Code épreuve : 287	Nombre de pages : 31	Session : 2020

A7-00082
940157
Maths 2E

Épreuve de : Maths 2 ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Première partie

1)a) i $\forall k \in [\![0,10]\!]$ $p_k = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}$

ii) $E(X) = 10 \times \frac{1}{5} = \underline{2}$

ii) $V(X) = 10 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{40}{25} = \boxed{\frac{8}{5}}$

D'après la formule de Huygens

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\Rightarrow E(X^2) = V(X) + E(X)^2$$

$$= \frac{8}{5} + 4$$

$$\boxed{E(X^2) = \frac{28}{5}}$$

i) Ainsi pour avoir N_k il s'agit de considérer le nombre de familles qui ont k enfants (n_k) et le multiplier par le nombre d'enfants dans la famille : k

D'où $\forall k \in [\![0,10]\!]$

$$N_k = k M_k = k p_k M$$

car $M_k = p_k M$

ii) $$N = \sum_{k=0}^{10} N_k = \sum_{k=0}^{10} k p_k M = M \sum_{k=0}^{10} k p_k$$

Donc $$\frac{N}{M} = \sum_{k=0}^{10} k p_k = E(X) = 2$$

$$\boxed{\frac{N}{M} = 2}$$

iii) Ainsi $$p_k^* = \frac{N_k}{N} = \frac{k p_k M}{N} = \frac{k p_k}{2}$$

$$\boxed{p_k^* = \frac{k p_k}{2}}$$

ii) $Y(\Omega) = [\![1,10]\!]$ le cas $Y=0$ est absurde.

Ainsi $(Y=k)$ signifie que l'individu provient d'une famille à k enfants, de probabilité p_k^*

car 1_k* calcule cette proportion.

D'où $\forall k \in [\![1,10]\!]$, $\underline{P(Y=k) = k p_k / 2}$

ii) $E(Y)$ existe car $Y(\Omega)$ est fini

$$\cancel{E(Y) = \sum_{k=1}^{10} \frac{k^2 p_k}{2}}$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{10} k P(Y=k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k^2 p_k$$

$$= \frac{1}{E(X)} \sum_{k=1}^{10} k^2 P(X=k)$$

d'après le théorème de transfert

$$\boxed{E(Y) = \frac{E(X^2)}{E(X)}}$$

iii) D'après a)

$$E(Y) = \frac{\frac{28}{5}}{2} = \frac{28}{10}$$

$$E(Y) = \frac{14}{5}$$

Comme $5 < 7 \Rightarrow \frac{1}{7} < \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow 2 < \frac{14}{5}$$

$\underline{E(X) < E(Y)}$

2) a)

~~On pose~~ Sous réserve de convergence

$$\sum_{i=1}^{+\infty} q_i = \frac{1}{E(X)} \sum_{i=1}^{+\infty} i P(X=i)$$

or $E(X)$ existe donc

$$\sum_{i=1}^{+\infty} q_i = \frac{E(X)}{E(X)} = \underline{1}$$

b) Sous réserve de convergence

~~$E($~~

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i P(X^* = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i^2 P(X=i)}{E(X)} = \frac{1}{E(X)} \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 P(X=i)$$

Or ~~X~~ $E(X^2)$ existe et vaut d'après le théorème de transfert

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2 P(X=i)$$

$$\boxed{\text{D'où } E(X^*) = E(X^2)/E(X)}$$

Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 31 | Session : 2020

Épreuve de : Maths 2 ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) Si $E(X^2)$ existe, d'après la formule de Huygens.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= E(X^*) \cdot E(X) - E(X)^2 \quad \text{d'après 2) b)}$$

$$V(X) = E(X)\left[E(X^*) - E(X)\right]$$

d) On $V(X) \geq 0$

et comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

$$E(X) \geq 0$$

or

$$V(X) \geq 0 \Rightarrow E(X)\left[E(X^*) - E(X)\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow E(X^*) - E(X) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E(X^*) \geq E(X)}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

3)a)

Ainsi $X(\Omega) = \mathbb{N}$; $E(X) = \lambda$

et $\forall k \in \mathbb{N}$ $P(X=i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

