

Exercice 1

Dans $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le sous-ensemble \mathcal{A} est constitué des matrices de E vérifiant l'égalité :

$$M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3. \quad (*)$$

Partie A : Exemples de matrices appartenant à \mathcal{A} .

1. Pour α réel, la matrice αI_3 appartient à \mathcal{A} si et seulement si :

$$\begin{aligned} \alpha I_3(\alpha I_3 + I_3)(\alpha I_3 + 2I_3) = 0_3 &\iff \alpha I_3(\alpha + 1)I_3(\alpha + 2)I_3 = 0_3 \iff \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)I_3 = 0_3 \\ &\iff \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) = 0 \quad \text{puisque } I_3 \neq 0_3 \end{aligned}$$

D'après la règle du produit nul, la matrice αI_3 appartient donc à \mathcal{A} si et seulement si :

$$\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -1 \text{ ou } \alpha = -2$$

2. La question précédente permet de voir que \mathcal{A} n'est pas un sous-espace vectoriel :

on sait par exemple que $M = -2I_3$ appartient à \mathcal{A} , mais alors $2M = -4I_3$ par exemple, n'appartient pas à \mathcal{A} d'après 1. L'ensemble \mathcal{A} n'est donc pas stable par multiplication externe, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Remarque : on devait soupçonner une réponse négative au seul fait que la question posée était ouverte, et n'était pas tournée sous la forme : "Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de E "...

3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, le calcul matriciel donne :

$$BX_1 = \begin{pmatrix} -1 - 1 + 0 \\ 1 - 3 + 0 \\ 1 - 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } BX_2 = \begin{pmatrix} -1 - 1 + 1 \\ 1 - 3 + 1 \\ 1 - 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) On remarque ainsi que $BX_1 = -2X_1$ et $BX_2 = -X_1$, ce qui prouve que -2 et -1 sont valeurs propres de B , X_1 et X_2 étant deux vecteurs propres non nuls associés.

Déterminons plus globalement les deux sous-espaces propres de B :

- Pour $\lambda = -2$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au sous-espace propre $E_{-2}(B)$ si et seulement si :

$$BX = -2X \iff (B+2I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff x - y + z = 0 \iff x = y - z$$

Les trois lignes du système étaient redondantes ; on en déduit :

$$E_{-2}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Le sous-espace propre est ainsi engendré par deux vecteurs non-colinéaires, qui forment donc une famille libre : ces deux vecteurs forment donc une base de $E_{-2}(B)$, et $\dim E_{-2}(B) = 2$.

- On pourrait résoudre de la même manière le système $BX = -X \iff (B + I_3)X = 0_{3,1}$, mais une prise en compte fine du résultat précédent nous permet en fait de nous en dispenser :

On sait en effet que -2 et -1 sont valeurs propres, avec $\dim E_{-2}(B) = 2$ et $\dim E_{-1}(B) \geq 1$.

Or la somme des dimensions des sous-espaces propres d'une matrice de $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ne peut dépasser 3 : on en déduit que B n'a pas d'autres valeurs propres que -2 et -1 , et que $\dim E_{-1}(B) = 1$.

Comme X_2 est un vecteur propre non nul associé à cette valeur propre, alors il forme à lui seul une base de $E_{-1}(B)$.

- c) Comme on vient de le voir : $\text{Sp}(B) = \{-2; -1\}$ et $\dim E_{-2}(B) + \dim E_{-1}(B) = 3$, donc B est bien diagonalisable, semblable à $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ via la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ telle que $B = PDP^{-1}$; on a obtenu P en juxtaposant les vecteurs des bases trouvées pour les deux sous-espaces propres
- d) Comme D est diagonale et I_3 aussi, on vérifie facilement que D appartient à \mathcal{A} :

$$D(D + I_3)(D + 2I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3$$

puisque le produit de matrices diagonales correspond à un produit terme à terme des matrices, et que chaque élément diagonale du produit fera intervenir un facteur nul à chaque fois.

Ainsi, D appartient bien à \mathcal{A} .

On utilise ensuite la relation $B = PDP^{-1}$ pour effectuer la vérification pour B :

$B(B + I_3)(B + 2I_3) = PDP^{-1}(PDP^{-1} + I_3)(PDP^{-1} + 2I_3)$, or $I_3 = PP^{-1} = PI_3P^{-1}$, ce qui permet d'écrire :

$$B(B+I_3)(B+2I_3) = PD \underbrace{P^{-1}P}_{=I_3} (D+I_3) \underbrace{P^{-1}P}_{=I_3} (D+2I_3) P^{-1} = PD(D+I_3)(D+2I_3)P^{-1} = P0_3P^{-1} = 0_3$$

Et B appartient bien à \mathcal{A} .

