Code épreuve : 287	Nombre de pages : 17	Session : 2020

T9-00153
792052
Maths 2E

Épreuve de : Mathématiques - ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Première Partie :

1) a) i) . $\forall k \in [\![0;10]\!],\ p_k = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}$

1) a) ii) . $E(X) = 2$

1) a) iii) . $V(X) = \frac{8}{5}$

. Or, $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Donc $E(X^2) = \frac{8}{5} + 4$

$\Rightarrow E(X^2) = \frac{28}{5}$

1) b) i) . M_k est le nombre de familles à k enfants.

$\Rightarrow$ pour chacune de ces familles, il y a k enfants qui font partie d'une famille de k enfants.

. Alors $N_k = k M_k \Rightarrow N_k = k p_k M$

1) b) ii) . $N/M = \left[\sum_{k=0}^{10} N_k\right] \times \frac{1}{M}$

• Donc $\frac{N}{M} = \sum_{k=0}^{10} k p_k \Rightarrow \frac{N}{M} = E(X)$

$\Rightarrow \frac{N}{M} = 2$

1)b) ii) • Cette proportion est le rapport entre le nombre d'enfants de famille à k enfants et le nombre total d'enfants.

• Donc $p_k^* = N_k / N \underset{\text{d'après 1)b)i)}}{=} k p_k M / N$

• Or, d'après 1) b) ii) :

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{2}$$

• Alors $p_k^* = k p_k / 2$

1) c) i) • Par équiprobabilité, $\forall k \in [\![1;10]\!]$, $P(Y=k)$ est égal à la proportion d'enfants de famille de k enfants.

• Ainsi, $\forall k \in [\![1;10]\!], P(Y=k) = k p_k / 2 = p_k^*$

1) c) ii)

• $E(Y) = \sum_{k=1}^{10} k P(Y=k) = \sum_{k=1}^{10} k^2 p_k / 2$

• Or, $E(X^2) = \sum_{k=0}^{10} k^2 p_k = \sum_{k=1}^{10} k^2 p_k$

• Donc, $E(Y) = E(X^2)/2$

$\Rightarrow E(Y) = E(X^2) / E(X)$

1) c) iii) • Finalement, $E(Y) = \frac{28}{5} \times \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \underline{\underline{E(Y) = \frac{14}{5}}}$

• Or, $28 > 14 \Rightarrow \frac{28}{5} > \frac{14}{5}$

car $\frac{1}{5} > 0$

• Donc, $\underline{\underline{E(Y) < E(X)}}$

2) a)

• $\sum_{i=1}^{+\infty} q_i = \frac{1}{E(X)} \sum_{i=1}^{+\infty} i\, P(X=i) = \frac{E(X)}{E(X)}$

• Donc, $\underline{\underline{\sum_{i=1}^{+\infty} q_i = 1}}$

2) b)

• $E(X^*) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\, P(X^*=i) = \left[\sum_{i=1}^{+\infty} i^2 P(X=i)\right] \times \frac{1}{E(X)}$

• Alors, $\underline{\underline{E(X^*) = E(X^2)/E(X)}}$ Si X admet un moment d'ordre 2.

2) c)

• Si $E(X^2)$ existe :

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ Or, $E(X^2) = E(X^*)E(X)$

$\Rightarrow V(X) = E(X^*)E(X) - E(X)E(X)$

• Ainsi, si $E(X^2)$ existe, alors : $\underline{\underline{V(X) = E(X)[E(X^*) - E(X)]}}$

2) d)

• Or, $(X^*)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow E(X) > 0$ et $V(X) \geq 0$

. Alors on a : $V(X) \geq 0$ et $E(X) \geq 0$

$\Rightarrow E(X^*) - E(X) \geq 0$

. Donc $E(X^*) \geq E(X)$

3) a) i) . $X(\Omega) = \mathbb{N} \Rightarrow X^*(\Omega) = \mathbb{N}$ (a priori)

. $\forall k \in \mathbb{N}, P(X^* = k) = \frac{k}{E(X)} P(X = k)$

soit $P(X^* = k) = \frac{k}{\lambda} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\Rightarrow X^*(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$\lambda \neq 0$ et $P(X^* = 0) = 0$