$\forall i \geq 0$

et $P(X^* = i) = \frac{i}{\lambda} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

$$\boxed{\forall i \geq 1 \quad P(X^* = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}}$$

ii) $(X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^* = X^*(\Omega)$

$\forall i \geq 1$ $P(X+1 = i) = P(X = i-1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$

$$\boxed{P(X+1=i) = P(X^* = i)}$$

ii) Ainsi $\forall k \geq 1$. $P(X^* = k) = P(X+1 = k)$

$\Leftrightarrow \frac{k}{E(X)} P(X = k) = P(X = k-1)$

$$\boxed{\forall k \geq 1 \Leftrightarrow P(X = k) = \frac{E(X)}{k} P(X = k-1)}$$

ii) Montrons cela par récurrence sur k

$\boxed{I}$ $k=0$

$$\frac{E(X)^0}{0!} P(X=0) = \frac{1}{1} P(X=0) = P(X=0)$$

$\boxed{H}$ Supposons $P(k)$ vraie à un certain rang k fixé, sous cette hypothèse, montrons que $P(k+1)$ est vraie

où $P(k+1)$: " $P(X=k+1) = \frac{E(X)^{k+1}}{(k+1)!} P(X=0)$ "

D'après b) i)

$$P(X=k+1) = \frac{E(X)}{k+1} P(X=k)$$

par hypothèse de récurrence

$$= \frac{E(X)}{k+1}\left(\frac{E(X)^k}{k!} P(X=0)\right)$$

$$P(X=k+1) = \frac{E(X)^{k+1}}{(k+1)!} P(X=0)$$

Donc $P(k+1)$ est vraie si $P(k)$ l'est

La propriété est vraie pour $k \in \mathbb{N}$

iii) Comme $X \subset \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1$$

$$\Rightarrow P(X=0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{E(X)^k}{k!} = 1$$

On reconnait une série exponentielle

$$\Rightarrow P(X=0)\, e^{E(X)} = 1$$

$$\Rightarrow P(X=0) = e^{-E(X)}$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boxed{P(X=k) = \frac{E(X)^k}{k!} e^{-E(X)}}$

X suit une loi de poisson de paramètre $\underline{E(X)}$

4) $$\sum_{j=1}^{m} j P_{(X=k)}(T=j) = \sum_{j=1}^{k} j P_{(X=k)}(T=j) + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{m} j P_{(X=k)}(T=j)}_{0}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} j/k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j$$

$$= \frac{1}{k} \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1,m]\!] \sum_{j=1}^{m} j P_{(X=k)}(T=j) = \frac{k+1}{2}}$$

Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 31 | Session : 2020

Épreuve de : Maths 2 ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

ii) $$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} j\,P(X=k)\,P_{(X=k)}(T=j)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} P(X=k) \sum_{j=1}^{m} j\,P_{(X=k)}(T=j)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} P(X=k)\,(k+1)$$

D'après le théorème de transfert

$$\boxed{\sum_{1\leq k\leq j\leq m} j\,P(X=k)\,P_{(X=k)}(T=j) = \frac{E(X+1)}{2}}$$

iii) $(X=k)_{k\in[\![1,m]\!]}$ représente un système complet d'événements et d'après la formule des probabilités totales associée à ce sce

$$P(T=j) = \sum_{k=1}^{m} P((X=k)\cap(T=j))$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall j \in [\![1, m]\!]$

$$P(T=j) = \sum_{k=1}^{m} P(X=k) \cdot P_{(X=k)}(T=j)$$

et comme $T(\Omega) = [\![1, m]\!]$

$$E(T) = \sum_{j=1}^{m} j P(T=j)$$

$$\boxed{E(T) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} j P(X=k) P_{(X=k)}(T=j)}$$

iv) et d'après 4)a) ii)

$$\boxed{E(T) = \frac{E(X+1)}{2}}$$

e) $\forall k \in [\![1, m]\!]$

$$\sum_{j=1}^{m} j P_{(X^*=k)}(T^*=j) = \sum_{j=1}^{k} j P_{(X^*=k)}(T^*=j)$$

car $P_{(X^*=k)}(T^*=j) = 0$ si $j > k$

$$= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{k2}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} j\, P_{(X^*=k)}(T^*=j) = (k+1)/2}$$

ii) De nouveau

$(X^*=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ représente un s.c.e donc d'après la formule des probabilités totales associée à ce s.c.e $\forall j\in[\![1,n]\!]$

$$P(T^*=j) = \sum_{k=1}^{n} P(X^*=k)\cap(T^*=j)$$

D'où comme $(T^*)(\Omega) = [\![1,n]\!]$

$$E(T^*) = \sum_{j=1}^{n} j P(T^*=j) = \boxed{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} j P(X^*=k) P_{(X^*=k)}(T^*=j)}$$