4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, telle que le spectre de M soit inclus dans $\{0; -1; 2\}$: cela signifie que la matrice M est semblable à une matrice diagonale

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ où } a, b, c \text{ les valeurs propres de } M, \text{ appartiennent toutes à } \{0; -1; -2\}, \text{ via une}$$

matrice de passage inversible Q . Mais alors, en reprenant le même cheminement qu'en 3.d) :

$$\Delta(\Delta + I_3)(\Delta + 2I_3) = \begin{pmatrix} a(a+1)(a+2) & 0 & 0 \\ 0 & b(b+1)(b+2) & 0 \\ 0 & 0 & c(c+1)(c+2) \end{pmatrix},$$

où l'appartenance de a, b, c à $\{0; -1; -2\}$ implique toujours :

$a(a+1)(a+2) = b(b+1)(b+2) = c(c+1)(c+2) = 0$, l'un des trois facteurs de chaque produit sera forcément nul.

Ainsi Δ appartient à \mathcal{A} , et via la relation $M = Q\Delta Q^{-1}$, un calcul en tout point analogue à celui fait en 3.d) avec la matrice B , prouve que $M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3$, et donc que M appartient à \mathcal{A} .

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de \mathcal{A} .

Soit M une matrice appartenant à \mathcal{A} , et $\text{Sp}(M)$ son spectre.

5. La relation (*) vérifiée par M , donne directement la réponse : $P(X) = X(X+1)(X+2)$ est un polynôme annulateur de M .

Comme on a obtenu $P(X)$ sous forme factorisée, ses racines sont évidentes : ce sont $0, -1$ et -2 . Et d'après la propriété du cours, on sait alors que $\text{Sp}(M) \subset \{0; -1; -2\}$.

6. On suppose dans cette question que M admet $0, -1$ et -2 comme valeurs propres.

C'est encore du cours : on est alors dans la situation où M est une matrice carrée d'ordre 3 qui possède 3 valeurs propres distinctes. Elle vérifie donc le critère suffisant qui permet d'affirmer sans calcul que M est diagonalisable.

7. a) On suppose dans cette question que -1 est l'unique valeur propre de M .

Encore du cours ! L'équivalence : $(\lambda \in \text{Sp}(M)) \iff (M - \lambda.I_3 \text{ n'est pas inversible})$ assure aussi que :

$$\lambda \notin \text{Sp}(M) \iff M - \lambda.I_3 \text{ est inversible}$$

Donc si -1 est l'unique valeur propre de M , alors : 0 et -2 ne sont pas valeurs propres de M , donc M et $M + 2I_3$ sont inversibles. On peut alors repartir de la relation (*) et écrire :

$$\begin{aligned} M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3 &\iff M^{-1}M(M + I_3)(M + 2I_3)(M + 2I_3)^{-1} = M^{-1}0_3(M + 2I_3)^{-1} \\ &\iff M + I_3 = 0_3 \iff M = -I_3 \end{aligned}$$

après toutes les simplifications permises par l'inversibilité de M et $M + 2I_3$. La seule matrice de \mathcal{A} qui a pour seule valeur propre -1 , est donc $M = -I_3$.

b) Le même raisonnement s'applique si $\text{Sp}(M)$ est réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si 0 est la seule valeur propre de M : dans ce cas, $M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles, et on peut écrire :

$$\begin{aligned} M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3 &\iff M(M + I_3)(M + 2I_3)(M + 2I_3)^{-1} = 0_3(M + 2I_3)^{-1} \\ &\iff M(M + I_3) = 0_3 \iff M(M + I_3)^{-1} = 0_3(M + I_3)^{-1} \\ &\iff M = 0_3 \end{aligned}$$

et $M = 0_3$ est la seule matrice de \mathcal{A} qui admet la seule valeur propre 0 .

Enfin, si -2 est la seule valeur propre de M , alors M et $M + I_3$ sont inversibles, donc :

$$\begin{aligned} M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3 &\iff (M + I_3)^{-1}M^{-1}M(M + I_3)(M + 2I_3) = (M + I_3)^{-1}M^{-1}0_3 \\ &\iff (M + I_3)^{-1}(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3 \iff M + 2I_3 = 0_3 \\ &\iff M = -2I_3 \end{aligned}$$

et $M = -2I_3$ est la seule matrice de \mathcal{A} qui admet la seule valeur propre -2 .

8. On suppose dans cette question que M n'admet aucune valeur propre : d'après ce qu'on a expliqué plus haut, cela signifie que $0, -1$ et -2 ne sont donc pas valeurs propres de M , et donc que $M, M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont toutes les trois inversibles.

Leur produit $M(M + I_3)(M + 2I_3)$ devrait donc encore être inversible, or ce n'est pas le cas puisqu'il est égal à 0_3 d'après (*) !

On en déduit qu'une matrice de \mathcal{A} admet toujours au moins une valeur propre (et que celle-ci appartient à $\{0; -1; -2\}$).

9. Dans cette question, on suppose que M admet exactement les deux valeurs propres distinctes -1 et -2 .

On suppose que M n'est pas diagonalisable. Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 , et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à M .

- a) En reprenant une partie du raisonnement de la question 7. : puisque 0 n'est ici pas valeur propre de M , alors la relation $(*)$ se simplifie en : $(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3$.

