MATHÉMATIQUES - HEC - ESSEC E 2021

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Ce problème s'intéressait (coïncidence vraiment ?) à un modèle, inspiré du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.

Partie 1 - Lois composées

On considère :

- un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et J un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^+$;
- une variable aléatoire Y sur cet espace à valeurs dans J.
- une famille $(X_t)_{t\in J}$ de variables aléatoires sur cet espace, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes de Y, telle que pour tout $t \in J$,
$$X_t \text{ suit la loi } \mu(t)$$
$\mu(t)$ désignant une loi de probabilité de paramètre t.

On définit la variable aléatoire Z sur cet espace par :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad \text{si } Y(\omega) = t \quad \text{alors} \quad Z(\omega) = X_t(\omega)$$
et on dit que Z suit la loi $\mu(Y)$. On considère dans cette partie une telle variable Z qui suit la loi $\mu(Y)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction f_k de J dans $[0, 1]$ par :
$$f_k(t) = \mathbb{P}\big([X_t = k]\big)$$

1. *Un exemple avec Scilab.* Le script suivant simule la loi géométrique de paramètre t, puis simule Z suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(Y)$.

```
function r = X(t)
    r = 1
    while rand()>t
        r = r+1
    end
endfunction

Y = rand()
Z =X(Y)
disp(Z)
```

Cela permet de comprendre un peu les définitions ci-dessus : la valeur (aléatoire) que prend Y est celle qui sert de paramètre t à la loi géométrique utilisée en simulation pour donner sa valeur à Z.

• *Cas où Y est discrète.* On suppose dans les questions **2.** et **3.** que Y est discrète.

2. a) Soit $y \in Y(\Omega)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, en suivant bien la définition de Z :

$$\mathbb{P}\big([Z=k]\cap[Y=y]\big) = \mathbb{P}\big([X_y=k]\cap[Y=y]\big) \overset{(*)}{=} \mathbb{P}(X_y=k)\times\mathbb{P}(Y=y) = f_k(y)\mathbb{P}(Y=y)$$

(*) par indépendance des variable aléatoires X_y et Y (énoncé).

On en déduit que si $\mathbb{P}([Y=y])\neq 0$:

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}([Z=k]) = \frac{\mathbb{P}\big([Z=k]\cap[Y=y]\big)}{\mathbb{P}([Y=y])} = \frac{f_k(y)\mathbb{P}([Y=y])}{\mathbb{P}([Y=y])} = f_k(y)$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}([Z=k])$ s'obtient avec les probabilités précédentes, via la *formule des probabilités totales* avec le système complet $\big([Y=y]\big)_{y\in Y(\Omega)}$:

$$\mathbb{P}([Z=k]) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\big([Z=k]\cap[Y=y]\big) = \sum_{y\in Y(\Omega)} f_k(y)\mathbb{P}(Y=y)$$

Par σ-additivité, la somme en question est toujours bien définie même si $Y(\Omega)$ est infini (dénombrable).

On reconnaît surtout ici le théorème de transfert qui assure que :

$$\sum_{y\in Y(\Omega)} f_k(y)\mathbb{P}([Y=y]) = E\big(f_k(Y)\big) = \mathbb{P}([Z=k]) \qquad (1)$$

c) *Un exemple où* $J=\mathbb{N}^*$. Soit $p\in]0;1[$. Si pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et si la loi de Y est définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([Y=n]) = np^2(1-p)^{n-1}$$

alors : Z prend les valeurs de l'une des variables aléatoire X_n où n sera la valeur aléatoire prise par Y, qui est donc potentiellement n'importe lequel des entiers de $\mathbb{N}^*$, donc $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$, et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, en reprenant les calculs précédents où on adapte les notations (y valeur de Y sera notée plutôt $n\in\mathbb{N}^*$ ici) :

$$P([Z=k]) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_k(n)\mathbb{P}([Y=n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n=k]).\mathbb{P}([Y=n])$$

où puisque X_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, alors : $\mathbb{P}([X_n=k]) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } 1\leqslant k\leqslant n \\ 0 & \text{si } k>n \end{cases}$,

donc du point de vue de n qui varie dans la somme précédente, toute les termes d'indices $n<k$, sont nuls, et il ne reste que les termes d'indices $n\geqslant k$:

$$\mathbb{P}([Z=k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{n}}\times\cancel{n}p^2(1-p)^{n-1} \overset{[j=n-1]}{=} p^2\sum_{j=k-1}^{+\infty}(1-p)^j$$

$$= p^2\times\frac{(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)} = p^2.\frac{(1-p)^{k-1}}{p}$$

Soit : $\forall k\in\mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([Z=k]) = p(1-p)^{k-1}$, ce qui correspond bien à la loi géométrique de paramètre p pour Z.