iii) Ainsi, $E(T^*) = \sum_{k=1}^{n} P(X^*=k) \sum_{j=1}^{n} j P_{(X^*=k)}(T^*=j)$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(X^*=k)(k+1)$ d'après le théorème de transfert

$$\boxed{E(T^*) = \frac{E(X^*+1)}{2}}$$

Le paradoxe du temps fait que l'intervalle dans lequel on "tombe" (X^*) est proportionnelle à sa taille, d'où

$$E(X) \leq E(X^*)$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X+1) \leq E(X^*+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{E(T) \leq E(T^*)}$$

Deuxième partie

5) a) en tant que densité f est continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf * en un nombre fini de points
* peut-être

et $\forall x \geq 0 \quad f(x) \geq 0$

D'où x ~~$xg(x)$~~ est positif

$x \to x f(x)$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et continue sur $\mathbb{R}^+$ sauf peut-être en un nombre fini de points

Donc comme $E(X) > 0$

g est positive sur $\mathbb{R}^+$, continue sur $\mathbb{R}^+$, sauf peut-être en un nombre fini de points

Sous réserve de convergence

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{1}{E(X)} \int_0^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{E(X)}{E(X)} = 1$$

car f admet une espérance

g est bien une densité

2) i) $x>0$ $F_{aX}(x) = P(aX < x)$
$= P\left(X < \frac{x}{a}\right)$ $a>0$

$$F_{aX}(x) = F_X\left(\frac{x}{a}\right)$$

D'où une densité de aX est $f_{aX} = F_{aX}'$

et $\forall x>0$, $f_{aX}(x) = F_X'\left(\frac{x}{a}\right) = \boxed{\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)}$

ii) $(aX)^*$ est loi de aX biaisée par la taille

Donc $(aX)^*$ a pour densité

$$q(x) = x f_{aX}(x) / E(aX)$$
$$= \frac{x f\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a}}{aE(X)} = \frac{x f\left(\frac{x}{a}\right)}{a^2 E(X)} = q(x)$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

et $P(aX^* \leq x) = \Rightarrow P(X^* \leq \frac{x}{a})$ $a > 0$

$$F_{aX^*}(x) = F_{X^*}\left(\frac{x}{a}\right)$$

D'où une densité de aX^* est $v = F_{aX^*}'$

$$v(x) = \frac{1}{a} g\left(\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{x}{a^2} f\left(\frac{x}{a}\right)\right) / E(X) = q(x)$$

Donc (aX^*) et $(aX)^*$ ont la même densité

elles possèdent la même loi

c) Sous réserve de convergence, et par théorème du transfert

$$E(X h(X)) = \int_0^{+\infty} t h(t) f(t)\, dt$$

or h est bornée, il existe donc $\alpha > 0$ ~~car~~ ~~tel que~~ et ~~$\beta < 0$ tel que~~

$$h(t) < \alpha$$

$\forall t \geq 0$ $\quad t h(t) f(t) < \alpha t f(t)$

Car $\int_0^{+\infty} x t f(t)\, dt$ converge car X admet une espérance donc par comparaison de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$

$$\int_0^{+\infty} t h(t) f(t)\, dt \text{ converge}$$

D'après le théorème de transfert

$$E(h(X^*)) = \int_0^{+\infty} h(t) g(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{E(X)} \int_0^{+\infty} t h(t) f(t)\, dt$$

$$\boxed{E(h(X^*)) = \frac{1}{E(X)} E(X h(X))}$$

6)a) Si $x_1 \leq x_2$

alors par croissance de g et f sur $\mathbb{R}$

$$f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \leq 0$$

$$g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow g(x_1) - g(x_2) \leq 0$$

Donc $(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0$

• Si $x_2 \underset{\text{IR}}{<} x_1$, par croissance de f et g sur

$$f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$$
$$g(x_2) < g(x_1) \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) < 0$$