Les propriétés de la représentation matricielle (unicité d'une telle représentation dans une base donnée, le produit matriciel représente la composition des endomorphismes) assurent alors l'équivalence :

$$(M + I_3)(M + 2I_3) = 0_3 \iff (f + Id) \circ (f + 2Id) = 0$$

Enfin : $(M + 2I_3)(M + I_3) = M^2 + 2I_3M + MI_3 + 2I_3^2 = M^2 + 3M^2 + 2I_3 = (M + I_3)(M + 2I_3)$, donc on a aussi :

$$(f + 2Id) \circ (f + Id) = (f + Id) \circ (f + 2Id) = 0$$

- b) Les valeurs propres de f sont les mêmes que celles de sa matrice représentative M : ainsi -1 est valeur propre de f , ce qui assure que son sous-espace propre associé $E_{-1}(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul de \mathbb{R}^3 , et est par conséquent de dimension au moins égale à 1.

Or : $E_{-1}(f) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u \iff (f + Id)(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\} = \text{Ker}(f + Id)$,

donc $\dim \text{Ker}(f + Id) \geq 1$.

Comme -2 est aussi valeur propre de M et donc de f , un raisonnement parfaitement analogue assure que $\dim \text{Ker}(f + 2Id) \geq 1$.

- c) Comme M n'est pas diagonalisable : f ne l'est pas non plus, et comme -1 et -2 sont ses seules valeurs propres, cela signifie alors que

$$\dim \text{Ker}(f + Id) + \dim \text{Ker}(f + 2Id) < 3 \iff \dim \text{Ker}(f + Id) + \dim \text{Ker}(f + 2Id) \leq 2.$$

Or chacune de ces deux dimensions est déjà supérieure ou égale à 1 : la seule possibilité est donc que

$$\dim \text{Ker}(f + Id) = \dim \text{Ker}(f + 2Id) = 1$$

- d) Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1 , vérifiant donc :

$$u \neq 0_{\mathbb{R}^3} \text{ et } f(u) = -u \iff (f + Id)(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Soit v un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2 , vérifiant donc :

$$v \neq 0_{\mathbb{R}^3} \text{ et } f(v) = -2v \iff (f + 2Id)(v) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

- i. Les deux vecteurs u et v sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes : une propriété du cours assure déjà que (u, v) forme une famille libre dans \mathbb{R}^3 .

On peut éventuellement redémontrer rapidement ce résultat en considérant une combinaison linéaire nulle de u et v , avec α et β deux réels tels que :

$\alpha.u + \beta.v = 0_{\mathbb{R}^3}$. La linéarité de f est les propriétés de u et v permettent alors de composer les deux membres de cette égalité par f , ce qui donne la nouvelle relation :

$$\alpha.f(u) + \beta.f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff -\alpha.u - 2\beta.v = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

La somme terme à terme de ces deux égalités donne alors : $-\beta.v = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \beta = 0$ puisque v est vecteur propre, donc non nul.

La première égalité se réduit alors à : $\alpha.u = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \alpha = 0$ puisqu'à nouveau, u est un vecteur propre donc non nul.

- ii. Soit w un vecteur de \mathbb{R}^3 n'appartenant pas à $\text{Vect}(u, v)$. Vérifions que (u, v, w) est libre en considérant une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs, de la forme :

$$a.u + b.v + c.w = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ où } a, b, c \text{ sont des réels.}$$

Si c est non nul, alors cette égalité se réécrit : $a.u + b.v = -c.w \iff -\frac{a}{c}.u - \frac{b}{c}.v = w$, ce qui impliquerait que w appartient à $\text{Vect}(u, v)$: or on a supposé le contraire !

On en déduit que $c = 0$, et la relation se réduit à : $a.u + b.v = 0_{\mathbb{R}^3}$ qui implique $a = b = 0$

comme on l'a vu précédemment (la famille (u, v) est libre).

Bref, l'égalité $a.u + b.v + c.w = 0_{\mathbb{R}^3}$ implique $a = b = c = 0$, donc la famille (u, v, w) est libre. Comme il s'agit d'une famille de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 qui est un espace vectoriel de dimension 3, on en déduit sans calcul supplémentaire que c'est aussi une base de \mathbb{R}^3 .

- iii. Le fait que $(f + Id) \circ (f + 2Id)$ soit l'endomorphisme nul (vu en 9.a)) implique notamment que :

$$((f + Id) \circ (f + 2Id))(w) = 0_{\mathbb{R}^3}, \text{ donc que } (f + 2Id)(w) \text{ appartient à } \text{Ker}(f + Id) = E_{-1}(f).$$

Or on l'a vu en 9.b), ce sous-espace est de dimension 1 : le vecteur propre u en forme donc une base, et $E_{-1}(f) = \text{Vect}(u)$ contient $(f + 2Id)(w)$; cela implique bien l'existence d'un réel α tel que : $(f + 2Id)(w) = \alpha.u \iff f(w) + 2w = \alpha.u$.

Exactement de la même façon : $((f + 2Id) \circ (f + Id))(w) = 0_{\mathbb{R}^3}$ implique que $(f + Id)(w)$ appartient à $\text{Ker}(f + 2Id) = E_{-2}(f) = \text{Vect}(v)$, donc il existe un réel β tel que :

$$(f + Id)(w) = \beta.v \iff f(w) + w = \beta.v.$$

Il faut alors réussir à voir qu'on peut isoler w en faisant la différence terme à terme des deux égalités $f(w) + 2w = \alpha.u$ et $f(w) + w = \beta.v$, qui donne : $w = \alpha.u - \beta.v$ qui fait bien apparaître w comme combinaison linéaire de u et v , donc élément de $\text{Vect}(u, v)$.

