MATHÉMATIQUES - Edhec E 2018

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est évidemment non-inversible car ses deux colonnes sont proportionnelles ($C_2 = 2.C_1$).

2. Les valeurs propres de A sont les réels λ tels que $A - \lambda.I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$ est non-inversible.

   Comme A est une matrice carrée d'ordre 2, on peut utiliser le critère du déterminant :

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \det(A-\lambda.I_2) = 0 \iff (1-\lambda)(6-\lambda)-3\times 2 = 9 \iff 6-\lambda-6\lambda+\lambda^2-6 = 0 \iff \lambda^2-7\lambda = 0$$

   Les deux racines évidente de cette équation sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 7$.

   Calcul des deux sous-espaces propres :

   - $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff AX = 0_{2,1} \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \iff x = -2y,$

     donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

   - $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_7(A) \iff (A - 7.I_2)X = 0_{2,1} \iff \begin{cases} -6x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \iff y = 3x,$

     donc $E_7(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

   Dans les deux cas on a obtenu une famille génératrice du sous-espace propre constituée d'un seul vecteur non nul, donc une base de celui-ci.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = AM$$

3. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $f(M) = AM$ appartient encore à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme produit de deux matrices carrées d'ordre 2.

   Pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ :

$$f(\lambda.M + N) = A \times (\lambda.M + N) = \lambda.AM + AN = \lambda.f(M) + f(N)$$

   donc f est linéaire : f est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(M) = 0_2 \iff AM = 0_2 \iff \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+6z & 3y+6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2z & = & 0 \\ y & + & 2t & = 0 & \end{array} \right. \iff \begin{cases} x & = -2z \\ y & = -2t \end{cases} \quad \text{par redondance de deux lignes}$$

Ainsi : $\quad \mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix} \middle| \ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)$ est engendré par une famille de deux vecteurs non-colinéaires : il s'agit bien d'une base du noyau, et $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$.

b) Le théorème du rang pour l'endomorphisme f donne :

$$\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) \iff \dim \mathrm{Im}(f) = 4 - 2 = 2$$

c) On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- $f(E_1) = AE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = E_1 + 3.E_3$
- $f(E_2) = AE_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E_2 + 3.E_4$
- $f(E_3) = AE_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 2.E_1 + 6.E_3$
- $f(E_4) = AE_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 2.E_2 + 6.E_4$

D'après la propriété du cours, puisque (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\big(f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)\big) = \mathrm{Vect}(E_1 + 3.E_3, E_2 + 3.E_4, 2.E_1 + 6.E_3, 2.E_2 + 6.E_4) \\ &= \mathrm{Vect}(E_1 + 3.E_3, E_2 + 3.E_4) \end{aligned}$$

en supprimant les deux derniers vecteurs, redondants car colinéaires aux deux premiers.
On a ainsi obtenu une famille génératrice de deux vecteurs : comme $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$, il s'agit bien d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.

5. a) Par linéarité de f :

$$f(E_1 + 3.E_3) = f(E_1) + 3.f(E_3) = E_1 + 3.E_3 + 6.E_1 + 18.E_3 = 7.E_1 + 21.E_3 = 7.(E_1 + 3.E_3)$$

$$f(E_2 + 3.E_4) = f(E_2) + 3.f(E_4) = E_2 + 3.E_4 + 6.E_2 + 18.E_4 = 7.E_2 + 21.E_4 = 7.(E_2 + 3.E_4)$$

b) Faisons le bilan des valeurs propres déjà obtenues :

- On a vu que 0 est valeur propre de f, de sous-espace propre associé $\mathrm{Ker}(f)$ qui est de dimension 2.

- On vient de voir que $E_1 + 3.E_3$ et $E_2 + 3.E_4$ sont vecteurs propres de f pour la valeur propre 7 : comme ceux deux vecteurs propres sont non-colinéaires, ils forment une famille libre et par conséquent, $\dim E_7(f) \geqslant 2$.

