfrac{\ln(u_n^n)}{\ln(u_n)} = \dfrac{n\ln(u_n)}{\ln(u_n)} = n$

10)b) On a $\forall n \in \mathbb{N}^* f(u_n) = n$

et donc $f(u_{n+1}) = n+1$

comme $n+1 \geq n$ on a finalement :

$f(u_{n+1}) > f(u_n)$

or comme f est croissante on a :

$\underline{u_{n+1} > u_n}$

On peut conclure $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) On a (u_n) croissante d'après 10)b) et de plus

(u_n) est majorée par 1 d'après 7)

La suite est croissante et majorée donc elle converge vers l.

De plus $f(u_n) = n$ or f est strictement croissante (et continue) de $[0;1[$

dans $[0;+\infty[$ donc f est bijective de $[0;1[$ dans $[0;+\infty[$

en composant par f^{-1} dans l'égalité précédente on a :

$u_n = f^{-1}(n)$

en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ (on peut car u_n converge) on a :

$l = \lim_{n \to +\infty} f^{-1}(n)$

or d'après la bijection réciproque : $\lim_{n \to +\infty} f^{-1}(n) = 1$

Finalement $\underline{l = 1}$

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 29 | Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques E emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie C :

11)a) La fonction étant C^2 sur l'ouvert $]0;+\infty[^2$ on peut dériver pour obtenir les dérivées partielles d'ordre 1 et $\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2$:

$$\partial_1(f)(x,y) = 2xy + 2x - 2$$

$$\partial_2(f)(x,y) = x^2 - y$$

11)b) Les points critiques de f sont les points qui vérifient :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + 2x - 2 = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 2x - 2 = 0 \\ x^2 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^3 + x - 1) = 0 \\ x^2 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^3 + x - 1) = 0 \\ x^2 = y \end{cases} \qquad 2 \neq 0$$

Or $(x^3 + x - 1)$ admet comme unique solution u_3 d'après la partie B) donc

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

en remplaçant on a :

$$\begin{cases} x = u_3 \\ y = u_3^2 \end{cases}$$

D'où le point (u_3, u_3^2) unique point critique de f

12) a) Comme f est C^2, on peut dériver à nouveau et on a :

$$\partial_{1,1}(f)(x,y) = 2y + 2$$

$$\partial_{1,2}(f)(x,y) = 2x$$

$$\partial_{2,1}(f)(x,y) = 2x$$

$$\partial_{2,2}(f)(x,y) = -1$$

Dès lors on a :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2y+2 & 2x \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

en (u_3, u_3^2) on a :

$$\nabla^2(f)(u_3, u_3^2) = \begin{pmatrix} 2u_3^2+2 & 2u_3 \\ 2u_3 & -1 \end{pmatrix}$$

12) b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et I la matrice identité :

$$\nabla^2(f)(u_3, u_3^2) - \lambda I = \begin{pmatrix} 2u_3^2+2-\lambda & 2u_3 \\ 2u_3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Or les valeurs propres de ∇^2 sont les valeurs telles que $\nabla^2 - \lambda I$ n'est pas inversible. Calculons alors $ad-bc$.

Ici :

$$(2u_3^2+2-\lambda)(-1-\lambda) - 4u_3^2 = -2u_3^2 - 2 + \lambda - 2\lambda u_3^2 - 2\lambda + \lambda^2 - 4u_3^2$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2\lambda u_3^2 - 2 - 6u_3^2$$

$$= \lambda^2 + (-1-2u_3^2)\lambda - 2 - 6u_3^2$$

On a $\Delta = (-1-2u_3^2)^2 - 4(-2-6u_3^2)$

$\Delta = (-1-2u_3^2) + 8 + 24u_3^2 > 0$ par somme de termes positifs (un carré est toujours positif)

D'où $ad-bc$ admet 2 solutions distinctes ici

Ainsi comme $\Delta > 0$ on a ∇^2 admet bien 2 valeurs propres. Or le produit des racines d'un polynome vaut $\frac{c}{a}$