Or on a justement supposé le contraire plus haut en 9.d).ii. ! On en déduit donc une contradiction, et l'hypothèse de départ est finalement fautive : si $M \in \mathcal{A}$ a pour seules valeurs propres -1 et -2 , alors M n'est pas diagonalisable.

10. Question-bilan de tout ce qui précède :

- On a démontré à la question 4. l'implication :

$$M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0; -1; -2\} \implies M \in \mathcal{A}$$

- On a démontré à la question 5. que si M appartient à \mathcal{A} alors son spectre est toujours inclus dans $\{0; -1; -2\}$.
- On a démontré à la question 7. que si M élément de \mathcal{A} , possède une seule valeur propre α parmi les trois possibles, alors $M = \alpha.I_3$ donc M est diagonalisable, puisque déjà diagonale.
- On a démontré à la question 6. que si M élément de \mathcal{A} admet effectivement pour valeurs propres les trois seuls réels possibles, alors M est diagonalisable.
- On a démontré tout au long de la question 9., que si M élément de \mathcal{A} admet pour valeurs propres exactement deux des trois réels possibles, alors M est diagonalisable.

- Tous les cas ayant été étudiés, on a bien prouvé l'implication réciproque :

$$M \in \mathcal{A} \implies M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0; -1; -2\}$$

Et l'équivalence demandée est démontrée :

$$M \in \mathcal{A} \iff M \text{ est diagonalisable et } \text{Sp}(M) \subset \{0; -1; -2\}$$

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose, sous réserve de convergence :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt.$$

Partie A

Dans cette partie, on fixe $n \geq 2$.

1. a) Le fait évident que $\lim_{t \rightarrow 0} 1+t^n = 1$ permet d'écrire : $1+t^n \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 \implies \frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$
par compatibilité de l'équivalence avec le quotient.
- b) Une primitive classique de \ln sur $]0; +\infty[$ est connue, il s'agit de la fonction $t \mapsto t \ln(t) - t$, qui permet d'écrire directement, pour tout $y \in]0; 1]$:

$$\int_y^1 \ln(t) dt = \left[t \ln(t) - t \right]_y^1 = \ln(1) - 1 - (y \ln(y) - y) = -1 + y - y \ln(y)$$

Si on veut vraiment redémontrer le résultat sans utiliser directement cette primitive (notamment si on ne s'en rappelle pas...), on procède par intégration par parties, en posant :

$$\begin{aligned} u(t) = \ln(t) &\longrightarrow u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = 1 &\longrightarrow v(t) = t \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]0; 1]$, donc par intégration par parties :

$$\int_y^1 \ln(t) dt = \left[t \ln(t) \right]_y^1 - \int_y^1 1 dt = \ln(1) - y \ln(y) - (1 - y) = -1 + y - y \ln(y)$$

Le résultat de croissances comparées en 0 : $\lim_{y \rightarrow 0} y \ln(y) = 0$ permet alors d'écrire :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \ln(t) dt = \lim_{y \rightarrow 0} -1 + y - y \ln(y) = -1, \text{ ce qui prouve que l'intégrale } \int_0^1 \ln(t) dt, \text{ impropre en } 0, \text{ converge et vaut : } \int_0^1 \ln(t) dt = -1.$$

Et il est normal de trouver un résultat négatif, puisque \ln est négative sur $]0; 1]$.

- c) Attention à la rédaction ici ! Sur $]0; 1]$, les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^n}$ sont continues et de signe négatif; on a vu que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge, donc $\int_0^1 -\ln(t) dt$ aussi : par comparaison d'intégrales de fonctions continues et positives, l'intégrale $\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1+t^n} dt$ converge.

On en déduit que $J_n = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$, est elle-même une intégrale impropre convergente.

Il fallait prendre soigneusement garde au signe des fonctions ici : le théorème de comparaison exige de travailler avec des fonctions continues et positives sur l'intervalle considéré !

2. a) En se souvenant que $n \geq 2$, on écrit : $t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{3/2} \cdot \frac{\ln(t)}{t^n} = \frac{\ln(t)}{t^{n-3/2}}$.

Le fait que $n \geq 2$ implique que $n - 3/2 > 0$, et les croissances comparées au voisinage de $+\infty$ s'appliquent : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t^{n-3/2}} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{3/2} \frac{\ln(t)}{1+t^n} \right) = 0$.

b) Le résultat suivant signifie que : $\frac{\ln(t)}{1+t^n} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, les deux fonctions ainsi comparées étant positives et continues sur $[1; +\infty[$.

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ est convergente, comme intégrale de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$.

Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives, assure alors que l'intégrale $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt$ est elle-même convergente.

3. Les deux intégrales J_n et K_n étant convergentes : par définition même de la convergence d'une intégrale doublement impropre (en 0 et en $+\infty$) et en cohérence avec la relation de Chasles,

l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = J_n + K_n$, est donc convergente.