Or d'après le théorème spectral : $\dim E_0(f) + \dim E_7(f) \leqslant 4$. Comme on vient de voir que $\dim E_0(f) + \dim E_7(f) \geqslant 4$, alors :
$\dim E_0(f) + \dim E_7(f) = 4$, et on en déduit que :

- Les réels 0 et 7 sont les seules valeurs propres de f : $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 7\}$.

- Les deux sous-espaces propres sont chacun de dimension 2, et f est diagonalisable puisque $\dim E_0(f) + \dim E_7(f) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

6. Généralisation : f est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que f et A possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

   a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre associé.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vecteur propre de A pour la valeur propre λ : alors $X \neq 0_{2,1}$, ce qui est équivalent au fait que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

   Alors : $X\,{}^{t}X = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2, non nulle parce que l'un des deux coefficients x^2 ou y^2 est non nul, et :

$$f(X\,{}^{t}X) = AX\,{}^{t}X = (AX)\,{}^{t}X = \lambda.X\,{}^{t}X$$

   ce qui suffit à prouver que $X\,{}^{t}X$ est vecteur propre de f pour la valeur propre λ.

   b) Soit λ une valeur propre de f et M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vecteur propre de f associée à cette valeur propre.

   D'après les règles du calcul matriciel : si on note C_1 et C_2 les colonnes de M, alors l'égalité $f(M) = \lambda.M \iff AM = \lambda.M$ est équivalente au fait que $AC_1 = \lambda.C_1$ et $AC_2 = \lambda.C_2$.

   Il reste à bien dire que puisque M est non nulle comme vecteur propre, alors l'un de ses coefficients est non nul, donc l'une des deux colonnes C_1 et C_2 est non nulle et les relations précédentes prouvent que cette colonne non nulle, est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

   On a bien démontré l'équivalence : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, donc A et f ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 2

1. a) Le calcul de la probabilité d'obtenir Pile dès le premier lancer prend en compte les trois possibilités pour le choix de la pièce, via la formule des probabilités totales avec le s.c.e. (A_0, A_1, A_2) :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(A_0) \times P_{A_0}(X=1) + P(A_1) \times P_{A_1}(X=1) + P(A_2) \times P_{A_2}(X=1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   b) Pour tout entier $n \geqslant 2$, toujours d'après la formule des probabilités totales avec le même s.c.e. :

$$P(X=n) = P(A_0) \times P_{A_0}(X=n) + P(A_1) \times P_{A_1}(X=n) + P(A_2) \times P_{A_2}(X=n)$$

   Or cette fois : $P_{A_1}(X=n)$ est toujours nulle puisque la pièce numéro 1 donne Face à coup sûr, elle ne donnera donc jamais Pile.

$P_{A_2}(X=n)$ est aussi nulle : la pièce numéro 2 donnant Pile à coup sûr, le premier Pile sera forcément obtenu au premier lancer, donc jamais plus tard !

$P_{A_0}(X=n)$ est la probabilité d'obtenir $n-1$ Face, puis un Pile au n-ième lancer avec la pièce numéro 0 : une fois la pièce choisie, les lancers deviennent indépendants,

donc $P_{A_0}(X=n) = P_{A_0}(F_1) \times P_{A_0}(F_2) \times \ldots \times P_{A_0}(F_{n-1}) \times P_{A_0}(P_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On obtient bien :

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(X=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) Par définition d'une variable aléatoire, et de son système complet d'événements associé, on sait que puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1 \iff P(X=0) = 1 - P(X=1) - \sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\iff P(X=0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{(\frac{1}{2})^2}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times 2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

A posteriori ce résultat est assez logique : la seule façon raisonnable de n'obtenir que des Face, indéfiniment, est de prendre la pièce 1, ce qui arrive avec la probabilité $\frac{1}{3}$. La pièce 2 ne donnera jamais Face et il est presque sûr que la pièce 0, équilibrée, finira par donner un premier Pile !