D'où $\lambda_1\lambda_2 = \frac{-2-6u_3^2}{1} = -6u_3^2 - 2$

13) On a $\lambda_1\lambda_2 = -6u_3^2 - 2 = -2(3u_3^2+1)$

or on a $0 < u_3 < 1$ d'après la partie B

donc $0 < u_3^2 < 1$ car $x \mapsto x^2$ bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$

et $0 < 3u_3^2 < 3$ car $3 > 0$

finalement $1 < 3u_3^2 + 1 < 4$

et donc en multipliant par $-2 < 0$ on a

$\lambda_1\lambda_2 < 0$

Ce qui signifie que λ_1 et λ_2 sont de signes contraires

Ainsi, f n'a pas d'extremum locaux sur $]0;+\infty[^2$.

Exercice 2 :

1)a) On a $E = \{ M(a,b) ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$

Or $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi on a $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Comme ces deux matrices appartiennent à $M_4(\mathbb{R})$ et de plus elles sont non proportionnelles, elles forment une base de E (famille libre et génératrice) et on a donc E un sous-espace vectoriel de $M_4(\mathbb{R})$ et comme $\text{card}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 2$

On a $\dim E = 2$

1)b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(c,d) \in \mathbb{R}^2$

Ainsi $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$ et $M(c,d) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & c \\ d & d & d & d \end{pmatrix}$

Puis le produit $M(a,b)M(c,d) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & c \\ d & d & d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+ad & ad & ad & ac+ad \\ ac+ad & ad & ad & ac+ad \\ ac+ad & ad & ad & ac+ad \\ 3bc+bd & bd & bd & 3bc+bd \end{pmatrix}$

On ne peut décomposer $M(a,b) \times M(c,d)$ en combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Donc le produit n'appartient plus à E.

(En fait les coefficient des 2 colonnes centrales sauf de la dernière ligne sont $\neq 0$).

Code épreuve : 296	**Nombre de pages :**	**Session :** 2020

Épreuve de : Mathématiques E emlyon

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

2) $M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cette matrice étant symétrique,

elle est bien diagonalisable.

3)a) On a $M(a,0) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\forall a \neq 0$

Dès lors $M(a,0) \times M(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= a\,M(a,0)$

Dès lors on remarque $(M(a,0))^2 = a\,M(a,0)$

D'où $(M(a,0))^2 - a\,M(a,0) = 0$

Finalement le polynôme $P(X) = X^2 - aX$ est annulateur

de $A = M(a,0)$

3)b) $P(X) = 0 \iff X^2 - aX = 0$

$\iff X(X-a) = 0$

$\iff X = 0$ ou $X = a$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi les valeurs propres possibles de la matrice sont :
0 et a

D'où $Sp(A) \subset \{0; a\}$

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ ainsi

Résolvons $(A - \lambda I) X = 0$

- Avec $\lambda = 0$

$AX = 0 \iff \begin{cases} ax + at = 0 \\ ax + at = 0 \\ ax + at = 0 \end{cases}$

Le système n'est pas de Cramer : 0 est bien valeur propre

$\iff \begin{cases} ax = -at \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -t \end{cases}$

En notant SE_λ le sous espace vectoriel associé à la valeur propre λ on a :

$SE_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Appliquons un test de liberté à cette famille :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\iff \begin{cases} -a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$

La famille est donc libre et génératrice, c'est une base de SE_0

Déjà : $A - aI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 0 & -a & a \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$

Dès lors $(A - aI)X = 0 \iff \begin{cases} ta = 0 \\ ax - ay + at = 0 \\ ax - az + at = 0 \\ -at = 0 \end{cases}$

$\underset{a \neq 0}{\iff} \begin{cases} t = 0 \\ ax - ay = 0 \\ ax - az = 0 \end{cases}$

Le système n'est pas de Cramer : a ~~≠0~~ est bien valeur propre.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 4 \\ x = 3 \end{cases}$$

Dès lors $SE_q = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, comme ce vecteur est différent du vecteur nul, il représente une famille libre et génératrice de SE_q, c'est donc une base de SE_q

c) On a $\dim SE_q = 1$ et $\dim SE_0 = 3$

Ainsi la somme des dimensions des sous espaces propres de A vaut 4 ce qui correspond au format de la matrice. Dès lors A est bien diagonalisable.