Partie B

4. a) Pour tout entier $n \geq 2$, et tout réel $t \in]0; 1]$: $\frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) = \frac{\ln(t) - (1+t^n)\ln(t)}{1+t^n} = \frac{-t^n \ln(t)}{1+t^n}$,

où : $1+t^n \geq 1$ puisque $t > 0$, donc $\frac{1}{1+t^n} \leq 1$ par stricte décroissance de l'inverse sur \mathbb{R}_+^* .

Pour $t \in]0; 1]$, $\ln(t) \leq 0$ donc $-t^n \ln(t) \geq 0$: si donc on multiplie les deux membres de l'inégalité précédente par cette quantité positive, on obtient bien

$$0 \leq \frac{-t^n \ln(t)}{1+t^n} \leq -t^n \ln(t) \iff 0 \leq \frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leq -t^n \ln(t)$$

b) Dans le même esprit qu'à la question 1., on réalise une intégration par parties dans l'intégrale

$\int_y^1 -t^n \ln(t) dt$ pour $y \in]0; 1]$, en posant :

$$\begin{aligned} u(t) = \ln(t) &\longrightarrow u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = -t^n &\longrightarrow v(t) = -\frac{t^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]0; 1]$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_y^1 -t^n \ln(t) dt &= \left[-\frac{t^{n+1} \ln(t)}{n+1} \right]_y^1 + \frac{1}{n+1} \int_y^1 t^n dt = 0 + \frac{y^{n+1} \ln(y)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_y^1 \\ &= \frac{y^{n+1} \ln(y)}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{y^{n+1}}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Or $\lim_{y \rightarrow 0} y^{n+1} = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} y^{n+1} \ln(y) = 0$ par croissances comparées, donc :

$\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 -t^n \ln(t) dt = \frac{1}{(n+1)^2}$, ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^1 -t^n \ln(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{(n+1)^2}$.

c) L'inégalité obtenue en 4.a) concerne des fonctions continues et positives sur $]0; 1]$; la convergence de l'intégrale impropre obtenue en 4.b) et les propriétés de positivité et croissance de l'intégrale ($0 < 1$) assure que :

$$0 \leq \int_0^1 \left(\frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \right) dt \leq \int_0^1 -t^n \ln(t) dt \iff 0 \leq J_n - \int_0^1 \ln(t) dt \leq \frac{1}{(n+1)^2} \iff 0 \leq J_n + 1 \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$, alors le théorème d'encadrement assure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n + 1 = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -1$$

5. a) Les propriétés de la fonction \ln assurent que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x) \geq 0$.

On sait aussi que la fonction \ln est concave sur $]0; +\infty[$, donc sa courbe est sous sa tangente au point d'abscisse 1, qui a pour équation $y = \ln'(1)(x - 1) + \ln(1) \iff y = x - 1$, ce qui donne :

$\forall x \geq 1$, $\ln(x) \leq x - 1 \leq x$, donc : $\forall x \geq 1$, $0 \leq \ln(x) \leq x$.

Puisque pour tout $x \geq 1$ et pour tout entier $n \geq 3$, $1 + x^n \geq x^n > 0$, alors : $\frac{1}{1 + x^n} \leq \frac{1}{x^n}$ par stricte décroissance de \ln sur \mathbb{R}_+^* . Par produit membre à membre de cette inégalité avec la précédente, toutes les deux étant de même sens et concernant des réels tous positifs :

$$\forall x \geq 1, \forall n \geq 3, \quad 0 \leq \frac{\ln(x)}{1 + x^n} \leq \frac{x}{x^n} \iff 0 \leq \frac{\ln(x)}{1 + x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$$

b) Comme $n \geq 3$, alors $n - 1 \geq 2$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente.

Elle vaut d'ailleurs : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{(n-2)x^{n-2}} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{1}{(n-2)A^{n-2}} + \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n-2}$.

On a déjà vu que l'intégrale K_n est convergente : on peut donc à nouveau utiliser les propriétés de positivité et croissance de l'intégrale sur $[1; +\infty[$, les fonctions concernées étant continues et positives sur cet intervalle. On obtient ainsi :

$$\forall n \geq 3, \quad 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1 + x^n} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} dx \iff 0 \leq K_n \leq \frac{1}{n-2}$$

c) Le théorème d'encadrement donne évidemment : $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n + K_n = -1 + 0 = -1.$$

Partie C

6. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0; 1]$.

Le changement de variable $u = -\ln(t)$ est bien de classe C^1 sur $]0; 1]$.

- élément différentiel : $du = -\frac{1}{t} dt$.

- corps de l'intégrale : $\frac{\ln(t)}{1 + t^n} dt = \frac{-t \ln(t)}{1 + t^n} \cdot \left(-\frac{1}{t} dt\right) = \frac{e^{-u} \cdot u}{1 + (e^{-u})^n} \cdot du = \frac{ue^{-u}}{1 + e^{-nu}} du$.

- bornes : quand $t = y$, $u = -\ln(y)$ et quand $t = 1$, $u = 0$.