. Ainsi,

$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X^* = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ $\Rightarrow$ j'ai mis $\mathbb{N}^*$ pour ne pas avoir de problème avec $(k-1)!$

3) a) ii) . $(X+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ Or, $(X^*)(\Omega) = \mathbb{N}^*$

. $\forall i \in \mathbb{N}^*, P(X+1 = i) = P(X = i-1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$

. On a bien :

$\forall i \in \mathbb{N}^*, P(X+1 = i) = P(X^* = i)$

Donc X^* suit la même loi que $X+1$

3) b) i) . On a, $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X^* = k) = P(X+1 = k)$

$\Rightarrow \frac{k}{E(X)} P(X = k) = P(X = k-1)$

. Alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{E(X)}{k} P(X = k-1)$

3) b) ii) • pour $k=0$: $P(X=0) = \dfrac{E(X)^0}{0!} P(X=0)$

• Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Je suppose que $P(X=k) = \dfrac{E(X)^k}{k!} P(X=0)$

Or, $P(X=k+1) = \dfrac{E(X)}{k+1} P(X=k)$ d'après 3) b) i)

Donc
$$P(X=k+1) = \frac{E(X)^{k+1}}{(k+1)!} P(X=0)$$

• Ainsi, par principe de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X=k) = \frac{E(X)^k}{k!} P(X=0)$$

3) b) iii) • J'aimerais prouver que $P(X=0) = e^{-E(X)}$

pour affirmer que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(E(X))$

• Mais je n'y arrive pas.

4) a) i) • $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} j P_{[X=k]}(T=j) = \sum_{j=1}^{k} j/k$

• Or, $\dfrac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} j = \dfrac{1}{k} \times \dfrac{k(k+1)}{2}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

- Donc,

$$\forall k \in [\![1 ; n]\!], \sum_{j=1}^{n} j P_{(X=k)}(T=j) = (k+1)/2$$

4) a) ii)

- J'admets que $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j P(X=k) P_{(X=k)}(T=j) = \frac{E(X+1)}{2}$

4) a) iii)

- On a $(X=k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ un système complet d'événement.

- Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\forall j \in [\![1;n]\!], P(T=j) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k, T=j) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k) P_{(X=k)}(T=j)$$

- Or, $E(T) = \sum_{j=1}^{n} j P(T=j)$

- Donc,

$$E(T) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} j P(X=k) P_{(X=k)}(T=j)$$

4) a) iv). Les propriétés des doubles sommes permettent :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} j P(X=k) P_{(X=k)}(T=j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j P(X=k) P_{(X=k)}(T=j)$$

- Dès lors, $E(T) = \frac{E(X+1)}{2}$

4) b) i)

- Pareillement : $\forall k \in [\![1;n]\!], \sum_{j=1}^{n} j P_{[X^*=k]}(T^*=j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k} = \frac{k+1}{2}$

4) b) ii) • On a $(X^* = k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ un système complet d'événements

• Donc : $\forall j \in [\![1;n]\!]$, $P(T^* = j) = \sum_{k=1}^{n} P(X^* = k) P_{(X^* = k)}(T^* = j)$

• Or, $E(T^*) = \sum_{j=1}^{n} j P(T^* = j)$

• Ainsi,

$$\underline{\underline{E(T^*) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} j P(X^* = k) P_{(X^* = k)}(T^* = j)}}$$

4) b) iii) • J'admets que $E(T^*) = \frac{E(X^* + 1)}{2}$

4) b) iv)

• On a : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $P(X^* = i) = \frac{i}{E(X)} P(X = i)$

• J'admets que $E(T^*) \geqslant E(T)$

Deuxième partie :

5) a) • $\forall x < 0$, $g(x) = 0$

$\forall x \geqslant 0$, $g(x) = \frac{x}{E(X)} f(x)$

Or, $\forall x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ (en tant que densité)

et $E(X) > 0$ et $x \geqslant 0$

Donc $\forall x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$

Ainsi g est positive sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$

• g est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (f étant une densité et $E(X)$ un réel)

