MATHÉMATIQUES I - ESSEC E 2009

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Problème 1 : prédire le dernier succès

1. La stratégie choisie est effectivement gagnante si et seulement si les s dernières expériences font apparaître un et un seul succès : lorsque celui-ci survient, on annonce que ce sera le dernier, et effectivement aucun autre succès ne survient ensuite jusqu'à la fin des n expériences.
2. La probabilité d'avoir exactement un succès au cours de s épreuves identiques et mutuellement indépendantes, est obtenue en utilisant une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}(s,p)$:

$$P_s = P(X=1) = \binom{s}{1} p^1(1-p)^{s-1} = sp(1-p)^{s-1}$$

3. On raisonne par équivalences :

$$\frac{P_{s+1}}{P_S} \geqslant 1 \iff \frac{(s+1)p(1-p)^s}{sp(1-p)^{s-1}} \geqslant 1 \iff \frac{s+1}{s}(1-p) \geqslant 1 \iff 1+\frac{1}{s} \geqslant \frac{1}{1-p} \iff \frac{1}{s} \geqslant \frac{1}{1-p}-1$$

$$\iff \frac{1}{s} \geqslant \frac{p}{1-p} \iff s \leqslant \frac{1-p}{p} \iff s \leqslant \frac{1}{p}-1$$

4. La suite $(P_s)_{1\leqslant s\leqslant n}$ est croissante tant que $\dfrac{P_{s+1}}{P_s} \geqslant 1$, donc du rang 1 au rang $\lfloor \frac{1}{p}-1\rfloor + 1 = \lfloor \frac{1}{p}\rfloor$, puis elle décroît (toujours à cause de l'équivalence précédente).
   - si $\frac{1}{p}$ est un entier (ce qui est le cas dès que $p = \frac{1}{m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$), alors $P_{s+1} = P_s$ pour $s = \frac{1}{p}-1$ sont deux valeurs égales qui donne le maximum de la suite $(P_s)_{1\leqslant s\leqslant n}$.
   - Sinon $\frac{1}{p}$ n'est pas entier, et $P_{s+1} \geqslant P_s$ pour tout $s \in [\![1, \lfloor\frac{1}{p}\rfloor - 1]\!]$, donc la suite (P_s) est croissante jusqu'au rang $\lfloor \frac{1}{p}\rfloor$, et décroissante ensuite : $P_{\lfloor\frac{1}{p}\rfloor}$ représente alors la valeur maximale de la suite.
5. Un exemple : on lancer 10 fois un dé équilibré, et on doit prédire quand survient le dernier six.
   Ici donc, $p = \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{p} = 6$: la suite $(P_s)_{1\leqslant s\leqslant 10}$ a donc pour valeurs maximales $P_5 = 5.\frac{1}{6}.(\frac{5}{6})^4 = (\frac{5}{6})^5$ qui est aussi égale à $P_6 = 6.\frac{1}{6}.(\frac{5}{6})^5$.
   Les chances maximales de succès sont donc obtenues si on attend la quatrième $(10-6=4)$ ou la cinquième $(10-5=5)$ expérience pour prédire que le premier succès obtenu à partir de là sera le dernier.

Problème 2 : chercher une place de parking

1. Loi de X.
   a) Il est clair que $X(\Omega) = [\![s;+\infty[\![$, puisqu'on accepte une place à partir du numéro s et que n'importe laquelle de ces places peut être la première qui soit libre.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note A_k l'événement « la place au numéro k est occupée ».
Soit $n \in X(\Omega)$: si $n = s$, alors $[X = s] = \overline{A_s}$ (la première place envisagée s'avère libre),
et pour tout $n > s$: $[X = n] = A_s \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap \overline{A_n}$.

c) On en déduit : $P(X = s) = 1 - p$, et pour tout $n > s$:

$$P(X = n) = P(A_s) \times \ldots \times P(A_{n-1}) \times P(\overline{A_n}) = p.(1-p)^{n-s},$$

formule dont on remarque qu'elle est aussi vraie pour $n = s$, donc pour tout $n \in [\![s; +\infty[\![$.

d) L'univers-image de $X - s + 1$ est : $(X - s + 1)(\Omega) = [\![s - s + 1; +\infty[\![= \mathbb{N}^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X - s + 1 = n) = P(X = n + s - 1) = p.(1-p)^{n+s-1-s} = p.(1-p)^{n-1}$$

On reconnaît bien la loi géométrique de paramètre p, loi que suit donc $X - s + 1$.

e) Le cours sur la loi géométrique donne : $E(X - s + 1) = \dfrac{1}{p} \iff E(X) - s + 1 = \dfrac{1}{p}$

$\iff E(X) = \dfrac{1}{p} + s - 1$, par linéarité de l'espérance.