Ainsi par changement de variable : $\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1 + t^n} dt = \int_{-\ln(y)}^0 \frac{ue^{-u}}{1 + e^{-nu}} du = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1 + e^{-nu}} e^{-u} du$.

7. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

a) D'après le cours, une densité de X est la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b) Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $Y_n = \frac{-X}{1 + e^{-nX}}$.

Ainsi Y_n est une fonction de $X : Y_n = g(X_n)$ où $g : x \mapsto \frac{-x}{1 + e^{-nx}}$ est continue sur $[0; +\infty[= X(\Omega)$.

D'après le théorème de transfert, Y_n admet donc une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx$ est absolument convergente. La fonction f est nulle sur $] -\infty; 0]$ et f et g

sont positives sur $[0; +\infty[$, donc cela revient à étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{-x}{1+e^{-nx}} \cdot e^{-x} dx$.

Or dans le changement de variable effectué à la question précédente : on sait que

$\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} dt = J_n$ est convergente, et que $\lim_{y \rightarrow 0} -\ln(y) = +\infty$: on en déduit que l'intégrale

impropre $\int_0^{+\infty} \frac{-x}{1+e^{-nx}} e^{-x} dx$ converge et vaut J_n .

On a donc démontré que Y_n admet une espérance, et que $E(Y_n) = J_n$.

8. Dans le script ci-dessous, il suffit donc d'appliquer m fois de suite la fonction g à chaque simulation de X , pour obtenir autant de simulations de Y_n indépendantes.

```

1  function Y = simulY(n,m)
2      Y = zeros(1,m) // l'énoncé demande une matrice à une ligne et m colonnes
3      for i = 1:m
4          X = grand(1,1,'exp',1)
5          Y(i) = -X/(1+exp(-n*X))
6      end
7  endfunction

```

9. a) Question de cours : soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, de même espérance μ et de même variance.

Alors la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ converge en probabilité vers μ , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0.$$

- b) Le script suivant est sensé illustrer cette propriété :

```

1  n = input('Entrer la valeur de n : ')
2  disp(mean(simulY(n,1000)))

```

puisqu'il affiche la moyenne empirique d'un échantillon de 1000 simulations indépendantes de la loi de Y_n , ce qui sera probablement une bonne valeur approchée de $E(Y_n)$, donc de l'intégrale J_n .

Exercice 3

Partie A

1. L'événement $[X = 2]$ est réalisé si et seulement si on obtient Pile aux deux premiers lancers : $[X = 2] = P_1 \cap P_2$; comme la pièce est équilibrée et les lancers sont indépendants,

$$a_2 = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) = \frac{1}{4}. \text{ Selon le même principe :}$$

$$[X = 3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3 \text{ donc } a_3 = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}; [X = 4] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) :$$

$$\text{l'union est disjointe et les lancers indépendants, donc } a_4 = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}.$$

2. L'événement U_n est réalisé si et seulement si on a obtenu au moins 2 Piles consécutifs au cours des n premiers lancers : on doit donc obtenir une *première* succession de 2 Piles consécutifs au cours des n premiers lancers, et réciproquement si cela se produit, on aura bien obtenu au moins une succession de 2 Piles consécutifs au cours des n premiers lancers.

Bref : $U_n = \bigcup_{k=2}^n [X = k]$, et comme cette union est clairement disjointe (un *premier* double Pile,

s'il survient, ne se produit qu'une fois!), alors $\mathbb{P}(U_n) = \sum_{k=2}^n \mathbb{P}(X = k) \iff u_n = \sum_{k=2}^n a_k$.

3. a) La fonction Scilab ci-dessous simule les lancers de la pièce équilibrée jusqu'à l'obtention de deux Pile consécutifs et renvoie le nombre de lancers effectués.

La variable `pile` joue le rôle d'interrupteur : tant qu'on n'a pas eu deux Piles consécutifs, sa valeur reste strictement inférieure à 2. Un premier Pile l'incrémente (l'augmente) d'une unité mais si on obtient un Face juste après, elle retourne à la valeur 0. La variable `tirs` compte bien sûr le nombre total de lancers effectués.

```

1  function y = simulX()
2      tirs = 0
3      pile = 0
4      while pile < 2 // while pile <> 2 est aussi correct
5          if rand() < 1/2 then pile = pile + 1
6          else
7              pile = 0
8          end
9          tirs = tirs + 1
10     end
11     y = tirs
12 endfunction

```

- b) Il y a plusieurs façons possibles d'écrire la fonction demandée, en voici deux : la première construit un vecteur de n simulations de l'expérience et calcule la moyenne des résultats obtenus via la fonction `mean` de Scilab. La deuxième construit la somme des résultats des n simulations via une boucle `for`, et divise à la fin par le nombre de simulations pour obtenir la moyenne arithmétique des résultats obtenus.

```

1  function s = moyenne(n)
2      V = zeros(1,n)
3      for i = 1:n
4          V(i) = simulX()
5      end
6      s = mean(V)
7  endfunction

```

Ou bien :

```

1  function s = moyenne(n)
2      t = 0
3      for i = 1:n
4          t = t + simulX()
5      end
6      s = t/n
7  endfunction

```

- c) Le graphe de l'énoncé affiche des valeurs de `moyenne(n)` pour n variant de 1 à 200 : on constate que plus n est grand, plus ces moyennes se stabilisent autour d'une valeur très proche de 6.