D'où par définition de la diagonalisabilité : $A = PDP^{-1}$

avec D une matrice comprenant les valeurs propres de A en diagonale et P une matrice comprenant les sous espaces propres associés en colonnes,

Ainsi $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) a) On a $M(0,b) = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$

Par lecture des colonnes (toutes égales) on note :

$rg(B) = 1$.

Puis $B - bI = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix}$

Appliquons un test de liberté aux 3 premières colonnes notées (C_1, C_2, C_3)
(on retire la dernière car que des 0)
soit ~~(x,y)~~ $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$u\begin{pmatrix}-6\\0\\0\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\-6\\0\\6\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}0\\0\\-6\\6\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6u = 0 \\ -6v = 0 \\ -w6 = 0 \\ v6 + w6 = 0 \end{cases}$$

comme $6 \neq 0$

on a $u = v = w = 0$

Ainsi la famille est libre on peut conclure $rg(B - 6I) = 3$

4) b) ~~On a $B \in M_4(\mathbb{R})$ ainsi, comme le format de B vaut 4 (la dimension est finie) on peut appliquer le théorème du rang~~

En posant f l'endomorphisme de $M_4(\mathbb{R})$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique. Ainsi f etant de dimension finie (le format de $M_4(\mathbb{R})$ vaut 4), on a d'après le théorème du rang :

$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{im} f = 4$

or $rg\, B = 1$ et B est la matrice de f dans la base canonique.

Ainsi $\dim \operatorname{Ker} f = 3$

Et donc $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ on a 0 valeur propre de f et donc de B et le sous espace propre associé est de dimension 3.

De même avec le théorème du rang on a $\dim \operatorname{Ker}(f - 6Id) + \dim(\operatorname{Im} f - 6Id) = 4$

Or $rg(B - 6I) = 3$

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 29	Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques E emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc on a : $\dim \mathrm{Ker}(f-6id) = 1$

Cela signifie que 6 est valeur propre de f, et donc de V. et le sous espace propre associé est de dimension 1.

4c) 0 et 6 sont les valeurs propres or les sous espaces propres associés ont respectivement pour dimension 3 et 1 (d'après 4b)

Ainsi la somme des dimensions des sous espaces propres vaut 4, soit le format de B. Donc B est bien diagonalisable.

5) a) $X \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow M(a,b)X = 0$ car $M(a,b)$ la matrice de f dans la base canonique

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + at = 0 \\ ax + at = 0 \\ ax + at = 0 \\ bx + by + bz + bt = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax = -at \\ bx + by + bz + bt = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ bx + by + bz + bt = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = -z \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Ainsi on a $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,0,0,-1),(0,1,-1,0))$

Les vecteurs étant non colinéaires on a

bien $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ (car ces vecteurs forment une famille libre et génératrice de $\operatorname{Ker} f$)

et en posant $v_3 = (1,0,0,-1)$ et $v_4 = (0,1,-1,0)$

on a (v_3, v_4) une base de $\operatorname{Ker} f$.

5b) Appliquons un test de liberté à cette famille :

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a + d = 0 \\ a - d = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a + c = 0 \\ -c + d = 0 \\ -c - d = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a + c = 0 \\ -c + d = 0 \\ -2c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

(la ligne 3 donne $c = 0$ ce qu'on réinjecte dans les lignes 1, 2 et 4).