2. Calcul de $D_s = E\big(|X - d|\big)$.

a) D'après le théorème de transfert : la variable aléatoire $|X - d|$ admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant s} |n - d| P(X = n)$ est absolument convergente. Cette série est à termes positifs, donc la convergence simple suffit.
Pour tout entier $k \geqslant s$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|n - d| P(X = n) \leqslant (n + d) P(X = n) = nP(X = n) + dP(X = n)$$

Or les séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant s} nP(X = n)$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant s} P(X = n)$ convergent (et ont pour sommes totales respectives $E(X)$ et 1), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant s} |n - d| P(X = n)$ converge, et $|X - d|$ admet une espérance.

b) On peut donc écrire :

$$D_s = E\big(|X - d|\big) = \sum_{n=s}^{+\infty} |n - d| P(X = n) = \sum_{n=s}^{d} (d - n) P(X = n) + \sum_{n=d+1}^{+\infty} (n - d) P(X = n)$$

$$= -\sum_{n=s}^{d} (n - d) P(X = n) + \sum_{n=s}^{+\infty} (n - d) P(X = n) - \sum_{n=s}^{d} (n - d) P(X = n)$$

$$= \sum_{n=s}^{+\infty} (n - d) P(X = n) - 2 \sum_{n=s}^{d} (n - d) P(X = n)$$

c) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; le calcul explicite de la somme géométrique de raison $x \neq 1$, notons-la $f_N(x)$, donne :
$f_N(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$. Il y a alors deux façons de dériver cette expression en fonction de la variable x :

- La dérivée d'une somme est la somme des dérivées : $f'_N(x) = \displaystyle\sum_{k=\cancel{0}\,1}^{N} k.x^{k-1}$

- On peut dériver l'expression explicite sous la forme d'un quotient :

$$f_N'(x) = \frac{-(N+1)x^N.(1-x) - (1-x^{N+1}).(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(N+1)x^N + (N+1)x^{N+1} + 1 - x^{N+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{Nx^{N+1} - (N+1)x^N + 1}{(1-x)^2}$$

On peut alors écrire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} kx^k = x\sum_{k=1}^{N} kx^{k-1} = \frac{Nx^{N+2} - (N+1)x^{N+1} + x}{(1-x)^2}$.

d) Du résultat précédent, on peut déduire :

$$\sum_{n=s}^{d}(n-d)P(X=n) = \sum_{n=s}^{d}(n-d).p.(1-p)^{n-s} \overset{[j=n-s]}{=} p.\sum_{j=0}^{d-s}(j+s-d).(1-p)^j$$

$$= p.\sum_{j=0}^{d-s} j(1-p)^j + p.(s-d).\sum_{j=0}^{d-s}(1-p)^j$$

$$= p.\frac{(d-s).(1-p)^{d-s+2} - (d-s+1).(1-p)^{d-s+1} + 1 - p}{p^2} + p.(s-d).\frac{1-(1-p)^{d-s+1}}{p}$$

$$= \frac{(d-s)(1-p)^{d-s+1}(1-p-1+p) - (1-p)^{d-s+1} + 1 - p + p(s-d)}{p}$$

$$= \frac{1}{p} + s - d - 1 - \frac{(1-p)^{d-s+1}}{p}$$

e) On en déduit :

$$D_s = \sum_{n=s}^{+\infty}(n-d)P(X=n) - 2\sum_{n=s}^{d}(n-d)P(X=n) = E(X-d) - 2.\left(\frac{1}{p} + s - d - 1 - \frac{(1-p)^{d-s+1}}{p}\right)$$

$$= E(X) - d - \frac{2}{p} - 2s + 2d + 2 + 2\frac{(1-p)^{d-s+1}}{p}$$

$$= \frac{1}{p} + s - 1 - d - \frac{2}{p} - 2s + 2d + 2 + 2\frac{(1-p)^{d-s+1}}{p}$$

$$D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$$

3. Optimisation

a) On simplifie :

$$D_{s+1} - D_s = d - (s+1) + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s} - d + s - 1 + \frac{1}{p} - \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$$

$$= \frac{2}{p}(1-p)^{d-s}\big(1-(1-p)\big) - 1 = 2(1-p)^{d-s} - 1$$

Et on cherche donc les valeurs de s pour lesquelles :

$$D_{s+1} - D_s \geqslant 0 \iff 2(1-p)^{d-s} \geqslant 1 \iff (1-p)^{d-s} \geqslant \frac{1}{2} \iff (d-s)\ln(1-p) \geqslant -\ln(2)$$

$$\iff d\ln(1-p)+\ln(2)\geqslant s\ln(1-p) \iff d+\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}\leqslant s$$

puisque $\ln(1-p)<0$.