En application de la loi faible des grands nombres, on peut donc conjecturer que la variable aléatoire X admet une espérance sans doute égale à 6.

Partie B

4. a) Pour tout entier $n \geq 2$: $\mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n \cup B_{n+1})$ d'après la formule du crible, ce qui incite à vérifier l'égalité d'événements $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$.

Or l'événement U_{n+1} est réalisé si et seulement si on voit apparaître au moins deux Piles consécutifs au cours des $n + 1$ premiers lancers. Il y a alors deux possibilités :

- deux Piles consécutifs ont pu être déjà obtenus au cours des n premiers lancers, ce qui correspond alors à l'événement U_n .
- on peut aussi avoir eu deux Piles consécutifs aux lancers n et $n + 1$, ce qui correspond à l'événement B_{n+1} .

Il n'y a pas d'autre possibilité, donc on a bien $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ et

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}).$$

b) Soit un entier $n \geq 4$: les événements U_n et B_{n+1} ne sont pas incompatibles car on peut avoir eu un premier double Pile au cours des n premiers lancers, et un nouveau double Pile aux lancers n et $n + 1$.

Si on considère les 4 derniers lancers jusqu'au $n + 1$ -ième, il y a en fait deux possibilités :

- Soit on a effectivement eu un double Pile aux lancers n et $n + 1$ (événement B_{n+1}), et aussi un Pile au lancer $n - 1$, ce qui donne un double Pile aux lancers $n - 1$ et n et compte pour la réalisation de U_n : c'est donc l'événement $P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$.
- Soit on a bien eu un double Pile aux lancers n et $n + 1$, mais un Face au lancer $n - 1$, et dans ce cas U_n est aussi réalisé si et seulement si le premier double Pile a en fait été obtenu au cours des $n - 2$ premiers lancers, puisqu'il ne peut pas intervenir aux lancers $n - 2$ et $n - 1$ ni aux lancers $n - 1$ et n à cause du Face au $(n - 1)$ -ième lancer. On est donc dans le cas de l'événement $(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$

Bref : $U_n \cap B_{n+1} = (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$ et cette fois l'union est disjointe.

c) On en déduit : $\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$; comme les lancers sont indépendants, alors les événements de chacune des deux intersections ci-dessus sont mutuellement indépendants, ce qui permet de conclure que :

$$\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(U_{n-2}) \cdot \mathbb{P}(F_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(P_n) \cdot \mathbb{P}(P_{n+1}) + \mathbb{P}(P_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(P_n) \cdot \mathbb{P}(P_{n+1}) = \frac{1}{8} \cdot u_{n-2} + \frac{1}{8}, \text{ et ainsi en reprenant la relation obtenue en 4.a) :}$$

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) = u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}u_{n-2} - \frac{1}{8} \iff u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

5. La relation précédente donne : $\forall n \geq 4, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$. Or u_{n-2} est une probabilité, et à ce titre elle est comprise entre 0 et 1, ce qui implique donc que :

$$\forall n \geq 4, \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \geq 0 \iff u_{n+1} - u_n \geq 0, \text{ donc la suite } (u_n)_{n \geq 4} \text{ est croissante.}$$

À nouveau puisque u_n est toujours une probabilité, la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est donc majorée par 1 : comme elle est aussi croissante, elle est donc convergente d'après le théorème de limite monotone.

Enfin en notant $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, la relation de récurrence obtenue en 4.c) et le principe d'unicité de la limite assurent que ℓ vérifie l'équation :

$$\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell) \iff 0 = \frac{1}{8}(1 - \ell) \iff \ell = 1$$

6. L'événement $[X = -1]$ est, par définition, réalisé si et seulement si on n'obtient jamais deux Piles consécutifs, donc $[X = -1] = \bigcap_{n=2}^{+\infty} \overline{U_n}$.

Cela s'écrit aussi, d'après la loi de de Morgan : $[X = -1] = \overline{\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n}$, et $\mathbb{P}(X = -1) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right)$.

Or l'égalité d'événement $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ obtenue en 4.a) assure que $U_n \subset U_{n+1}$ pour tout $n \geq 2$, ce qui signifie que $(U_n)_{n \geq 2}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion.

La propriété de limite monotone pour les probabilités assure alors que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad \text{et donc :} \quad \mathbb{P}(X = -1) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 1 - 1 = 0$$

Partie C : Étude de l'espérance de X .

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 2$: $v_n = 1 - u_n$ et $S_n = \sum_{k=2}^n k\mathbb{P}(X = k)$.

7. Pour tout entier $n \geq 4$, en reprenant la relation obtenue en 4.c), vu que $v_n = 1 - u_n \iff u_n = 1 - v_n$:

$$v_n - v_{n+1} = 1 - u_n - 1 + u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) = \frac{1}{8}v_{n-2}$$

8. Pour tout entier $n \geq 2$: $v_n = 1 - u_n = \mathbb{P}(\overline{U_n})$ est la probabilité de ne jamais voir apparaître de double Pile au cours des n premiers lancers.