3. On suppose que pour tout $t\in J$, $E(X_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $E\big(g(Y)\big)$ existe.

a) On est toujours dans le cas discret, donc sachant que $E\big(g(Y)\big)$ existe, d'après le théorème de transfert :

$$E\big(g(Y)\big) = \sum_{y\in Y(\Omega)} g(y)\mathbb{P}([Y=y])$$

où puisque X_y est, elle, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admet une espérance aussi :

$g(y) = E(X_y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([X_y=k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} kf_k(y)$, ce qui donne bien :

$$E\big(g(Y)\big) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} kf_k(y)\mathbb{P}([Y=y])\right)$$

b) En admettant qu'on peut inverser l'ordre des sommes, on peut alors écrire :

$$E\big(g(Y)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} kf_k(y)\mathbb{P}([Y=y])\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} f_k(y)\mathbb{P}([Y=y])\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} kE\big(f_k(Y)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([Z=k]) \qquad \text{d'après } \mathbf{2.}\text{b)}$$

Soit : $\quad E\big(g(Y)\big) = E(Z) \qquad (2)$

• *L'énoncé admettait que les résultats établis dans les questions* ***2.*** *et* ***3.****, en particulier les relations* (1) *et* (2)*, sont encore vrais lorsque* Y *n'est plus discrète.*

4. *Un premier exemple.* On suppose que $J =]0,1[$, que la loi de X_t est la loi géométrique de paramètre t et que Y suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

a) On a alors, pour tout $t \in]0,1[$, valeur prise par Y et donnée comme paramètre à la variable aléatoire X_t : $\quad f_k(t) = \mathbb{P}(X_t = k) = t(1-t)^{k-1}$. La variable aléatoire prend aussi, pour tout $\omega\in\Omega$, la valeur d'une des variables X_t, donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([Z=k]) \overset{(1)}{=} E\big(f_k(Y)\big) = E\big(Y(1-Y)^{k-1}\big)$$

On utilise cette fois, le théorème de transfert pour les variables aléatoires à densité, avec φ_Y est une densité de Y, définie par (loi uniforme sur $]0,1[$) : $\quad \forall y\in\mathbb{R},\ \varphi_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y\in]0,1[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

La convergence absolue de l'intégrale ne fait pas trop de doute ici puisque Y est à support borné : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([Z=k]) = E\big(Y(1-Y)^{k-1}\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(1-y)^{k-1}.\varphi_Y(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 y(1-y)^{k-1}\mathrm{d}y$$

En posant le changement de variable affine $x = 1-y$, on obtient donc, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([Z=k]) = \int_1^0 (1-x).x^{k-1}.(-\mathrm{d}x) = \int_0^1 (1-x).x^{k-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(x^{k-1}-x^k\big)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - 0 = \frac{k+1-k}{k(k+1)}$$

$$\mathbb{P}([Z=k]) = \frac{1}{k(k+1)}$$

La variable aléatoire discrète Z admet alors une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}([Z=k]) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k+1}$ est absolument convergente : c'est une série à termes positifs, et c'est surtout à un décalage d'indice près, la série harmonique dont on sait qu'elle diverge.

Donc dans cet exemple, Z n'admet pas d'espérance (et la relation (2) est donc inapplicable).

b) D'après le cours sur la loi géométrique, pour tout t de $]0,1[$, X_t admet une espérance qui vaut $E(X_t) = \frac{1}{t}$, qu'on note $g(t)$.

L'espérance $E\big(g(Y)\big) = E\Big(\frac{1}{Y}\Big)$ existe alors si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t}\varphi_Y(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

La fonction intégrée est nulle en-dehors de $]0,1[$ et positive sur cet intervalle, donc on est ramené à étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}\varphi_Y(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

Il s'agit d'une intégrale de Riemann impropre en 0 avec $\alpha = 1$: elle est donc divergente, et $E\big(g(Y)\big)$ n'existe pas davantage que $E(Z)$.

5. *Un deuxième exemple.* On suppose que $J = [0;+\infty[$, que la loi de X_t est la loi de Poisson de paramètre t et que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Par suite, Z suit la loi $\mathcal{P}(Y)$.