Ainsi, la famille B' est bien libre donc

card $B' = 4$
or dim $\mathbb{R}^4 = 4$

Ainsi comme la famille est libre et de même dimension que $\mathbb{R}^4$, c'est une base de $\mathbb{R}^4$

5c) Calculons $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, $f(v_4)$ par l'intermédiaire de la matrice $M(a,b)$ on a :

• $M(a,b)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a\\a\\3b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 3b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

d'où $f(v_1) = av_1 + 3bv_2$

• $M(a,b)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a\\a\\b\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

d'où $f(v_2) = bv_2 + av_1$

• $M(a,b)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ (car $v_3 \in \operatorname{Ker} f$)

d'où $f(v_3) = 0$

• $M(a,b)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ (car $v_4 \in \operatorname{Ker} f$)

et $f(v_4) = 0$

Ainsi $N = \begin{pmatrix}a & a & 0 & 0\\3b & b & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

5/d) Si X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ alors avec $X \neq 0$: $NX = \lambda X$

Or $NX = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 36 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + ay \\ 36x + by \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \\ \lambda t \end{pmatrix}$

or $\lambda \neq 0$ donc par identification on a :

$ax + ay = \lambda x$,
$36x + by = \lambda y$

et $z = t = 0$

Testons le calcul $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 36 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + ay \\ 36x + by \end{pmatrix}$

or $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + ay \\ 36x + by \end{pmatrix}$

Ainsi on a bien $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

D'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

5e) On a $a = 1$ et $b = 1$

D'où $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Dès lors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $T - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Code épreuve : 296	Nombre de pages : 29	Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques E emlyon

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

5)e) suite) Ici $ad - bc = (1-\lambda)^2 - 3 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 3$
$= \lambda^2 - 2\lambda - 2$

et résolvons $\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \times (1) \times (-2) = 12$

$\lambda_1 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = 1 - \sqrt{3}$ $\quad \lambda_2 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3}$

C'est les deux valeurs propres de T.

Exercice 3 :

Partie A :

1) On a : • f continue si $x < b$ en tant que fonction nulle.

• f continue par quotient de telles fonctions si $x \geq b$

Ainsi f est continue en tout point sauf peut être en b.

• f est supérieur à 0 si $x \geq b$ car $a > 0$ et $b > 0$ et $x \geq b$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

et f positive comme fonction nulle si $x < b$

- Enfin : $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = 0$ sans problèmes de convergence

$\forall A > b$

et $\int_{b}^{A} f(x)dx = ab^a \int_{b}^{A} x^{-a-1} dx$

$= ab^a \left[\frac{x^{-a}}{-a} \right]_b^A$

$= ab^a \left(\frac{A^{-a}}{-a} - \frac{b^{-a}}{-a} \right)$

$= ab^a \left(\frac{A^{-a}}{-a} \right) + 1$

or $\lim_{A \to +\infty} \frac{A^{-a}}{-a} = 0$ car $-a < 0$

Ainsi, l'intégrale $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Il s'agit bien d'une densité de probabilité

2) Soit F une fonction de répartition.

On a $F(x) = P(X \leq x)$

avec $x < b$ on a

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$

avec $x \geq b$

$F(x) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt + \int_{b}^{x} f(t)dt = \int_{b}^{x} f(t)dt$

$$F(x) = \int_b^x \frac{ab^a}{t^{a+1}}\,dt = ab^a \left[\frac{t^{-a}}{-a}\right]_b^x$$

$$= ab^a \left(\frac{x^{-a}}{-a} - \frac{b^{-a}}{-a}\right)$$

$$= ab^a \left(\frac{1}{b^a a} - \frac{1}{x^a a}\right)$$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a$$

En regroupant $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < b \\ 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a \text{ si } x \geq b \end{cases}$