On en déduit que la suite (D_s) est d'abord décroissante jusqu'au premier entier s_0 strictement supérieur à $\sigma_p = d+\dfrac{\ln(2)}{\ln(1-p)}$, puis croissante à partir de ce rang : elle admet bien un minimum au rang s_0.

b) Si $p\geqslant \dfrac{1}{2}$: alors $0<1-p\leqslant \dfrac{1}{2}$ et :

$$\ln(1-p)\leqslant -\ln(2)<0 \iff 1\geqslant -\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}>0 \iff -1\leqslant \frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}<0 \iff d-1\leqslant \sigma_p<d$$

Ce qui signifie que le premier entier strictement supérieur à σ_p est égal à d dans ce cas, valeur de s pour laquelle D_s est alors minimale.

4. Exemple : il y a en moyenne 1 place sur 10 de libre, ce qui signifie que $p=\dfrac{1}{10}$; on cherche donc le plus petit entier strictement supérieur à $d+\dfrac{\ln(2)}{\ln(0.9)}$.

   L'encadrement fourni par l'énoncé donne : $2^{-\frac{1}{6}}<0.9<2^{-\frac{1}{7}} \iff -\dfrac{1}{6}\ln(2)<\ln(0.9)<-\dfrac{1}{7}\ln(2)$ $\iff -\dfrac{1}{6}<\dfrac{\ln(0.9)}{\ln(2)}<-\dfrac{1}{7} \iff -6>\dfrac{\ln(2)}{\ln(0.9)}>-7 \iff d-6>\sigma_p>d-7$, et le premier entier cherché est $d-6$: il faut donc accepter la première place disponible, six places avant l'arrivée.

Problème 3 : vendre par petites annonces

1. Pour que le problème ait un sens, il faut qu'il soit possible d'obtenir une offre supérieure ou égale à s, donc que :

$$P(X\geqslant s)>0 \iff P(X<s)<1 \iff P(X\leqslant s)<1 \iff F(s)\in[0;1[$$

   Le fait que X est une variable à densité donne en particulier $P(X<s)=P(X\leqslant s)$.

2. Calcul de l'espérance de G.

   a) La variable aléatoire N représente le temps d'attente du premier succès : « l'offre étudiée est supérieure ou égale à s » dans une suite d'épreuves de Bernoulli (on étudie si l'offre faite est supérieure ou égale à s ou pas) identiques et indépendantes.

   La probabilité de succès est $P(X\geqslant s)=1-F(s)$, donc N suite la loi géométrique de paramètre $1-F(s)$.

   Le cours sur la loi géométrique assure alors que : $\quad E(N)=\dfrac{1}{1-F(s)}$.

   b) Par propriété de la loi géométrique, il est presque sûr que N prendra une valeur finie, et X_N est alors la valeur de la première offre qui est supérieure ou égale à s : il est donc presque certain que $[X_n\geqslant s]$ est réalisé, et ainsi $P(X_N<s)=0$.

   c) Soit $x\geqslant s$.

      i. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\quad [X_n>x]\cap[N=n]$ signifie que la n-ième offre est la première offre qui est supérieure à s, et qu'elle est alors même supérieure à x : les $n-1$ premières offres étaient donc strictement inférieures à s, ce qui assure bien l'égalité d'événements issue de cette reformulation :

$$[X_N>x]\cap[N=n]=[X_n>x]\cap\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}[X_k<s]\right)$$

ii. De l'égalité précédente, et de l'indépendance mutuelle des variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([X_N > x] \cap [N = n]) = P(X_n > x) \times \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k < s) = (1 - F(x)).\big(F(s)\big)^{n-1}$$

On en déduit $P(X_N > x)$ grâce à la formule des probabilités totales et le système (quasi-)complet d'événements $\big([N = n]\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$P(X_N > x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([X_N > x] \cap [N = n]\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(1 - F(x)\big).\big(F(s)\big)^{n-1}$$

$$= \big(1 - F(s)\big) \sum_{j=0}^{+\infty} \big(F(s)\big)^j = \big(1 - F(x)\big).\frac{1}{1 - F(s)}$$