2. La variable aléatoire X, d'univers-image $\mathbb{N}$, admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geqslant 0} kP(X=k)$, est absolument convergente. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, la convergence simple suffit ; or pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = 0.P(X=0) + 1.P(X=1) + \sum_{k=2}^{n} k.P(X=k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$ qui appartient à $]0;1[$, donc X admet une espérance qui vaut :

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right)$$

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 3 = 1$$

3. D'après le théorème de transfert : $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geqslant 0} k(k-1)P(X=k)$ est absolument convergente. C'est une série à terme positifs, et même nuls $k=0$ et $k=1$, donc il suffit d'étudier sa convergence simple.

Pour tout $n \geqslant 2$, $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X=k) = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{12}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$.

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois, convergente car de raison $\frac{1}{2} \in]-1;1[$.

Ainsi $E\big(X(X-1)\big)$ existe, et vaut :

$$E\big(X(X-1)\big) = \frac{1}{12}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{1}{12} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{12} \times 2 \times 8 = \frac{4}{3}$$

On sait enfin que $X^2 = X(X-1) + X$, donc par linéarité de l'espérance, X admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$E(X^2) = E\big(X(X-1)\big) + E(X) = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

Et X admet enfin une variance, donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$$

4. La variable aléatoire Y compte, comme X, le temps d'attente d'un premier côté de la pièce, mais les rôles du "Pile" et du "Face" sont ici échangés. Or dans leur ensemble, les caractéristiques des trois pièces sont symétriques : l'une donne Face avec la probabilité $1/2$, une autre avec la probabilité 0, la dernière avec la probabilité 1.

   Les calculs seront donc identiques et on peut affirmer sans les faire, que Y suit la même loi que X.

5. a) Pour tout entier $j \geqslant 2$: l'événement $[X = 1] \cap [Y = j]$ signifie que le premier Pile a été obtenu dès le premier lancer, et que le premier Face n'est survenu, lui, qu'au j-ième lancer. Cela est possible si et seulement si les $(j-1)$ premiers lancers ont donné Pile, et le j-ième Face : mais ceci correspond aussi à la description du seul événement $[Y = j]$! L'égalité d'événement $[X = 1] \cap [Y = j] = [Y = j]$ entraîne l'égalité de leurs probabilités :

$$\forall j \geqslant 2, \quad P\big([X = 1] \cap [Y = j]\big) = P(Y = j)$$

   b) De la même façon, pour tout entier $i \geqslant 2$: l'événement $[X = i] \cap [Y = 1]$ est réalisé si et seulement si les $(i-1)$ premiers lancers ont donné Face, et le i-ème a donné Pile, ce qui correspond à la description du seul événement $[X = i]$:

$$\forall i \geqslant 2, \quad P\big([X = i] \cap [Y = 1]\big) = P(X = i)$$

6. Loi de $X + Y$.

   a) Les variables aléatoires X et Y étant à valeur dans $\mathbb{N}$, il en est de même pour $X + Y$: $(X + Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Plus précisément : quel que soit le résultat du premier lancer, l'une des deux variables aléatoires X ou Y va prendre la valeur 1, donc $[X + Y = 0]$ est impossible.

   L'événement $[X + Y = 1] = \big([X = 0] \cap [Y = 1]\big) \cup \big([X = 1] \cap [Y = 0]\big)$ est parfaitement réalisable, il suffit pour cela que l'une des deux pièces numéro 1 ou 2 soit choisie.

   Les trois seules possibilités pour que $[X + Y = 2]$ soit réalisé sont :

   $\star$ $[X = 0] \cap [Y = 2]$, mais $[Y = 2]$ implique $[X = 1]$, donc est incompatible avec $[X = 0]$
   $\star$ $[X = 1] \cap [Y = 1]$ mais il est impossible que le premier lancer donne les deux faces de la pièce en même temps... !
   $\star$ $[X = 2] \cap [Y = 0]$, qui est là encore impossible puisque $[X = 2]$ implique $[Y = 1]$.

   Donc $[X + Y = 2]$ est impossible.

   Enfin, pour tout entier $n \geqslant 3$: $[X + Y = n]$ est réalisé dès que, par exemple, on obtient $(n-2)$ Piles puis un Face (on a alors $X = 1$ et $Y = n - 1$) ou le contraire.