• sous réserve de convergence absolue : $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \frac{1}{E(X)} \int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$

- Or, $\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt \underset{\text{car } f \text{ est densité d'une variable positive}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt \underset{\text{converge absolument car } E(X) \text{ existe}}{=} E(X)$

- Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge absolument et vaut 1

- Ainsi, g est une densité d'une variable positive

5) b) i) Soit $a > 0$

- $X(\Omega) = \mathbb{R}_+ \Rightarrow aX(\Omega) \underset{\text{car } a>0}{=} \mathbb{R}_+$

- Soit F_X la fonction de répartition de X

- $\forall x < 0,\ P(aX \leq x) = 0$
- $\forall x \geq 0,\ P(aX \leq x) \underset{\text{car } a>0}{=} P\left(X \leq \frac{x}{a}\right) \underset{\text{car } a>0}{=} F_X\left(\frac{x}{a}\right)$

- Or, F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de répartition d'une variable à densité.

- Donc la fonction de répartition de aX est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

- Ainsi, aX est à densité et admet pour densité f' :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) \text{ sinon} \end{cases}$$

- Or, $\forall x < 0,\ \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) = 0$

Code épreuve : 287	Nombre de pages : 17	Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques - ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code T9-00153 792052

• Donc aX possède pour densité $x \to \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$

5) b) ii)

• La densité de $(aX)^*$ est donc $x \to \frac{x}{E(aX)} \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$

soit par linéarité de l'espérance : $x \to \frac{x}{E(X)} \frac{1}{a^2} f\left(\frac{x}{a}\right)$

• Or, X^* est positive d'après 5)a). Donc nos calculs de 5)b)i) restent valables

avec F_{X^*} la fonction de répartition de X^*,

on trouve : aX^* possède pour densité $x \to \frac{1}{a} g\left(\frac{x}{a}\right)$

Soit $x \to \frac{1}{a} \frac{\frac{x}{a}}{E(X)} f\left(\frac{x}{a}\right)$ ou encore $x \to \frac{x}{E(X)} \frac{1}{a^2} f\left(\frac{x}{a}\right)$

• Donc on a $(aX)^*$ et aX^* qui possèdent une densité égale

Alors elles possèdent la même loi.

5)c) • h est bornée $\Rightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) \in [a;b]$

• d'après le théorème de transfert :

$E(Xh(X)) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t\, h(t) f(t) \, dt\right]$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On, $t \to t h(t) f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en certains points comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

. En outre, X admet une espérance $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge absolument et h est bornée $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) f(t)\,dt$ converge absolument

. Ainsi, $E(X h(X))$ existe $) \to$ ma justification semble insuffisante

. Par ailleurs, $E(h(X^*)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, g(t)\,dt$

$$\Rightarrow E(h(X^*)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \frac{t}{E(X)} f(t)\,dt = \frac{1}{E(X)} \int_{-\infty}^{+\infty} t h(t) f(t)\,dt$$

. Donc, $E(h(X^*)) = \frac{1}{E(X)} E(X h(X))$

6) a) . f est croissante sur $\mathbb{R} \Rightarrow \left[\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\right]$

. On a de même pour g.

. 1er cas : Soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \leq x_2$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \quad \text{et} \quad g(x_1) - g(x_2) \leq 0$$

$$\Rightarrow [f(x_1) - f(x_2)][g(x_1) - g(x_2)] \geq 0$$

2ème cas: Soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \geq x_2$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \geq 0 \quad \text{et} \quad g(x_1) - g(x_2) \geq 0$$

$\Rightarrow \quad [f(x_1) - f(x_2)][g(x_1) - g(x_2)] \geq 0$

- Ainsi, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad [f(x_1) - f(x_2)][g(x_1) - g(x_2)] \geq 0$

6) b)

- $E((f(X_1) - f(X_2))(g(X_1) - g(X_2))) = E[f(X_1)g(X_1) - f(X_1)g(X_2) - f(X_2)g(X_1) + f(X_2)g(X_2)]$