On a en effet reconnu une série géométrique de raison $F(s) \in [0; 1[$. On en déduit :

$$P(X_N \leqslant x) = 1 - P(X_N > x) = 1 - \frac{1 - F(x)}{1 - F(s)} = \frac{1 - F(s) - 1 + F(x)}{1 - F(s)} = \frac{F(x) - F(s)}{1 - F(s)}$$

d) On a obtenu à la question précédente, la fonction de répartition de la variable aléatoire X_N, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X_N}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < s \\ \dfrac{F(x) - F(s)}{1 - F(s)} & \text{si } x \geqslant s \end{cases}$$

Sous cette forme : F_{X_N} est de classe C^1 donc continue sur $]-\infty; s[$ comme fonction constante, et sur $]s; +\infty[$ car c'est le cas de F.

Or $\displaystyle\lim_{x\to s^-} F_{X_N}(x) = \lim_{x\to s^-} 0 = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to s^+} F_{X_N}(x) = \lim_{x\to s^+} \frac{F(x) - F(s)}{1 - F(s)} = \frac{F(s) - F(s)}{1 - F(s)} = 0 = F_{X_N}(s)$ (la fonction F est, comme fonction de répartition, continue sur $\mathbb{R}$).

La variable aléatoire X_N admet donc une densité f_{X_N}, obtenue par dérivation de F_{X_N} sauf en $x = s$ où on choisit par exemple la valeur arbitraire 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X_N}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < s \\ \dfrac{f(x)}{1 - F(s)} & \text{si } x \geqslant s \end{cases}$$

e) La variable aléatoire X_N admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_N}(x)\mathrm{d}x$, est absolument convergente. Comme la fonction f_{X_N} est nulle sur $]-\infty; s]$ et positive sur $]s; +\infty[$, cela revient à étudier la simple convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_s^{+\infty} x.\frac{f(x)}{1 - F(s)}\mathrm{d}x = \frac{1}{1 - F(s)}\int_s^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x.$

Or par hypothèse X admet une espérance, donc l'intégrale $\displaystyle\int_s^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x$ converge, et par conséquent X_N admet aussi une espérance.

f) La variable aléatoire $G = X_N - Nc$ est une combinaison linéaire de deux variables aléatoires qui admettent chacune une espérance : même si l'une est discrète et l'autre est à densité, la linéarité de l'espérance s'applique et assure que G admet une espérance qui vaut :

$$E(G) = E(X_N) - E(N).c = \frac{1}{1 - F(s)}\int_s^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{1 - F(s)}.c = \frac{1}{1 - F(s)}\Big(\int_s^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x - c\Big).$$

3. Optimisation.

On pose $g(s) = E(G)$.

a) On sait, toujours parce que X admet une espérance, que : $\lim_{s \to +\infty} \int_s^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x - c = -c < 0$ et $\lim_{s \to +\infty} 1 - F(s) = 0^+$ puisque $F(s)$ tend vers 1 par valeurs inférieures, donc par quotient de limites, on a bien :

$$\lim_{s \to +\infty} g(s) = -\infty$$

Cela signifie assez logiquement que plus on est gourmand, plus l'objet va rester longtemps en vente sans acquéreur, et le gain va forcément être d'autant plus négatif à cause du coût des annonces renouvelées.

b) On a : $g(0) = \dfrac{1}{1 - F(0)} \left(\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x - c \right) = E(X) - c = m - c$, puisque X est à valeurs positives (ce qui implique notamment $F(0) = 0$).

c) Si $c \geqslant m$: pour tout réel positif s, $\int_s^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = E(X)$, puisque la différence $\int_0^s xf(x)\mathrm{d}x$ est positive, comme intégrale d'une fonction continue par morceaux positive sur $[0; s]$, avec $0 \leqslant s$.

On en déduit bien que pour tout réel positif s :

$g(s) = \dfrac{1}{1 - F(s)} \left(\int_s^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x - c \right) \leqslant \dfrac{m - c}{1 - F(s)} \leqslant 0$ puisque $F(s) < 1 \iff 1 - F(s) > 0$ et $m - c$ est supposé négatif.

Cela siginifie assez logiquement que si le coût de la publicité est supérieur au prix de vente moyen de l'objet, on ne peut pas s'attendre en moyenne, à tirer un bénéfice quelconque de cette vente !