   On a donc bien démontré que $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0; 2\}$.

   b) Comme on vient de l'expliquer : $(X + Y = 1] = \big([X = 0] \cap [Y = 1]\big) \cup \big([X = 1] \cap [Y = 0]\big)$.

   L'union est disjointe, et de la même façon qu'à la question 5., on constate que :

   $[X = 0]$ implique $[Y = 1]$, donc $[X = 0] \cap [Y = 1] = [X = 0]$, et de même, $[Y = 0]$ implique $[X = 1]$, donc $[Y = 0] \cap [X = 1] = [Y = 0]$.

   Ainsi : $P(X + Y = 1) = P(X = 0) + P(Y = 0) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ puisque X et Y ont la même loi (cf. question 4.).

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : on a déjà vu que les événements $[X=1]\cap[Y=n-1]$ et $[X=n-1]\cap[Y=1]$ impliquent $[X+Y=n]$.

Mais ces deux cas sont en fait les seuls possibles pour aoir $[X+Y=n]$: quel que soit le résultat du premier lancer, il va donner à l'une des deux v.a.r. X ou Y la valeur 1. L'implication réciproque est donc vraie, et on a donc l'égalité d'événements :

$$\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\quad [X+Y=n]=\big([X=1]\cap[Y=n-1]\big)\cup\big([X=n-1]\cap[Y=1]\big)$$

d) L'union précédente est disjointe ; de plus, pour tout entier $n\geqslant 3$, $n-1\geqslant 2$ donc les résultats de 5.a) et 5.b) s'appliquent, qui donnent :

$$\forall n\in[\![3;+\infty[\![,\quad P(X+Y=n)=P(X=n-1)+P(Y=n-1)=2P(X=n-1)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

à nouveau puisque X et Y suivent la même loi.

7. Informatique.

a) La variable `piece` doit prendre une valeur entière choisie avec équiprobabilité parmi $\{0,1,2\}$.

Si la pièce numéro 0 est choisie, on continue les lancers de la pièce équilibrée tant que Face (codé 0) est obtenu, et `x` augmente d'une unité à chaque boucle exécutée. Si c'est la pièce 1 qui est choisie, `x` prend forcément la valeur 0.

```
1  piece = grand(1,1,'uin',0,2)
2  x = 1
3  if piece == 0
4  then lancer = grand(1,1,'uin',0,1)
5      while lancer == 0
6      lancer = grand(1,1,'uin',0,1)
7      x = x+1
8      end
9  else
10     if piece == 1 then x = 0
11     end
12 end
13 disp(x)
```

b) Le cas où la pièce numéro 2 est choisie, est en fait implicitement géré par le script précédent : dans ce cas, rien de ce qui suit la deuxième ligne du script n'est exécuté, et `x` garde la valeur qui la a été initialement donnée, à savoir 1 : c'est bien la valeur que prend forcément la variable aléatoire X dans ce cas !

Exercice 3

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$

1. On vérifie ici les trois points nécessaires :

   - la fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+$ puisque $\dfrac{x}{a} \geqslant 0$ et $e^{-\frac{x^2}{2a}} > 0$ pour tout réel $x \geqslant 0$; f est aussi positive car nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, donc f est positive sur tout $\mathbb{R}$.

   - La fonction f est continue car constante sur $]-\infty, 0[$, et sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

   - Sous réserve de convergence de l'intégrale impropre :
     $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}\mathrm{d}x$, où :
     pour tout réel $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A \frac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}\mathrm{d}x = \Big[-e^{-\frac{x^2}{2a}}\Big]_0^A = -e^{-\frac{A^2}{2a}} + e^0$.
     $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\frac{A^2}{2a} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc :
     $$\lim_{A\to+\infty} 1 - e^{-\frac{A^2}{2a}} = 1 = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

   On a ainsi bien démontré via ces trois points, que f est une densité de probabilité.

   Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2. La fonction de répartition F_X de X est définie par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$

   - Pour tout réel x négatif : f est nulle sur $]-\infty, x]$, donc $F_X(x) = 0$.

   - Pour tout réel $x > 0$:
     $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{t}{a}e^{-\frac{t^2}{2a}}\mathrm{d}t = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a}}$$
     d'après un calcul déjà fait.