Soit par linéarité de l'espérance :

$$E[(f(X_1) - f(X_2))(g(X_1) - g(X_2))] = 2E(f(X)g(X)) - 2E(f(X))E(g(X))$$

par indépendance de X_1 et X_2 (pour la partie droite) et car elles suivent la loi de X

6) c)

- d'après 6) a) : $[(f(X_1) - f(X_2))(g(X_1) - g(X_2))](\Omega) = \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow E[(f(X_1) - f(X_2))(g(X_1) - g(X_2))] \geq 0$

$\Rightarrow \quad E[f(X)g(X)] \geq E(f(X))E(g(X))$

7) a) i) Soit $p \in [\![1 ; m]\!]$:

- $\forall x \geq 0, \quad x^p \geq 0$ (propriétés de la puissance)

- J'admets que $0 \leq x^p \leq 1 + x^{m+1}$

7) a) ii) . Or, $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Donc $\quad 0 \leq X^p \leq 1 + X^{m+1}$

- Alors, par croissance de l'espérance : (sous réserve d'existence)

$E(0) \leq E(X^p) \leq E(1 + X^{m+1})$

Soit par linéarité :

$$0 \leq E(X^p) \leq 1 + E(X^{m+1})$$

. Or, $E(X^{m+1})$ existe

. Donc $\underline{\underline{E(X^p) \text{ existe}}}$ par encadrement (l'espérance étant une limite soit d'une intégrale, soit d'une somme)

7) b)

- d'après 6) c) : avec f l'application $x \to x$

et g l'application $x \to x^m$

. On a : $E[f(X)]$ et $E(g(X))$ et $E(f(X)g(X))$ bien définies

Donc on peut utiliser le résultat :

$$E(f(X)g(X)) \geq E(f(X))E(g(X))$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E(X^{m+1}) \geq E(X)E(X^{m+1})}}$$

7) c)

- avec h l'application $x \to x^m$: d'après la définition introduite :

$$E(h(X^*)) = \frac{1}{E(X)} E(X\,h(X))$$

$$\Rightarrow E((X^*)^m) = \frac{1}{E(X)} E(X^{m+1})$$

. Or, $E(X^{m+1}) \geq E(X)E(X^m)$

. Donc, $\underline{\underline{E((X^*)^m) \geq E(X^m)}}$

Code épreuve : 287 | Nombre de pages : 17 | Session : 2020

Épreuve de : Mathématiques - ESSEC

T9-00153
792052

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

8) a) . $\forall x \in \mathbb{R},\ g_t(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > t \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

. Ainsi, g_t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle.

j'ai dû mal comprendre.

. J'admets que $x \to g_t(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$

8) b)

8) c)

9) a) . $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

linéarité de l'espérance

. Donc $E(S_n) = \mu$

9) b)

. Si les variables (X_i) sont de même loi, alors :

$\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(J=k) = E(X_k)/E(S_n) = E(X_1)/nE(X_1)$

$\Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!],\ P(J=k) = \frac{1}{n} \Rightarrow J \hookrightarrow U([\![1;n]\!])$

9)c)i). $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $!\exists\, i \in [\![1;n]\!]$, $(J=i)$

$\Rightarrow \forall k \in [\![1;n]\!] \neq i$, $\mathbb{1}_{[J=k]} = 0$

et pour $k = i$, $\mathbb{1}_{[J=k]} = 1$

- Ainsi, $h(T_n) = \sum_{i=1}^{n} h(T_n)\, \mathbb{1}_{[J=i]}$

et $\sum_{i=1}^{n} h(S_n - X_i - X_i^*)\, \mathbb{1}_{[J=i]} = h(S_n - X_j - X_j^*)$

avec j tel que $J=j$

- Mais je ne parviens pas à conclure

- Donc J'admets que $h(T_n) = \sum_{k=1}^{n} h(S_n - X_i - X_i^*)\, \mathbb{1}_{[J=i]}$

9) c) ii)

- J'admets que $E(h(T_n)) = \sum_{i=1}^{n} P(J=i)\, E(h(S_n - X_i + X_i^*))$

9) d)

- J'admets que $E(h(0 + X_i^*)) = \frac{1}{\mu_i} E(X_i\, h(0 + X_i))$

9) e)

- $E(h(S_n - X_i + X_i^*)) = \frac{1}{\mu_i} E(X_i\, h(S_n))$

$\Rightarrow E(h(T_n))$

- J'admets que $E(h(T_n)) = E(S_n\, h(S_n)) / E(S_n)$

9) f) - On a $E(S_n) > 0$ car $E(S_n) = \mu = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Or, $E(X_i) > 0 \ \forall i \in [\![1;n]\!]$

- Donc on peut conclure de 9) e) que :

T_n suit la loi de S_n biaisée par la taille

Troisième partie :

10) a) i) Soit $m \in [\![1;n]\!]$.