Donc $(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0$

b) $E((f(X_1) - f(X_2))(g(X_1) - g(X_2))$

$= E\big(f(X_1)g(X_1) - f(X_1)g(X_2) - f(X_2)g(X_1) + f(X_2)g(X_2)\big)$

par linéarité de l'espérance

~~$= E(f(X_1)g(X_1)) + E(f$~~

$= E(f(X_1)g(X_1)) + E(f(X_2)g(X_2))$
$\quad - E(f(X_1)g(X_2)) - E(f(X_2)g(X_1))$

or $E(f(X_1)g(X_1)) = E(f(X_2)g(X_2)) = E(f(X)g(X))$

et le lemme des coalitions assure que

~~$E(f(X_1)g(X_2)) = E(f(X_1) g(X_2)$~~ $=$

par indépendance de X_1 et X_2

$E(f(X_1)g(X_2)) = E(f(X_2)g(X_1)) = E(f(X))E(g(X))$

D'où

$$E((f(X_1)-f(X_2))(g(X_1)-g(X_2))$$

$$= \underline{2E(f(X)g(X)) - 2E(f(X))E(g(X))}$$

c) en appliquant le résultat de 6)a) à 6)b) on a

$$2E(f(X)g(X)) \geqslant 2E(f(X))E(g(X))$$

D'où $\boxed{E(f(X)g(X)] \geqslant E(f(X))E(g(X))}$

7) ~~Comme $1 \leqslant r < m$~~

On pose $\forall x \geqslant 0 \ f(x) = x^{m+1} + 1 - x^{r}$

f est C^1 sur $\mathbb{R}^+$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$\forall x \geq 0 \quad f'(x) = (m+1)x^m - r x^{r-1}$

$= x^{r-1}\left(x^{m-r+1}\cdot(m+1) - r\right)$

Or $f'(x) \geq 0 \Rightarrow x^{m-r+1}(m+1) - r > 0$

$x^{m-r+1} > \frac{r}{m+1}$

ii) On a ainsi

$0 \leq X^r \leq 1 + X^{m+1}$ comme $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

or comme $E(1+X^{m+1})$ existe car

$E(X^{m+1})$ existe alors

$\underline{E(X^r)}$ existe

2) $E(X^{m+1}) = E(X^m \cdot X)$

on applique 6)c) avec $f(x) = x^m$ qui est croissante

et $g(x) = x$ aussi croissante et on

a

$$E(X^m X) \geq E(X^m) \cdot E(X)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(X^{m+1}) \geq E(X)\, E(X^m)}$$

c) Ainsi en appliquant le résultat de la 5 avec $h(x) = x^m$

on a

$$E(h(X^*)) = \frac{1}{E(X)} E(X h(X))$$

$$\Leftrightarrow E((X^*)^m) = \frac{E(X^{m+1})}{E(X)}$$

d'après 7/b)

$$\boxed{E((X^*)^m) \geq E(X^m)}$$

8) a) $g_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]t, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

g_t est bien croissante sur $\mathbb{R}$

b) Ainsi

$$g_t(X) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow X g_t(X) \leq X$$

$X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

Donc comme $E(X)$ existe, par comparaison $E(X g_t(X))$ ~~est~~ existe

On remarque que $g_t(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in]t, +\infty) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

D'où $E(g_t(X)) = P(X>t)$

De nouveau, on applique 6)c) avec

$f(x) = x$ qui est croissante

et $g(x) = g_t(x)$ aussi croissante.

Ainsi

$$E(X g_t(X)) \geq E(X) E(g_t(X))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E(X g_t(X)) \geq E(X) P(X>t)}$$

c) On a, d'après le résultat précédent

$$P(X^* > t) = E(g_t(X^*))$$

on applique le résultat de la 5) avec

$h(x) = g_t(x)$ qui est <u>bornée et continue</u>

et $E(g_t(X^*)) = \dfrac{E(X g_t(X))}{E(X)}$

$$\Leftrightarrow P(X^* > t) = \frac{E(X g_t(X))}{E(X)} \geq P(X>t)$$

d'après 8)b)

Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 31 | Session : 2020

Épreuve de : Maths 2 ESSEC BS

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

D'où $P(X^* > t) \geq P(X > t)$

9) a) Par linéarité de l'espérance

$$E(S_m) = \sum_{i=1}^{m} E(X_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i$$

$$\boxed{E(S_m) = \mu}$$

b) Si les X_i sont de même loi

$$S_m = m X_1$$

$$P(J = k) = \frac{\mu_1}{m\mu_1} = \frac{1}{m}$$

$$\boxed{J \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, m]\!])}$$

c) i) $T_m = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq J}}^{m} X_i + X_J^*$