   Bilan : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $\quad Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

   a) On caractérise la loi de Y par le calcul de sa fonction de répartition :
   Notons d'abord que par définition, Y est une variable aléatoire positive, donc :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad F_Y(x) = 0.$$
   Pour tout réel positif x :
   $$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^2 \leqslant 2ax) = P(-\sqrt{2ax} \leqslant X \leqslant \sqrt{2ax})$$
   $$= F_X(\sqrt{2ax}) - F_X(-\sqrt{2ax}) = 1 - e^{\frac{(\sqrt{2ax})^2}{2a}} - 0$$

$$= 1 - e^{-\frac{2ax}{2a}} = 1 - e^{-x}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$, ce qui correspond bien à la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1, loi que suit donc Y.

b) Sachant qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ : le script suivant permet de simuler la variable aléatoire X ; on simule d'abord $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, puis on en déduit $X = \sqrt{2aY}$:

```
a = input('Donner la valeur de a>0 : ')
Y = grand(1,1,'exp',1)
X = sqrt(2*a*Y)
```

4. a) La fonction $g :\ x \mapsto x^2 e^{-\frac{x^2}{2a}}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ qui est un domaine symétrique par rapport à 0, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = (-x)^2.e^{-\frac{(-x)^2}{2a}} = x^2.e^{-\frac{x^2}{2a}} = g(x)$, donc g est bien une fonction paire.

b) Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $(0, a)$: alors $E(Z^2) = V(Z) + E(Z)^2 = a + 0^2 = a$ d'après la formule de Koenig-Huygens ; une densité de Z étant $f_Z :\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}}$, l'expression intégrale de ce moment d'ordre 2 est donnée par le théorème de transfert :

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a}} \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi a}} \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a}} \mathrm{d}x$$

par parité de g.

c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$ est absolument convergente. Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$, cela revient à prouver la convergence simple de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \times \frac{\sqrt{2\pi a}}{2} \times E(X^2) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}}$$

Donc X admet une espérance qui vaut $E(X) = \sqrt{\dfrac{\pi a}{2}}$.

5. a) D'après le cours sur la loi exponentielle, ici de paramètre $\lambda = 1$: $E(Y) = 1$, donc $X^2 = 2aY$ admet une espérance obtenue par linéarité :

$$E(X^2) = 2aE(Y) = 2a$$

b) Puisque X admet un moment d'ordre 2, alors X admet aussi une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2a - \frac{\pi a}{2} = \frac{4a - \pi a}{2} = \frac{(4-\pi)a}{2}.$$

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X.

On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{2n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

a) La loi de S_n dépend bien de a, donc S_n est un estimateur de a, dont le biais vaut :

$$b_a(S_n) = E(S_n) - a = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) - a = \frac{1}{2n} \times n \times 2a - a = a - a = 0$$

donc S_n est bien un estimateur sans biais de S_n.

b) On utilise toujours la relation entre Y et X : $X^2 = 2aY$, donc $X^4 = 4a^2Y^2$; la variable aléatoire Y admet une variance et un moment d'ordre 2 valant :

$E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = 1 + 1 = 2$; par linéarité de l'espérance, X admet un moment d'ordre 4 qui vaut $E(X^4) = 4a^2E(Y^2) = 8a^2$.

Ainsi, X^2 admet une variance qui vaut : $V(X^2) = E(X^4) - E(X^2)^2 = 8a^2 - 4a^2 = 4a^2$.

c) Comme le biais de l'estimateur S_n est nul, son risque quadratique est égal à sa variance ; par indépendance mutuelle des v.a.r. X_k, qui suivent toutes la même loi que X :

$$r_a(S_n) = V(S_n) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k^2) = \frac{1}{4n^2} \times n \times 4a^2 = \frac{a^2}{n}$$

Il est alors évident que : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_a(S_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^2}{n} = 0$, ce qui prouve par définition, que S_n est un estimateur convergent de a.