On suppose donc dans toute la suite que $c < m$.

d) La fonction $k : x \mapsto \int_s^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = m - \int_0^s xf(x)\mathrm{d}x$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ avec $k'(s) = 0 - sf(s)$ pour tout réel $s \geqslant 0$.

On en déduit que la fonction g est bien dérivable sur $[0; +\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont, avec pour tout réel positif s :

$$g'(s) = \frac{k'(s).(1 - F(s)) - (k(s) - c).(-f(s))}{[1 - F(s)]^2} = \frac{f(s).[-s(1 - F(s)) + k(s) - c]}{[1 - F(s)]^2}$$

qui est bien de la forme voulue avec $h(s) = -s(1 - F(s)) + k(s) - c$, où k est la fonction définie plus haut.

e) La fonction h est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}^+$, avec pour tout réel positif s :

$h'(s) = -1 + F(s) + sf(s) + k'(s) = F(s) - 1$ qui est bien négatif pour tout réel $s \geqslant 0$, ce qui prouve bien que h est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

f) On sait que $\lim_{s \to +\infty} k(s) = 0$, et $-s(1 - F(s))$ est négatif pour tout $s \geqslant 0$, donc pour s assez grand, $h(s) \leqslant -c < 0$.

g) Par ailleurs, $h(0) = k(0) - c = m - c > 0$, et la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$ puisque k l'est aussi (propriété de la fonction définie par une intégrale d'une fonction continue de 0 à s). Comme h change de signe sur $\mathbb{R}^+$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que la fonction h s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^+$.

h) Soit σ un réel positif tel que $h(\sigma) = 0$.

   i. D'après e), la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}^+$: on peut donc dire que pour tout s compris entre 0 et σ, $h(x) \geqslant 0$ et pour tout $s \geqslant \sigma$, $h(s) \leqslant 0$.

Comme f est positive sur $\mathbb{R}^+$, $g'(s)$ est donc d'après d) du même signe que $h(s)$. On en conclut que g est croissante sur $[0;\sigma]$, et décroissante sur $[\sigma;+\infty[$, ce qui assure que g admet un maximum en σ.

ii. L'égalité $h(\sigma)=0$ s'écrit aussi : $-\sigma(1-F(\sigma))+k(\sigma)-c=0 \iff k(\sigma)-c=\sigma(1-F(\sigma))$, ce sorte que :

$$g(\sigma)=\frac{1}{1-F(\sigma)}\big(k(\sigma)-c\big)=\frac{\sigma(1-F(\sigma))}{1-F(\sigma)} \iff g(\sigma)=\sigma$$

iii. Étant données les variations obtenues pour g, la seule façon de n'avoir pas unicité de σ serait que g serait croissante sur un intervalle $[0;\sigma_1]$, puis constante sur un intervalle $[\sigma_1;\sigma_2]$ qui contient σ, et enfin décroissante sur $[\sigma_2;+\infty[$.

On aurait alors : $g(\sigma_1)=g(\sigma_2) \iff \sigma_1=\sigma_2$, ce qui prouve l'unicité de σ !

4. Variations en fonction de c.

L'espérance de G dépend en fait de s et de c, on la note dorénavant $g(s,c)$. La question précédente prouve qu'à c fixé, $g(s,c)$ est maximale pour une valeur unique que l'on note maintenant σ_c, et qui vérifie $g(\sigma_c,c)=\sigma_c$.

a) Soit c et c' deux réels positifs tels que $c\leqslant c'$: en reprenant l'expression de $E(G)$ obtenue en 2.f), on peut écrire pour tout réel positif s :
$g(s,c)=\dfrac{k(s)-c}{1-F(s)}$ où $1-F(s)>0$ et $k(s)-c\geqslant k(s)-c' \iff \dfrac{k(s)-c}{1-F(s)}\geqslant\dfrac{k(s)-c'}{1-F(s)}$
$\iff g(s,c)\geqslant g(s,c')$.

b) Comme $g(s,c)$ est toujours supérieur, pour $s\geqslant 0$, à $g(s,c')$, on en déduit logiquement que le maximum de $g(s,c)$ est lui aussi supérieur au maximum de $g(s,c')$ pour $s\geqslant 0$, ce qui s'écrit :

$$g(\sigma_c,c)\geqslant g(\sigma_{c'},c') \iff \sigma_c=\sigma_{c'}$$

c) La fonction $c\mapsto\sigma_c$ est ainsi décroissante, puisque $c\leqslant c'$ implique $\sigma_c\geqslant\sigma_{c'}$, quels que soient c et c' des réels positifs.