L'énoncé prenait comme convention le fait que la loi de Poisson de paramètre 0 est la loi de la variable certaine nulle.

a) Cette fois on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0;+\infty[$:

$$f_k(t) = \mathbb{P}([X_t = k]) = e^{-t}.\frac{t^k}{k!}$$

On note encore φ_Y une densité de Y, ici définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

La variable aléatoire Z a le même univers-image $\mathbb{N}$ que toutes les variables X_t, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, sous réserve de convergence absolue de l'intégrale et d'après la relation (1) :

$$\mathbb{P}([Z=k]) = E\big(f_k(Y)\big) = E\Big(\frac{Y^k}{k!}e^{-Y}\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}.e^{-t}.\varphi_Y(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}.e^{-t}.\lambda.e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}.\lambda.e^{-(\lambda+1)t}\mathrm{d}t$$

ce qui donne la première forme voule. Le changement de variable affine $x = (\lambda+1)t$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif sur $[0;+\infty[$, à valeurs dans $[0;+\infty[$, donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}.\lambda.e^{-(\lambda+1)t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{\lambda+1}\right)^k}{k!}.\lambda.e^{-x}.\frac{\mathrm{d}x}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.e^{-x}\mathrm{d}x$$

b) Montrons par récurrence sur k que la propriété $\mathcal{P}(k)$: " $\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\mathrm{d}x$ converge et vaut 1", est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $k = 0$: $\int_0^{+\infty} \frac{x^0}{0!}e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} \Big[-e^{-x}\Big] = \lim_{A\to+\infty} -e^{-A}+1 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est encore vraie, soit : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}\mathrm{d}x = 1$.

Soit $A > 0$; dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{A} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}\mathrm{d}x$, on réalise une Intégration Par Parties en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!} & \longrightarrow & u'(x) = \dfrac{(k+1)x^k}{(k+1)!} = \dfrac{x^k}{k!} \\ v'(x) = e^{-x} & \longrightarrow & v(x) = -e^{-x} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$\int_0^A \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}\mathrm{d}x = \Big[-\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}\Big]_0^A - \int_0^1 \frac{x^k}{k!}(-e^{-x})\mathrm{d}x = -\frac{A^{k+1}}{(k+1)!}e^{-A} + \int_0^A \frac{x^k}{k!}e^{-x}\mathrm{d}x$$

Or par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^{k+1}.e^{-A} = \lim_{A\to+\infty} \frac{A^{k+1}}{e^A} = 0$

et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{x^k}{k!}e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!}e^{-x}\mathrm{d}x = 1$ par hypothèse de récurrence.

On en déduit ainsi que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}\mathrm{d}x$ converge et vaut encore 1, et donc que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

c) Des deux questions précédentes, on déduit donc que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([Z = k]) = \dfrac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}}$.

La variable aléatoire $Z+1$ est alors à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([Z+1 = k]) = \mathbb{P}([Z = k-1]) = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^k} = \frac{\lambda}{\lambda+1}.\frac{1}{(\lambda+1)^{k-1}} = \frac{\lambda}{\lambda+1}.\Big(\frac{1}{\lambda+1}\Big)^{k-1}$$

Puisque $\dfrac{1}{\lambda+1} = 1 - \dfrac{\lambda}{\lambda+1} \in]0,1[$, on en déduit que :

$$Z+1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p = \frac{\lambda}{\lambda+1}$$

d) D'après le cours sur la loi géométrique, on sait donc que $Z+1$ admet une espérance qui vaut $E(Z+1) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{\lambda+1}{\lambda}$.

La propriété de linéarité de l'espérance assure alors que Z admet une espérance, qui vaut :

$$E(Z) = E(Z+1-1) = E(Z+1) - 1 = \frac{\lambda+1}{\lambda} - 1 = \frac{1}{\lambda}$$

On compare alors cette espérance avec $E\big(g(Y)\big)$ (si celle-ci existe). Comme X_t suit la loi de Poisson de paramètre t, alors pour tout réel positif t : $\quad E(X_t) = t = g(t)$.

Ainsi : $\quad E\big(g(Y)\big) = E(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$ est bien définie puisque la loi exponentielle admet une espérance.

Sur cet exemple, la relation (2) est bien vérifiée : $\quad E(Z) = \dfrac{1}{\lambda} = E\big(g(Y)\big)$.

Partie 2 - Le modèle de Cori

6. Si on veut calculer la contagiosité globale de la population le n-ième jour, on doit considérer tous les groupes possibles d'individus, suivant leur jour de contamination avant le jour n.

Plus précisément : au jour n, les individus encore contagieux ont été infectés au plus tôt d jours (la durée maximale de contagiosité) avant ce jour n, donc au cours des jours $n-d, n-d+1, \ldots, n$, et si $n < d$ ils ont été infectés au cours des jours $0, 1, \ldots, n$, donc à un jour $n-k$ où k est compris entre 0 et $\min(n, d)$.

Ensuite, si on considère les individus qui ont été infectés k jours avant le jour n, soit au jour $n-k$: le nombre (aléatoire) de ces personnes est Z_{n-k}, et comme au jour n elles sont donc contagieuses depuis k jours, leur facteur individuel de contagiosité est égal à α_k.
La contagiosité globale du groupe des personnes infectées le jour $n-k$ est donc $\alpha_k.Z_{n-k}$.