- Si $(S=(a_1,\dots,a_m))$ est réalisé, alors on a tiré ces m entiers distincts parmi les n de la liste.

- Alors, $P(S=(a_1,\dots,a_m)) \underset{\text{par équiprobabilité}}{=} \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

- J'admets que $P(S=(a_1,\dots,a_m)) = \frac{(n-m)!}{n!}$

10) a) ii)

- L'ordre de tirage n'importe plus.

- J'admets que $P(R=A) = \frac{m!\,(n-m)!}{n!}$

10) b)

- $U(\Omega) = [0;1[\Rightarrow nU(\Omega) = [0;n[\Rightarrow \lfloor nU\rfloor(\Omega) = [\![0;n-1]\!]$

$\Rightarrow X(\Omega) = [\![1;n]\!]$

- $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P(X=k) = P(\lfloor nU\rfloor = k-1)$

$\Rightarrow P(X=k) = P(k-1 \leq nU < k) = F_U\left(\frac{k}{n}\right) - F_U\left(\frac{k-1}{n}\right)$

F_U la fonction de répartition de U sachant $n>0$

$\Rightarrow P(X=k) = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}$

car $k \leq n \Rightarrow \frac{k}{n} \leq 1$ et $\frac{k-1}{n} < 1$

et $\frac{k}{n} > 0$ et $\frac{k-1}{n} > 0$

Alors $\forall k \in [\![1;n]\!], P(X=k) = \frac{1}{n}$

. On a bien $\underline{\underline{X \hookrightarrow U([\![1;n]\!])}}$

10) c)
```
function x = Uniforme(n)
   x = 1+ floor(n* rand())
endfunction
```

10) d) ~~function [x, W] = Selection(V)~~
~~m = length(V)~~
~~U = (Uniforme(n))~~
~~for k = 1 : U-1~~
~~W = [W(k)~~

```
function [x, W] = Selection(V)
   m = length(V)
   U = Uniforme(m)
   W = 1:m-1          // si cette ligne est illisible : "W=1:m-1"
   for k = 1 : U-1
       W(k) = V(k)    // de même : "W(k) = V(k)
   end
   for k = U+1 : m
       W(k) = V(k)
   end
   x = V(U)
endfunction
```

10) e)
```
function R = Choix(m, n)
    V = 1:n
    R = [ ]
    for i = 1 : m
        U = Selection(V)        // de même : "U = Selection(V)"
        R = [R, (Selection(V))(1)]
        V = (Selection(V))(2)
    end
endfunction
```

Code épreuve : 287 **Nombre de pages :** 17 **Session :** 2020

Épreuve de : Mathématiques - ESSEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

11) a) i)

11) a) ii)

11) a) iii)

11) a) iv). J'admets que $E(X) = \bar{x}$

11) a v) . $\theta_R = \bar{y}_R / \bar{x}_R$ est estimateur de θ

$\Rightarrow \theta = \dfrac{E(Y)}{E(X)}$

11) b) . J'admets que $E(\theta_R) = E\left(\dfrac{Y}{X}\right)$

11) c) i) J'admets que $E(1/X) \geq 1/E(X)$

11) c) ii) J'admets

11) c) iii)

$\forall i \in R, x_i = \bar{x} \Leftrightarrow \sum_{i \in R} x_i = m \Leftrightarrow \bar{x}_R = 1$

12) d) . par indépendance de X et Y :

$E(\theta_R) = E\left(\dfrac{Y}{X}\right) = \dfrac{E(Y)}{E(X)}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

/