7. On suppose que a est inférieur ou égal à 1.

a) Comme S_n admet une espérance et une variance, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour cette variable aléatoire donne :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\big(|S_n - a| > \varepsilon\big) \leqslant \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2} \iff 1 - P\big(|S_n - a| \leqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{a^2}{n\varepsilon^2} \iff P\big(|S_n - a| \leqslant \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{a^2}{n\varepsilon^2} \geqslant 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

puisque $0 < a \leqslant 1$.

b) L'intervalle $\left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95% si et seulement si :

$$P\Big(S_n - \frac{1}{10} \leqslant a \leqslant S_n + \frac{1}{10}\Big) \geqslant \frac{95}{100} \iff P\Big(|S_n - a| \leqslant \frac{1}{10}\Big) \geqslant \frac{95}{100}$$

D'après la question précédente : avec $\varepsilon = \frac{1}{10}$, on sait que $P\big(|S_n - a| \leqslant \frac{1}{10}\big) \geqslant 1 - \frac{100}{n}$, et il suffit donc que :

$$1 - \frac{100}{n} \geqslant \frac{95}{100} \iff \frac{100}{n} \leqslant \frac{5}{100} \iff n \geqslant \frac{10000}{5} \iff n \geqslant 2000$$

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$.

1. a) On sait que pour tout réel t : $1 + t^2 \geqslant 1 \iff \ln(1+t^2) \geqslant 0$. La fonction intégrée est donc bien définie, continue comme composée de fonctions continues et positive sur $\mathbb{R}$. Le signe de l'intégrale dépend donc uniquement de l'ordre des bornes d'après la propriété de positivité/négativité de l'intégrale ; on conclut donc :

- Pour tout réel positif $x \in [0, +\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.
- Pour tout réel négatif $x \in]-\infty, 0]$, $f(x) \leqslant 0$.

b) On applique ici une rédaction possible pour les fonctions définies par une intégrale : la fonction $h: \ t \mapsto \ln(1+t^2)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet des primitives.

Si H est l'une d'elles, on peut alors écrire : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \big[H(t)\big]_0^x = H(x) - H(0)$.

La fonction f diffère alors de la constante $-H(0)$ de la fonction H, elle apparaît donc en fait aussi comme une primitive de h ; c'est même La primitive de h qui s'annule en 0 ; on en conclut sans calcul que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = h(x) = \ln(1+x^2)$$

c) Il suffit alors de redire que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ 1 + x^2 \geqslant 1 \Longrightarrow \ln(1+x^2) = f'(x) \geqslant 0$ pour en conclure que f est croissante sur $\mathbb{R}$. On peut même préciser que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée ne s'annule qu'en $x = 0$.

2. a) On souhaite ici comparer les réels $f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$ et $f(x)$: comme c'est courant dans cette situation, on réalise le changment de variable affine $y = -t = u(t)$ dans l'une des deux intégrales, disons ici dans $f(-x)$:

- Élément différentiel : $\quad \mathrm{d}y = u'(t)\mathrm{d}t = -\mathrm{d}t$.
- Corps de l'intégrale : $\quad \ln(1+t^2)\mathrm{d}t = \ln\big(1 + (-y)^2\big)\big(-\mathrm{d}y\big) = -\ln(1+y^2)\mathrm{d}y$.
- Bornes : $\quad t = 0 \to y = 0$ et $t = -x \to y = x$

D'où : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \ln(1+t^2)\mathrm{d}t = \int_0^x -\ln(1^+y^2)\mathrm{d}y = -f(x)$,

ce qui prouve bien que la fonction f est impaire.

b) On sait déjà que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; comme sa dérivée $f': \ x \mapsto \ln(1+x^2)$ est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ f''(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, qui est du signe de x.

La fonction f est donc concave sur $]-\infty, 0]$, convexe sur $[0, +\infty[$, et la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse $x = 0$.