La contagiosité globale de la population au jour n est alors la somme des contagiosités de tous les groupes de personnes encore contagieuses ce jour-là, regroupées par jour d'infection antérieur au jour n d'une valeur k inférieure ou égal à $\min(n, d)$, soit en effet :

$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k} \qquad (*)$$

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $E(I_n)$ existe. Comme on a aussi supposé que $E(R_n)$ existe, alors $Y_n = I_n R_n$ est le produit de deux variables aléatoires indépendantes, qui admettent chacune une espérance : d'après le cours, Y_n admet alors une espérance qui vaut :

$$E(Y_n) = E(I_n)E(R_n) = r_n E(I_n).$$

On suppose alors que Z_{n+1} suit la loi $\mathcal{P}(Y_n)$, c'est-à-dire que pour tout $t \in Y_n(\Omega)$, X_t suit la loi de Poisson de paramètre t. On a alors : $g(t) = E(X_t) = t$ pour tout t de $Y_n(\Omega)$, et $E\big(g(Y_n)\big) = E(Y_n) = r_n E(I_n)$ existe.

Le raisonnement mené à la question **3.** de la partie I (on travaille ici avec des variables aléatoires discrètes) assure alors que Z_{n+1} qui suit la loi composée $\mathcal{P}(Y_n)$, admet une espérance et que :

$$E(Z_{n+1}) = E\big(g(Y_n)\big) = r_n E(I_n).$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire Z_n est le nombre d'individus qui sont infectés le jour n : il s'agit donc par définition d'une variable finie, donc qui admet toujours une espérance.

Par ailleurs, d'après la relation précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = E(Z_{n+1}) = r_n E(I_n) = r_n E\Big(\sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k.Z_{n-k}\Big) \overset{(\bullet)}{=} r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k.E(Z_{n-k}) = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k.z_{n-k} \qquad (3)$$

$(\bullet)$ par linéarité de l'espérance.

8. *Programmation de z_n avec Scilab.*

On suppose que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \frac{n+2}{n+1}$. $\quad$ On note Δ la matrice-ligne $\begin{pmatrix} \alpha_0 & \cdots & \alpha_d \end{pmatrix}$.

Il faut bien réaliser ici que chaque nouveau terme de la suite (z_n), se calcule en fonction de plusieurs de ses prédécesseurs (tous ceux qui le précèdent d'un indice éloignés d'au plus $\min(n, d)$ de lui).

Il est donc nécessaire de stocker au fur et à mesure qu'on les calcule, les réels $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ pour que l'on puisse y faire appel facilement lors du calcul des termes suivants, jusqu'à z_n : on crée pour cela une matrice-ligne `Z` qui possède $n+1$ colonnes

On doit aussi prendre garde au fait qu'en `Scilab`, les matrices-lignes ont une numérotation qui

commence à l'indice 1 et non 0, ce qui entraîne un décalage : dans la matrice-ligne `Delta`, le réel α_i se trouve à la place $\texttt{Delta}(i+1) \quad (0 \leqslant i \leqslant d)$.
On aura le même souci avec les réels z_k qui, dans la matrice-ligne `Z`, se trouvent à la place $\texttt{Z}(k+1)$

Tout ceci ayant été dit, en écrivant $z_i = r_{i-1} \displaystyle\sum_{k=0}^{\min(i-1,d)} \alpha_k z_{i-1-k}$ pour tout i compris entre 1 et n, pour bien visualiser les enjeux d'indices (qui n'affectent pas par contre $r_{i-1} = \frac{i+1}{i}$) :

```
function r = z(Delta,n)
    Z = zeros(1,n+1)
    Z(1) = 1 \\ car Z_0 = 1
    for i = 1:n
        S = 0         // Calcul de la somme qui donnera $z_i$
        for k = 0 : min(i-1,d)
            S = S + Delta(k+1)*Z(i-1-k+1)      // donc S = S + Delta(k+1)*Z(i-k)
        end
        Z(i+1) = (i+1)/i*S    // stockage de z_i en vue du calcul suivant.
    end
endfunction
```

9. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$, $(V_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites d'événements tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$.

On sait qu'alors, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \cap V_n \subset U_n$ donc $\mathbb{P}(U_n \cap V_n) \leqslant \mathbb{P}(U_n) \leqslant 1$ par croissance de la probabilité.
Cela n'aboutit pas mais donne l'idée de travailler par encadrement impliquant $\mathbb{P}(U_n)$ et 1 qui tendent tous les deux vers 1 :
Si on regarde plutôt l'événemennt $U_n \cup V_n$, alors :
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \subset U_n \cup V_n$, donc $\mathbb{P}(U_n) \leqslant \mathbb{P}(U_n \cup V_n) \leqslant 1$.

Comme on a supposé $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = 1$, alors par encadrement : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cup V_n) = 1$.