J ~~est~~ $J(\Omega) = [\![1, n]\!]$

D'où $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[J=i]} = 1$ lorsque $i = J$

Donc $h(T_n) = \sum_{i=1}^{n} h(T_n) \mathbb{1}_{(J=i)}$

Or $h(S_n - X_J + X_J^*) \mathbb{1}_{(J=i)} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ h(S_n - X_i + X_i^*) \text{ si } i = j \end{cases}$

D'où

$$\boxed{h(T_n) = \sum_{i=1}^{n} h(S_n - X_i + X_i^*) \mathbb{1}_{[J=i]}}$$

ii) $E(\mathbb{1}_{(J=i)}) = P(J=i)$

Par indépendance de J avec $X_1, X_1^*, \dots X_n, X_n^*$

et par linéarité de l'espérance et lemme des coalitions

$$E(h(T_n)) = \sum_{i=1}^{n} E(h(S_n - X_i + X_i^*)) E(\mathbb{1}_{(J=i)})$$

$$\Longrightarrow \boxed{E(h(T_n)) = \sum_{i=1}^{n} P(J=i)\, E(h(S_n - X_i + X_i^*))}$$

d) avec ~~h~~ ~~$h(x) =$~~

en appliquant le résultat de la

5 à $g(x) = h(s+x)$ où g bornée car h bornée

où X_i^* suit la loi biaisée de X_i

On a

$$E(h(s+X_i^*)) = \frac{E(X_i h(s+X_i))}{E(X_i)}$$

$$\boxed{E(h(s+X_i^*)) = \frac{E(X_i h(s+X_i))}{\mu_i}}$$

e) Ainsi

$$P(J=i) E(h(S_n - X_i + X_i^*)) = \frac{P(J=i)}{\mu_i} E(X_i h(S_n))$$

$$P(J=i) E(h(S_n - X_i + X_i^*)) = \frac{E(X_i h(S_n))}{\mu}$$

et d'après 9)c) ii)

$$E(h(T_n)) = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{n} E(X_i h(S_n)) = \frac{1}{\mu} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i h(S_n)\right)$$

$$= \frac{1}{\mu} E\left(h(S_n) \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$\boxed{E(h(T_n)) = \frac{1}{E(S_n)} E(S_n\, h(S_n))}$$

f) h étant bornée, continue sauf en un nombre fini éventuel de points (éventuellement)

l'égalité précédente assure que

Tn suit la loi de Sn biaisée par la taille

Troisième partie

10) a) Pour s_1 on a donc $\frac{1}{n}$ chance que $s_1 = a_1$

pour s_2, l'ensemble est réduit à $n-1$ éléments donc uniformément

$s_2 = a_2$ est de proba $\frac{1}{n-1}$

⋮

$s_m = a_m$ est de probabilité $= \frac{1}{n-m+1}$

Ainsi, si on prend ces éléments les uns après les autres

$$P(S=(a_1, \dots a_m)) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \dots \times \frac{1}{n-m+1}$$

$$\boxed{P(S=(a_1, \dots, a_m)) = \frac{(n-m)!}{(n!)}}$$

ii) La démarche est la suivante pour chaque entier on prend un réel et quelqu'un qu'on enlève après comme il y a n réel on a $n \times n-1 \times n-2 \cdots 1 = n!$
Or cela représente les différents combinaisons possibles
<u>ET</u> il faut l'égalité d'ensemble de probabilité :

$$P(S=(a_1, \dots a_m)) = \frac{(n-m)!}{n\cancel{?}!}$$

D'où $$\boxed{P(R=A) = \frac{m!(n-m)!}{n!}}$$

e) $U(\Omega) = [0,1[$

donc $(nU)(\Omega) = [0,n[$

$\lfloor nU \rfloor (\Omega) = [\![0,n-1]\!]$

et $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$ $P(X=k) = P(\lfloor nU \rfloor = k-1)$

$= P(k-1 \leq nU < k)$

$= P\left(\frac{k-1}{n} \leq U < \frac{k}{n}\right)$

$= F_U\left(\frac{k}{n}\right) - F_U\left(\frac{k-1}{n}\right)$

or $k \leq n$ donc $\frac{k}{n} \leq 1$

et $\frac{k-1}{n} \leq 1$

D'où $P(X=k) = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}$

$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k) = \frac{1}{n}}$

c) function X = Uniforme (n)

X = 1 + floor (n * rand())

endfunction

d) function [x, W] = Selection (V)

n = length

j = uniforme (n)

x = V(j)