3. a) Pour tout réel t : $\quad a + \dfrac{b}{1+t^2} = \dfrac{a+b+at^2}{1+t^2}$; l'identification des coefficients avec $\dfrac{t^2}{1+t^2}$ donne le système :

$$\begin{cases} a + b & = 0 \\ a & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Et donc : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$.

b) Soit x un réel quelconque : on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$, en posant :

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln(1+t^2) & \longrightarrow \quad & u'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \\ v'(t) &= 1 & \longrightarrow \quad & v(t) = t \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t &= \Big[t\ln(1+t^2)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = x\ln(1+x^2) - 0 - 2\int_0^x \Big(1 - \frac{1}{1+t^2}\Big)\mathrm{d}t \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\Big[t\Big]_0^x + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ce qui donne bien : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x\big(\ln(1+x^2) - 2\big) + 2\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

   a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est bien définie, continue et positive sur $[0;+\infty[$ puisque : $\forall t \in [0;+\infty[,\ 1+t^2 \geqslant 1 > 0$.

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est donc bien définie ; par ailleurs : $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, et on sait que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente puisque $2>1$.

   Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives, assure alors que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

   Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est bien une intégrale impropre convergente.

   b) Le résultat précédent, combiné à la relation obtenue en 3.b), permet d'identifier le terme prépondérant dans l'expression de $f(x)$:

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$, donc $-2 = o_{+\infty}\big(\ln(1+x^2)\big)$ et :

$$\ln(1+x^2) - 2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(1+x^2) \iff x\Big(\ln(1+x^2) - 2\Big) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$$

   De même, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ avec convergente, alors $\displaystyle\int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et par conséquent est négligeable devant $x\ln(1+x^2)$.

   Bref, au voisinage de $+\infty$: $\quad f(x) = x\ln(1+x^2) + o\big(x\ln(1+x^2)\big)$, donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.

   c) Pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2(1+\frac{1}{1+x^2})\right) = \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = \ln(1+0) = 0$, alors le deuxième terme est négligeable devant le premier au voisinage de $+\infty$, et :

$$\ln(1+x^2) \underset{x\to+\infty}{2} \ln(x) \iff x\ln(1+x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x\ln(x)$$

   par compatibilité de l'équivalence avec le produit. La transitivité de l'équivalence donne bien :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x\ln(x).$$

   d) On a vu que f est impaire, donc lorsque x est au voisinage de $-\infty$, alors $(-x)$ est au voisinage de $+\infty$, et :

$$f(x) = -f(-x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\big(2(-x).\ln(-x)\big) \iff f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} 2x\ln(|x|)$$

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

   a) On a vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' :\ x \mapsto \ln(1+x^2)$. Cette fonction est elle-même de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, comme composée bien définie de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, donc f est bien de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

b) Comme on l'a vu : $f(0)=\int_0^0 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t=0$, $f'(0)=\ln(1+0^2)=0$ et $f''(0)=\dfrac{2\times 0}{1+0^2}=0$.

Pour tout réel x : $f''(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, donc $f^{(3)}(x)=\dfrac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$,

et ainsi $f^{(3)}(0)=\dfrac{2-0}{(1+0^2)^2}=2$.

c) La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 donne donc pour f :

$$f(x) \underset{0}{=} 0+\frac{x^1}{1!}\times 0+\frac{x^2}{2!}\times 0+\frac{x^3}{3!}\times 2+o(x^3)=\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

ce qui donne bien :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$$

6. Sans refaire tout le cours sur la méthode de Monte-Carlo : on peut voir ici l'intégrale $f(1)=\int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t$ comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1+t^2).g(t)\mathrm{d}t$, où $g:\ t\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t\in[0;1] \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est une densité de la loi uniforme sur $[0;1]$.
Si U est une variable aléatoire qui suit cette loi, le théorème de transfert assure alors que :

$$f(1)=\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1+t^2).h(t)\mathrm{d}t=E\big(\ln(1+U^2)\big)$$

Or une espérance est approchée par la moyenne empirique des valeurs prises par $\ln(1+U^2)$ sur un grand échantillon issu de multiples simulations indépendantes de U.
Le script est donc très simple à compléter :

```
U = grand(1,100 000,'unf',0,1)
V = log(1 + U.^2)
f = mean(V)
disp(f)
```

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0=1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n=\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n\mathrm{d}t$.