Il reste alors à rappeler la formule du crible :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(U_n \cup V_n) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(V_n) - \mathbb{P}(U_n \cap V_n) \iff \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(V_n) - \mathbb{P}(U_n \cup V_n)$$

de sorte que, vues les hypothèses faites :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(V_n) - \mathbb{P}(U_n \cup V_n) = 1 + 1 - 1 = 1 = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n)$$

- On rappelle qu'on dit qu'un événement A est *presque sûr* lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

10. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \displaystyle\bigcap_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement : « la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours ».

a) Au vu de sa définition, l'événement A_n est réalisé si et seulement s'il n'y a plus aucune nouvelle personne infectée *à partir* du jour n (il reste quand même peut-être des personnes infectées aux jours précédents, mais elles n'en infectent pas de nouvelles). Après d jours sans nouvelle infection, la contamination s'éteint, donc une reformulation possible de A_n serait : « la contamination s'éteint au plus tard au jour $n+d$ ».

L'événement B est ainsi réalisé si et seulement s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A_n soit réalisé :

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

Or si à compter du jour n, plus personne n'est infecté, alors c'est encore le cas à compter du jour $n+1$: A_n implique A_{n+1}, et il suffit d'ailleurs de remarquer que :

$$A_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty}[Z_k = 0] = [Z_n = 0] \cap \bigcap_{k=n+1}^{+\infty}[Z_k = 0] \iff A_n = [Z_n = 0] \cap A_{n+1}, \text{ pour dire que :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n \subset A_{n+1}.$$

La suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc *croissante pour l'inclusion* : d'après la propriété de limite monotone pour les probabilités, on a donc :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

b) Comme suggéré par l'énoncé, on distingue deux cas :

- Si $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]\right) = 0$: alors pour tout entier $p > d$, $\bigcap_{k=n}^{n+p}[Z_k = 0] \subset \bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0] \cap \bigcap_{k=n+d+1}^{n+p}[Z_k = 0] \subset \bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]$, donc par croissance de la probabilité, et parce qu'une probabilité est toujours positive :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p}[Z_k = 0]\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]\right) = 0 \iff \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p}[Z_k = 0]\right) = 0 = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]\right)$$

(l'égalité est aussi vrai bien sûr si $p = d$)

- Si $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]\right) \neq 0$: l'événement $\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]$ signifie que $d+1$ jours en tout viennent de s'écouler sans qu'on enregistre de nouvelles contaminations : les personnes qui étaient potentiellement encore infectées le jour n, ne le sont plus après le jour $n+d$ et il n'y a donc par la suite plus personne qui soit contagieux et qui puisse être infecté : $\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]$ implique $\bigcap_{k=n}^{n+p}[Z_k = 0]$, et comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, les deux événements sont alors égaux, ce qui implique bien $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p}[Z_k = 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]\right)$.

Mais d'après la propriété de limite monotone :

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{+\infty}[Z_k = 0]\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p}[Z_k = 0]\right) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]\right)$$

puisque cette dernière probabilité ne dépend pas de p.

c) On raisonne ici par double implication, sachant que $\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]\right)$ d'après ce qui précède.

- Si B est presque sûr, donc si $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d}[Z_k = 0]\right) = 1$, alors :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0] \subset [Z_n = 0]$, donc par croissance de la probabilité à nouveau :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right) \leqslant \mathbb{P}(Z_n = 0) \leqslant 1$$

et $\mathbb{P}(Z_n = 0)$ est encadré par deux termes qui tendent vers 1 : d'après le théoprème d'encadrement, on a donc

$$\mathbb{P}(B) = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$$

- Réciproquement, si $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$: alors pour tout i compris entre 0 et d, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_{n+i} = 0]) = 1$ aussi.

  On généralise alors sans peine le résultat de la question **9.** et on conclut que la probabilité de l'intersection de tous les événements $[Z_{n+i} = 0]$ pour i compris entre 0 et d tend vers 1 comme chacune des probabilités individuelles :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1 \Longrightarrow \forall i \in [\![0; d]\!],\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_{n+i} = 0] = 1 \overset{\mathbf{9.}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{d} [Z_{n+i} = 0]\right) = 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right) = 1 \Longrightarrow \mathbb{P}(B) = 1$$

On a ainsi bien démontré que B est presque-sûr si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$.

d) La variable aléatoire Z_n est à valeurs entières positives (c'est un nombre de personnes), et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $[Z_n = k] \subset \overline{[Z_n = 0]}$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}([Z_n = k]) \leqslant 1 - \mathbb{P}([Z_n = 0])$, de sorte que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} 1 - \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_n = k]) = 0$$

d'après le théorème d'encadrement, c'est-à-dire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1 \iff \forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([Z_n = k]) = \mathbb{P}([Z = k])$$

où Z est la variable certaine égale à 0. Ainsi, B est presque sûr si et seulement si $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Z.