3)a) $P(bU^{-\frac{1}{a}} \leq x) \overset{b>0}{=} P\left(U^{-\frac{1}{a}} \leq \frac{x}{b}\right)$

$$= P\left(\frac{1}{U^{\frac{1}{a}}} \leq \left(\frac{x}{b}\right)\right)$$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante

$$= P\left(U^{\frac{1}{a}} \geq \frac{b}{x}\right)$$

$x \mapsto x^a$ croissante

$$= P\left(U \geq \left(\frac{b}{x}\right)^a\right)$$

$$= P\left(U > \left(\frac{b}{x}\right)^a\right) \quad \text{car } U \text{ à densité}$$

$$= 1 - P\left(U \leq \left(\frac{b}{x}\right)^a\right)$$

or comme U suit une loi uniforme, on a :

si $x < b$ $P\left(U \leq \left(\frac{b}{x}\right)^a\right) = 1$ car $\frac{b}{x} > 1$

et ainsi $P(bU^{-\frac{1}{a}} \leq x) = 0$

et si $x \geq b$ on a $\frac{b}{x} \in [0;1[$ car $b>0$

et donc $P(bU^{-\frac{1}{a}} \leq b) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a$

On reconnait bien la fonction de répartition précédente -

$bU^{-1/a}$ suit une loi de Pareto de paramètres a et b

3/b)

```
function X = pareto(a,b)
  U = grand(1,1,'unf',0,1)
  X = b*U^(-1/a)
endfunction
```

3c) ~~La ligne L renvoyé par la fonction mystère envoie la somme partielle associé à une fonction de Pareto~~

La ligne L ~~renvoyé~~ renvoyée par la fonction mystère renvoie une valeur approchée de l'espérance d'une loi de pareto de paramètres a,b.

d) Les valeurs sont proches lorsque a et b le sont mais si a s'écarte de b, les valeurs sont beaucoup plus aléatoires.

4) a) $\forall x \geq b$ on a $x f(x) = \frac{ab^a}{x^a}$

on reconnait une intégrande proportionnelle à celle de Riemann : $\frac{1}{x^a}$ or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$ converge si et seulement si $a>1$

~~Donc E(X)~~. De plus si $x<b$ $xf(x) = 0$

Ainsi $E(X)$ existe si et seulement si $a>1$

Puis ~~$E(X) = \int_b$~~ $\forall A>b$ $\int_b^A ab^a x^{-a} dx = ab^a \int_b^A x^{-a} dx$

$= ab^a \left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1}\right]_b^A$

$= ab^a \left(\frac{A^{-a+1}}{-a+1} - \frac{b^{-a+1}}{-a+1}\right)$

Code épreuve : 296 | Nombre de pages : 29 | Session : 2020

Épreuve de : Maths emL

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

4)a) suite) Or $\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{A^{a-1}} = 0$ car $(-a+1 < 0)$

Ainsi l'intégrale converge et :

~~$E(X) = \int_b^{+\infty} a b^a$~~ $E(X) = ab^a \left(- \frac{b^{-a+1}}{-a+1} \right) = \frac{ab}{a-1}$

4)b) On a $x^2 f(x) = 0$ si $x < b$

et $x^2 f(x) = \frac{ab^a}{x^{a-1}}$ si $x \geq b$

Ainsi d'après Riemann comme précédemment $E(X^2)$ et donc $V(X)$ existe si et seulement si $a-1 > 1$
$\Leftrightarrow a > 2$.

Avec koenig Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Puis $\int_b^A ab^a x^{-a+1} dx = ab^a \int_b^A x^{-a+1} = ab^a \left[\frac{x^{-a+2}}{-a+2} \right]_b^A$

$= ab^a \left(\frac{A^{-a+2}}{-a+2} - \frac{b^{-a+2}}{-a+2} \right)$

Or $\lim_{A \to +\infty} A^{-a+2} = 0$ car $-a+2 < 0$

ainsi on a finalement l'intégrale convergente et :
$E(X^2) = \frac{ab^2}{a-2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

et donc $V(X) = \frac{ab^2}{(a-2)} - \frac{(ab)^2}{(a-1)^2}$

$= \frac{ab^2(a-1)^2 - (ab)^2(a-2)}{(a-1)^2(a-2)}$

$V(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$ après calcul

Partie B :

5) a) $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$

Or le minimum ~~signifie~~ de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ~~est inférieur~~ supérieur à x signifie que $(X_1, \dots, X_n)$ sont tous supérieur à x.