Formulé ainsi, on peut donc écrire l'égalité d'événements : $\forall n \geq 2, U_n = [X > n]$. Mais alors :

Puisque X est une variable aléatoire à valeurs entières supérieures ou égales à 2, on a toujours l'égalité d'événements $[X > n] = [X \geq n + 1] = [X = n + 1] \cup [X > n + 1]$.

Il s'agit d'une union disjointe, donc pour tout $n \geq 2$:

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X = n+1) + \mathbb{P}(X > n+1) \iff v_n = \mathbb{P}(X = n+1) + v_{n+1} \iff \mathbb{P}(X = n+1) = v_n - v_{n+1}$$

9. Démontrons alors par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: " $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$ ", est vraie pour tout $n \geq 2$:

[I.] Pour $n = 2$: d'une part, $S_2 = 2\mathbb{P}(X = 2) = 2a_2 = \frac{1}{2}$, et d'autre part, d'après la question 2. partie A :

$$v_2 = 1 - u_2 = 1 - a_2 = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad v_4 = 1 - u_4 = 1 - (a_2 + a_3 + a_4) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

donc $6 - 8v_4 - 2v_2 = 6 - 4 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

[H.] Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geq 2$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est encore vraie, soit : $S_{n+1} = 6 - 8v_{n+3} - (n + 1)v_{n+1}$.

Par définition des sommes S_n : $S_{n+1} = S_n + (n + 1)\mathbb{P}(X = n + 1)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence et les relations obtenues aux question 7. et 8. :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n + 1)(v_n - v_{n+1}) = 6 - 8\left(\frac{1}{8}v_n + v_{n+3}\right) + v_n - (n + 1)v_{n+1} \\ &= 6 - v_n - 8v_{n+3} + v_n - (n + 1)v_{n+1} = 6 - 8v_{n+3} - (n + 1)v_{n+1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

[C.] La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 2$, d'après le principe de récurrence.

10. Pour tout $n \geq 2$, $S_{n+1} - S_n = (n+1)\mathbb{P}(X = n+1) \geq 0$ puisque $n+1 \geq 3$ et $\mathbb{P}(X = n+1)$ est une probabilité, donc la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est bien croissante.

De plus, pour tout $n \geq 2$: les nombres v_{n+2} et v_n sont positifs puisqu'ils représentent des probabilités, donc il est clair que $\forall n \geq 2$, $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n \leq 6$.

La suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est donc croissante et majorée : elle converge, d'après le théorème de limite monotone.

11. Par définition, la variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 2} k\mathbb{P}(X = k)$

est absolument convergente. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, cela revient à prouver la convergence simple de la série, c'est-à-dire à étudier la convergence de la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ des sommes partielles de cette série.

On a vu à la question précédente que $(S_n)_{n \geq 2}$ converge, donc X admet bien une espérance, qui vaut d'ailleurs :

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

12. a) Si on reprend la relation de la question 9., alors on obtient : $\forall n \geq 2$, $nv_n = 6 - 8v_{n+2} - S_n$, où $v_{n+2} = 1 - u_{n+2}$ converge vers $1 - 1 = 0$ d'après la question 5., et où S_n converge vers la valeur finie $E(X)$ d'après 11.

La suite $(nv_n)_{n \geq 2}$ est donc bien convergente comme somme de suites convergentes. On note λ sa limite.

b) Si on suppose $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$: comme v_n est une probabilité, la suite (nv_n) est positive et sa limite vérifie alors $\lambda > 0$.

Dans ce cas, le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nv_n = \lambda > 0$ s'écrit aussi : $nv_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda \iff v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$.

Or la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\lambda}{n}$ est divergente, puisque c'est à un facteur positif près la série harmonique.

Ainsi par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ serait divergente.

Dans ce cas, l'égalité : $\forall n \geq 4$, $v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}v_{n-2}$ qui se réécrit aussi :

$\forall n \geq 2$, $v_n = 8(v_{n+2} - v_{n+3})$ assure que la série $\sum_{n \geq 2} 8(v_{n+2} - v_{n+3})$, est divergente.

Or pour tout $n \geq 2$: $\sum_{k=2}^n 8(v_{k+2} - v_{k+3}) = 8 \left(\sum_{j=4}^{n+2} v_j - \sum_{i=5}^{n+3} v_i \right) = 8(v_4 - v_{n+3})$, où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+3} = 0$

comme on l'a vu plus haut, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n 8(v_{k+2} - v_{k+3}) = 8v_4$ est finie : la série converge, ce qui est en contradiction totale avec ce qu'on avait obtenu juste avant ce raisonnement !

L'hypothèse de départ est donc absurde : $\lambda \neq 0$ est impossible, donc $\lambda = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} nv_n$.

c) On peut donc, au vu de tous ces résultats, reprendre la relation de la question 9. :

$\forall n \geq 2$, $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$, où on a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+2} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} nv_n$.

On en déduit donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 6$, ce qui termine de prouver que la variable aléatoire X admet une espérance, qui vaut :

$$E(X) = 6$$

* * * FIN DU SUJET * * *