11. a) Si on utilise la relation (1) obtenue à la partie 1 avec $k = 0$, alors on peut écrire, puisque Z_{n+1} suit la loi $\mathcal{P}(Y_n)$:

$$\mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = E\big(f_0(Y_n)\big)$$

où $f_0(t) = \mathbb{P}(X_t = 0) = e^{-t}$ puisque X_t suit la loi de Poisson de paramètre t, de sorte que :

$$\mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = E\big(e^{-Y_n}\big)$$

b) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$.

On a vu à la question **3.**a) que $E(Z_{n+1}) = E(Y_n) \iff z_{n+1} = E(Y_n)$, donc $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = 0$.

Par ailleurs : la convexité bien connue de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ assure que sa courbe se situe toujours au-dessus de chacune de ses tangentes, en particulier celle au point d'abscisse 0, qui a pour équation :

$y = \exp'(0).(x - 0) + \exp(0) \iff y = x + 1$, donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x + 1$

et par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \geqslant -x + 1$.

Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$: $\quad e^{-Y_n(\omega)} \geqslant 1 - Y_n(\omega)$. La croissance de l'espérance assure alors que :

$$E\left(e^{-Y_n}\right) \geqslant E(1 - Y_n) \iff E\left(e^{-Y_n}\right) \geqslant 1 - E(Y_n)$$

de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \geqslant \mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = E\left(e^{-Y_n}\right) \geqslant 1 - z_{n+1}$$

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} z_{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement assure que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = 1 \iff \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1 \iff \mathbb{P}(B) = 1$$

d'après l'équivalence obtenue à la question **10.**c).

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie on conserve les notations de la partie 2 et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation (3) et $z_0 = 1$.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on pose $a_k = \dfrac{\alpha_k}{\alpha}$.

12. On suppose dans cette question, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n \alpha \leqslant \rho$. On note (H_1) cette hypothèse.

a) La fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k t^{d-k} = a_0 t^d + a_1 t^{d-1} + \ldots + a_{d-1} t + a_d$ est une fonction polynômiale donc continue sur $\mathbb{R}$, et par conséquent :

$$\lim_{t \to 1} \sum_{k=0}^{d} a_k t^{d-k} = \sum_{k=0}^{d} a_k = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{d} \alpha_k = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

Mais alors $\lim\limits_{\theta \to 1} \dfrac{\theta^{d+1}}{\sum\limits_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k}} = \dfrac{1}{1} = 1$ et puisque $\rho \in]0, 1[$ est fixé, alors il existe $\theta \in]0; 1[$ suffisamment proche de 1 tel que : $\quad \dfrac{\theta^{d+1}}{\sum\limits_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k}} \geqslant \rho \iff \theta^{d+1} \geqslant \rho \left(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k \theta^{d-k} \right)$

• On pose $M = \max\limits_{k \in [\![N, N+d]\!]} \dfrac{z_k}{\theta^k}$.

b) Par définition du maximum M : $\quad \forall n \in [\![N, N+d]\!]$, $\dfrac{z_n}{\theta^n} \leqslant M \iff z_n \leqslant M\theta^n$.
reste donc à savoir si c'est encore vrai pour les indices suivants :

On sait d'après la relation (3) que : $\quad z_{N+d+1} = r_{N+d} \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \alpha_k . z_{N+d-k} = r_{N+d} . \alpha \sum_{k=0}^{d} a_k . z_{N+d-k}$
puisque $\min(N+d, d) = d$ et $\alpha_k = \alpha . a_k$.
L'hypothèse (H_1) assure que $r_{N+d}\alpha \leqslant \rho$ et pour tout entier k compris entre 0 et d, $N + d - k$ est compris entre N et $N + d$, donc d'après ce qui précède, $z_{N+d-k} \leqslant M\theta^{N+d-k}$.

Par conséquent : $\quad z_{N+d+1} \leqslant \rho \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k . M\theta^{N+d-k} \right) = M\theta^N . \rho \left(\sum_{k=0}^{d} a_k . \theta^{d-k} \right) \leqslant M\theta^N . \theta^{d+1}$ d'après la définition de θ, ce qui donne par transitivité de l'inégalité :

$$z_{N+d+1} \leqslant M\theta^{N+d+1}$$

On a ainsi pu avancer d'un indice, ce qui sera le début d'une preuve par récurrence (forte qui plus est, basée sur le même principe qu'ici, fastidieuse à rédiger) qui prouvera :

$$\forall n \geqslant N, \quad z_n \leqslant M\theta^n$$

c) Les réels z_n sont positifs (z_n est l'espérance d'un nombre de personnes), on a donc ainsi :

$$\forall n \geqslant N, \quad 0 \leqslant z_n \leqslant M\theta^n \text{ où } \theta \in]0,1[$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} M\theta^n = 0$ et par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

L'énoncé dit ici qu'on montrerait de même que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 1$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\alpha \geqslant \rho$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$. On note (H_2) cette hypothèse.