Ainsi $(Y_n > x) = (X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap \dots (X_n > x)$

Comme $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi que X

On a $P(Y_n > x) = (P(X_1 > x))^n$

$= (1 - P(X_1 \leq x))^n$

$= \left(\frac{6}{x}\right)^{3n}$ car $x > 6$ et dans cette partie $a=3$

5) b) Ainsi $P(Y_n > x) = 1 - P(Y_n \leq x)$

si $x \geq 6$ D'où $P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) = 1 - \left(\frac{6}{x}\right)^{3n}$

et si $x < 6$ on a directement $P(Y_n \leq x) = 0$.

On reconnait une loi de Pareto de paramètres $(3n, 6)$.

5)c) Par linéarité de l'espérance on a :

$$E(Y_n') = \frac{3n-1}{3n} E(Y_n)$$

or d'après 4a) $E(Y_n) = \frac{3n\,b}{3n-1}$

Ainsi $E(Y_n') = \frac{3n-1}{3n} \times \frac{3n\,b}{3n-1} = b$

Y_n' est bien un estimateur sans biais de b.

Ainsi, son risque quadratique vaut sa variance or $V(aX) = a^2 V(X)$

d'où $V(Y_n') = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 V(Y_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \times \frac{3n\,b^2}{(3n-1)^2(3n-2)}$

$$V(Y_n') = \frac{b^2}{(3n)(3n-2)}$$

C'est aussi le risque quadratique.

6)a) $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

Par linéarité de la variance :

$E(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ comme les X_i ont de mêmes lois :

$= \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} \frac{3b}{2}$

$= \frac{1}{n} \times \frac{3nb}{2} = \frac{3}{2} b$

Puis $V(Z_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{3b^2}{4} = \frac{3nb^2}{n^2 4} = \frac{3b^2}{4n}$

6) b) En choisissant $\alpha = \frac{2}{3}$ par linéarité

on a $E\left(\frac{2}{3} Z_n\right) = \frac{2}{3} E(Z_n) = b$

Donc $Z_n' = \frac{2}{3} Z_n$ est un estimateur sans biais de b.

Puis $V(Z_n') = \frac{4}{9} V(Z_n) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{4} \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{3n}$, il s'agit aussi

de son risque quadratique.

7) Il s'agit de choisir le plus petit des deux : celui qui minimise le risque : c'est à dire la variance la moins élevée *

On remarque : $\cancel{V(Z_n)} = V(Y_n') = V(Z_n') \times \frac{1}{3n-2}$

or $\frac{1}{3n-2} < 1$

Donc on a $V(Y_n') < V(Z_n')$

Dès lors Y_n' est le meilleur estimateur à choisir

(* les valeurs seront moins dispersées).

Partie C :

8) On a $W_n = \ln(X_n)$

Dès lors : $P(W_n \leq x) = P(\ln(X_n) \leq x)$
$= P(X_n \leq e^x)$ (car expo bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$)

or si $x < 0$ on a $e^x < 1$ et donc :
$P(W_n \leq x) = 0$

et si $x \geq 0$ on a $e^x \geq 1$, et donc
$P(W_n \leq x) = P(X_n \leq e^x) = 1 - \left(\frac{1}{e^x}\right)$ (ici $\theta = 1$)

8) suite) et donc $P(X_n \leq e^{x}) = 1 - e^{-x}$

En regroupant on reconnait bien une loi expo de paramètre 1.

Donc $W_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ ainsi $E(W_n) = 1$ et $V(W_n) = 1$.

9) a) On remarque $T_n = M_n^*$ avec ~~E(M_n)~~ avec $E(W_n) = 1$

en effet $T_n = \dfrac{M_n - E(M_n)}{\sqrt{V(M_n)}}$ $V(W_n) = 1$

Ainsi d'après la loi faible des grands nombres

Comme T_n est une suite de variable aléatoire indépendantes (d'après le lemme des coalitions) donc ~~X_n~~ T_n converge en loi vers une variable aléatoire centrée réduite.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/