7. a) D'après la convention concernant la puissance zéro :

$$\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^0\mathrm{d}t=\int_0^1 1\ \mathrm{d}t=1.(1-0)=1$$

qui est bien la valeur donnée à u_0 par l'énoncé, ce qui est donc cohérent avec l'expression générale de u_n.

b) $u_1=\int_0^1 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t=f(1)$.

8. a) Il s'agit donc, dans cette question, de comparer pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n\mathrm{d}t$ et $u_{n+1}=\int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1}\mathrm{d}t$.

Pour tout réel $t \in [0,1]$, et tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant t^2 \leqslant 1 \Longrightarrow 1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2 \Longrightarrow 0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$$

par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $\ln(2) < 1$, d'après les comparaisons des puissances d'un même nombre compris entre 0 et 1 :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(\ln(1+t^2)\big)^n \geqslant \big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1}$$

Les fonctions concernées par cette inégalité sont continues sur $[0,1]$, et $0 < 1$ donc par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^{n+1} \mathrm{d}t \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_{n+1}$$

ce qui prouve bien que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \big(\ln(1+t^2)\big)^n$ est continue et positive sur $[0;1]$ comme on vient de le voir. Puisque $0 < 1$, la propriété de positivité de l'intégrale s'applique et donne bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

La suite (u_n) est bien convergente d'après le théorème de limite monotone, en tant que suite décroissante et minorée.

9. a) On réalise à nouveau un travail sur les inégalités : on a déjà vu que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$, donc par croissance de la fonction puissance n-ième sur $\mathbb{R}^+$:

$$\forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \big(\ln(1+t^2)\big)^n \leqslant \big(\ln(2)\big)^n$$

Les fonctions concernées sont continues sur $[0,1]$, et $0 < 1$, donc par positivité et croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^1 \big(\ln(1+t^2)\big)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \big(\ln(2)\big)^n \mathrm{d}t \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \big(\ln(2)\big)^n$$

b) Puisque $0 < \ln(2) < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\ln(2)\big)^n = 0$ et le théorème d'encadrement appliqué à celui qu'on vient d'écrire, assure que (u_n) converge et que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Mais on peut aussi conclure directement sur la nature de la *série* de terme général u_n : comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \big(\ln(2)\big)^n$ est convergente, en tant que série géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1, alors le théorème de comparaison des séries à termes positifs, cette fois, assure que :

$$\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge.}$$

10. a) Encore et toujours le travail sur les inégalités ; on sait que pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \Longrightarrow 1 \geqslant 1-\ln(1+t^2) \geqslant 1-\ln(2) \Longrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)}$$

par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$, qui contient bien les trois membres puisque $1-\ln(2) > 0$. En multipliant les trois membres par le même réel positif $\big(\ln(1+t^2)\big)^n \geqslant 0$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{\big(\ln(1+t^2)\big)^n}{1-\ln(2)}$$

Les fonctions concernées sont continues sur $[0,1]$, et $0<1$, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(2)}\mathrm{d}t$$

Ce qui donne bien le résultat demandé, puisque par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(2)}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\ln(2)}\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \mathrm{d}t = \frac{u_n}{1-\ln(2)}$$

b) La conséquence est immédiate : on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1-\ln(2)} = 0$, et le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t = 0$$

c) On utilise essentiellement ci-dessous, la linéarité de l'intégrale qui permet d'écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^k \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln(1+t^2)\right)^k \mathrm{d}t \quad \text{la somme des intégrales est l'intégrale de la somme} \\
&= \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t \quad \text{somme géométrique de raison } \ln(1+t^2) \neq 1, \quad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

d) La linéarité de l'intégrale donne aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

où on a vu que le membre de droite tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

ce qui signifie bien que la série converge, et a pour somme totale :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

e) Ici seule la fonction intégrée change, mais le principe exposé à la question 6. est le même ; attention tout de même pour le calcul terme à termes des inverses, il faut utiliser en `Scilab` une puissance (-1) pointée :

```
U = grand(1,100 000,'unf',0,1)
V = (1-log(1 + U.^2)).^(-1)
f = mean(V)
disp(f)
```