Ce résultat était prévisible : plus on augmente le coût de la publicité, plus le bénéfice, même maximal, baisse !

5. Un exemple : la loi uniforme.

On suppose que X suit la loi uniforme sur un intervalle $[a;b]$ avec $0\leqslant a<b$.

a) Dans ce cas la fonction F est définie par : $\quad F(x)=\begin{cases}0 & \text{si} x\leqslant a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a\leqslant x\leqslant b\\ 1 & \text{si } x\geqslant b\end{cases}$.

On calcule alors $g(s,c)$ en distinguant trois cas pour la valeur du réel positif s :

- Si $0\leqslant s\leqslant a$: alors $F(s)=0$ et l'intervalle $[s;+\infty[$ contient tout l'intervalle $[a;b]$ qui est le support de X, ce qui implique que $\displaystyle\int_s^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=E(X)=\frac{a+b}{2}$, donc :

$$\forall s\in[0;a],\quad g(s,c)=\frac{1}{1-0}\Big(\frac{a+b}{2}-c\Big)=\frac{a+b-2c}{2}$$

- Si $a < s < b$: alors $F(s) = \dfrac{s-a}{b-a}$ et $\displaystyle\int_s^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_s^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}.\frac{b^2-s^2}{2} = \frac{b^2-s^2}{2(b-a)}$, donc dans ce cas :
$$g(s,c) = \frac{1}{1-\frac{s-a}{b-a}} \times \left(\frac{b^2-s^2}{2(b-a)} - c\right) = \frac{b-a}{b-s} \times \left(\frac{(b-s)(b+s)}{2(b-a)} - c\right) = \frac{b+s}{2} - c\frac{b-a}{b-s}$$
- On n'envisage pas le cas $s \geqslant b$ où b est la valeur maximale de X : aucune offre ne dépassera jamais b ni s.

b) Pour c fixé, et d'après 3.h), $g(s,c)$ est maximale en un réel $s \in [0;b]$ tel que $g(s,c) = s$.

On distingue deux cas :

- Soit $s \in [0;a]$, et dans ce cas l'équation à résoudre est : $\quad g(s,c) = s \iff \dfrac{a+b}{2} - c = s$.

  La condition : $c < m \iff c < \dfrac{a+b}{2}$ assure que la solution est bien positive, elle doit aussi être inférieure à a : il faut donc pour cela que $\dfrac{a+b}{2} - c \leqslant a \iff \dfrac{b-a}{2} \leqslant c$.
  Ce cas n'était pas prévu par l'énoncé..!

- On considère maintenant que $s \in]a;b]$, l'équation se réécrit alors :
$$g(s,c) = s \iff \frac{b+s}{2} - \frac{c(b-a)}{b-s} = s \iff (b+s)(b-s) - 2c(b-a) = 2s(b-s)$$
$$\iff b^2 - s^2 - 2c(b-a) = 2bs - 2s^2 \iff s^2 - 2bs + b^2 - 2c(b-a) = 0$$
  Il s'agit d'une équation du second degré, de discriminant :
$$\Delta = 4b^2 - 4(b^2 - 2c(b-a)) = 8c(b-a) > 0$$
  On envisage donc deux solutions :

  $s_1 = \dfrac{2b + \sqrt{8c(b-a)}}{2} = b + \sqrt{2c(b-a)} > b$: on ne retient donc pas cette solution, et $s_2 = b - \sqrt{2c(b-a)}$: il s'agit bien d'un réel inférieur à b, et on vérifie que :

  $b - \sqrt{2c(b-a)} > a \iff b - a > \sqrt{2c(b-a)} \iff (b-a)^2 > 2c(b-a) \iff \dfrac{b-a}{2} > c$, ce qui est bien le cas contraire du précédent..

On conclut (à la condition $c < \dfrac{b-a}{2}$), que $E(G)$ est bien maximale pour $s = b - \sqrt{2c(b-a)}$.

6. Simulation informatique.

L'algorithme ci-dessous permet de simuler l'expérience dans le cas où X suit la loi uniforme sur $[a;b]$. On doit ici se rappeler du fait que la commande `x = rand()` simule la loi uniforme à densité sur $[0;1]$, et qu'alors c'est `y = a+(b-a)*x` qui suit la loi uniforme sur $[a;b]$.

```
a = input('Donner a : ')
b = input('Donner b : ')
c = input('Donner le prix de la publicité c : ')
n = 0
y = 0
while y <= s
    x = rand()
    y = a+(b-a)*x
    n = n+1
end
disp('Le gain est égal à '+string(y-n*c))
```