• L'énoncé supposait, dans les questions 13 à 16, que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante de valeur $\dfrac{1}{\alpha}$. On note (H_3) cette hypothèse.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

avec $z_{-1} = \ldots = z_{-d} = 0$.

13. a) Soit $n \in \mathbb{N}$; la matrice $U_{n+1} = \begin{pmatrix} z_{n+1} \\ z_n \\ \vdots \\ z_{n-d+1} \end{pmatrix}$ comprend $d+1$ éléments en tout, dont les d derniers sont communs avec U_n, mais décalés d'un rang vers le bas. Le nouvel élément que contient U_{n+1} est z_{n+1} qui est donné par la relation (3) : $z_{n+1} = r_n \displaystyle\sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k.z_{n-d}$.

Au vu des hypothèses faites et des notations introduites pour cette cette question, cela se réécrit aussi :

$$z_{n+1} = \sum_{k=0}^{d} \frac{\alpha_k}{\alpha} z_{n-k} = \sum_{k=0}^{d} a_k z_{n-k} = a_0 z_n + a_1 z_{n-1} + \ldots + a_d z_{n-d}$$

(si certains termes z_{n-k} se trouvent être d'indices négatifs, ils sont simplement nuls), de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_0 z_n + a_1 z_{n-1} + \ldots + a_d z_{n-d} \\ z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{d-1} & a_d \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d+1} \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

Ce qui est bien une relation du type : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$, où A est une matrice indépendante de n, de première ligne $L = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & a_d \end{pmatrix}$.

b) Une récurrence immédiate à partir de la relation précédente donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$, où $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ puisque $z_0 = E(Z_0) = 1$ et puisque les éléments situés en-dessous sont d'indices négatifs, donc égaux à 0 d'après la convention adoptée par l'énoncé.

La relation (3) : $\quad z_{n+1} = a_0 z_n + a_1 z_{n-1} + \ldots + a_d z_{n-d}$ déjà utilisée plus haut, peut en fait faire apparaître z_{n+1} comme une matrice de '$\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}$, résultat du produit matriciel :

$$z_{n+1} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

Soit : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = LU_n = LA^n U_0.$

14. Dans cette question, $d = 2$ et $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a) La matrice A est alors, dans ce cas particulier : $\quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque l'énoncé nous fournissait généreusement les valeurs propres à trouver, vérifions directement que pour chacune des valeurs $\lambda \in \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$, le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, possède une infinité de solutions (cela facilitera de surcroît la tâche pour la question suivante) :

- Avec $\lambda = 1$:

$$AX = X \iff \begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}z & = x \\ x & = y \\ z & = y \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}x = x \iff x = x : \text{ toujours vrai !} \\ x = y = z \end{cases}.$$

  On obtient bien une infinité de solutions, donc $\lambda = 1$ est valeur propre de A et de plus, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Pour $\lambda = -\dfrac{1}{2}$:

$$AX = -\frac{1}{2}X \iff \begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}z & = -\frac{1}{2}x \\ x & = -\frac{1}{2}y \\ y & = -\frac{1}{2}z \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{6}z + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}x = 0 \\ y = -2x \\ z = -2y = 4x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x & = 0 : \text{ toujours vrai !} \\ y = -2x \\ z = 4x \end{cases}$$

  On obtient bien une infinité de solutions, donc $\lambda = -\frac{1}{2}$ est bien valeur propre de A et de plus, $E_{-1/2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$.

- Pour $\lambda = -\frac{1}{3}$:

$$AX = -\frac{1}{3}X \iff \begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}z = -\frac{1}{3}x \\ x = -\frac{1}{3}y \\ y = -\frac{1}{3}z \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}z = 0 \\ y = -3x \\ z = -3y = 9x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x - 2x + \frac{3}{2}x & = 0 : \text{ toujours vrai !} \\ y = -3x \\ z = 9x \end{cases}$$

On obtient bien une infinité de solutions, donc $\lambda = -\frac{1}{3}$ est bien valeur propre de A et de plus, $E_{-1/3}(A) = \mathrm{Vect}\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \Big)$.

On a ainsi obtenu 3 valeurs propres distinctes pour A, matrice carrée d'ordre 3 : elle n'en admet pas d'autre, et

$$\mathrm{S}(A) = \{1, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}\}$$

b) Dans les calculs précédents, les trois sous-espaces propres sont à chaque fois engendrés par un vecteur non nul : chacun d'eux forme donc à lui seul une famille libre, donc une base de son sous-espace propre.