W = V

W(j) = 0

endfunction

e) for i = 1:m

R = uniforme (n)

R = [R,]

end

endfunction

~~14~~ 13)

10) ii) $P(R=A) = \frac{1}{\binom{n}{m}}$

$$\boxed{P(R=A) = \frac{m!(n-m)!}{n!}}$$

11) iv) $E(X) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{A \in \mathcal{P}_m} \frac{1}{m} \sum_{i \in A} x_i = \frac{\binom{n}{m}^{-1}}{m} \binom{n-1}{m-1} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Or $\frac{m!\,(n-m)!}{n!\,m} \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} = \frac{1}{n}$

Donc $\frac{\binom{n}{m}^{-1}}{m} \binom{n-1}{m-1} = \frac{1}{n}$

et $E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\boxed{E(X) = \bar{x}}$$

v) $\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$

$$\boxed{\Theta = \frac{E(Y)}{E(X)}}$$

b) $Q_R = \frac{Y}{X} = \frac{\bar{y}\,n}{\bar{x}\,n}$

D'où $\boxed{E(Q_R) = E\left(\frac{Y}{X}\right)}$

c) i) en prenant $W = \sqrt{X}$ et $Z = \frac{1}{\sqrt{X}}$
toutes deux strictement positives

$E(1) \leq \left(E(X)\, E\left(\frac{1}{X}\right)\right)^{1/2}$

et par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$

$\Leftarrow 1 \leq E(X)E(1/X)$

$\Leftarrow \boxed{E(1/X) \geqslant 1/E(X)}$

ii) il y a égalité si et seulement si il existe α tel que $W = \alpha Z$

$\Leftarrow \sqrt{X} = \alpha \frac{1}{\sqrt{X}} \Leftarrow \boxed{X = \alpha}$

iii)

d) Si X et Y sont indépendants, alors le lemme des coalitions assure que Y et $\frac{1}{X}$ sont indépendants

Code épreuve : 287 Nombre de pages : 31 Session : 2020

Épreuve de : Maths 2 ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$E(Q_R) = \frac{E(Y)}{E(X)} = E(Y) \times E(1/X)$$

or $E(1/X) \geq \frac{1}{E(X)}$

$\times E(Y) > 0$

$$\Rightarrow E_{Q}(R) \geq \frac{E(Y)}{E(X)} = Q$$

avec égalité d'après iii) si et seulement si ~~...~~ $x_i = \bar{x}$ pour tout i

12) a) i) $(J=i)_{i \in A}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R=A) = \sum_{i \in A} P(J=i) P_{(J=i)}(R=A)$$

or $P_{(J=i)}(R=A) = P_{(J=i)}(V = A \setminus \{i\})$

car on choisit les $m-1$ clients parmi les $n-1$ clients différents de $J=i$

D'où

$$\boxed{P(R=A) = \sum_{i\in A} P(J=i)\, P_{(J=i)}(V=A\setminus\{i\})}$$

ii) $P(R=A) = \sum_{i\in A} P(J=i) \dfrac{1}{\binom{n-1}{m-1}}$

or $\sum_{i\in A} P(J=i) = \sum_{i\in A} x_i \Big/ \sum_{k=1}^{n} x_k$

$$\sum_{i\in A} P(J=i) = \frac{m\,\bar{x}_A}{n\,\bar{x}}$$

or $\dfrac{m}{n}\binom{n-1}{m-1}^{-1} = \dfrac{\cancel{m(m-1)!}\,(n-m)!}{n(n-1)!\,\cancel{(n-m)!}}$

$= \dfrac{m\,(m-1)!\,(n-m)!}{n\,(n-1)!} = \dfrac{m!\,(n-m)!}{n!} = \dfrac{1}{\binom{n}{m}} = \cancel{\dfrac{m!\,(}{n!\,(n-m)!}} = ($

D'où $\boxed{P(R=A) = \dfrac{\bar{x}_A}{\binom{n}{m}\,\bar{x}}}$

13) a)

b) Ainsi $E(\hat{\theta}_R) = \binom{N}{n}^{-1} \sum_{A \in P_n} \bar{y}_A / \bar{x}$

$$= \bar{y} / \bar{x}$$

$$= E(Y)/E(X)$$

$$\boxed{E(\hat{\theta}_R) = \theta}$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 2019-12-PF 018 751