Les calculs précédents ont d'ailleurs fait apparaître que les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $1, -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$.

c) On cherche ici trois réels (s_1, s_2, s_3) tels que :

$$U_0 = s_1V_1 + s_2V_2 + s_3V_3 \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} s_1 & + & s_2 & + & s_3 & = & 1 \\ s_1 & - & 2s_2 & - & 3s_3 & = & 0 \\ s_1 & + & 4s_2 & + & 9s_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} s_1 & + & s_2 & + & s_3 & = & 1 & \\ & & 3s_2 & + & 4s_3 & = & 1 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & & 3s_2 & + & 8s_3 & = & -1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} s_1 & + & s_2 & + & s_3 & = & 1 & \\ & & 3s_2 & + & 4s_3 & = & 1 & \\ & & & & 4s_3 & = & -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} s_1 + 1 - \frac{1}{2} = 1 \iff s_1 = \frac{1}{2} \\ 3s_2 - 2 = 1 \iff s_2 = 1 \\ s_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Et ainsi : $\quad U_0 = \frac{1}{2}V_1 + V_2 - \frac{1}{2}V_3$.

d) Les relations : $\quad AV_1 = V_1,\ AV_2 = -\frac{1}{2}V_2$ et $AV_3 = -\frac{1}{3}V_3$ donnent, par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^nV_1 = V_1,\ A^nV_2 = \big(-\tfrac{1}{2}\big)^nV_2,\ A^nV_3 = \big(-\tfrac{1}{3}\big)^nV_3$$

De sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^nU_0 = \tfrac{1}{2}A^nV_1 + A^nV_2 - \tfrac{1}{2}A^nV_3 = \frac{1}{2}V_1 + \big(-\tfrac{1}{2}\big)^nV_2 - \tfrac{1}{2}\big(-\tfrac{1}{3}\big)^nV_3$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = LA^nU_0 = \tfrac{1}{2}LV_1 + \big(-\tfrac{1}{2}\big)^nLV_2 - \tfrac{1}{2}\big(-\tfrac{1}{3}\big)^nLV_3$$

où $LV_1,\ LV_2$ et LV_3 sont des matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, assimilés à des réels, avec d'ailleurs :

$LV_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

Comme $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$ appartiennent à $]-1,1[$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, de sorte que :

$$\lim_{n\to+\infty} z_{n+1} = \frac{1}{2} \iff \lim_{n\to+\infty} z_n = s_1 \qquad CQFD$$

15. On revient au cas général.

a) En généralisant le raisonnement mené à la question **14.** : un réel λ est valeur propre de A si et seulement si il existe un vecteur non nul $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ tel que :

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + \ldots + a_dx_d &= \lambda x_0 \\ x_0 &= \lambda x_1 \\ x_1 &= \lambda x_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{d-2} &= \lambda x_{d-1} \\ x_{d-1} &= \lambda x_d \end{cases} \iff \begin{cases} (a_0\lambda^d + a_1\lambda^{d-1} + \ldots + a_{d-1}\lambda + a_d)x_d &= \lambda^{d+1}x_d \\ x_0 &= \lambda^d x_d \\ x_1 &= \lambda^{d-1}x_d \\ \vdots & \vdots \\ x_{d-2} &= \lambda^2 x_d \\ x_{d-1} &= \lambda x_d \end{cases}$$

Il est alors clair que ce système admet des solutions non-nulles, et donc que λ est valeur propre de A, si et seulement si :

$$x_d \neq 0 \quad (\text{sinon } x_0 = x_1 = \ldots = x_d = 0) \quad \text{et} \quad a_0\lambda^d + a_1\lambda^{d-1} + \ldots + a_{d-1}\lambda + a_d = \lambda^{d+1}$$

Lorsqu'il y a une solution non nulle X, toutes ses composantes s'écrivent en fonction de x_d, ce qui assure que les sous-espaces propres de A sont engendrés par un seul vecteur non nul, donc sont tous de dimension 1.

b) On vérifie le critère précédent avec $\lambda = 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_{d-k}1^k = \sum_{k=0}^{d} a_k = \frac{\sum_{k=0}^{d} \alpha_k}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 = 1^{d+1}$,

donc 1 est bien valeur propre de A.

On remarque d'ailleurs que le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont égales à 1, vérifie :

$$AV = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{d} a_k \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \iff AV = V$$

ce qui prouve que V est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1 (dont la somme des composantes est bien égale à $d+1$: indication de l'énoncé pour repenser à ce vecteur classique !)

c) Avec $\lambda = -1$: comme les coefficients a_k $(0 \leqslant k \leqslant d)$ sont tous positifs, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_{d-k}(-1)^k = a_d - a_{d-1} + a_{d-2} \ldots + a_0(-1)^d$ où les signes alternent d'un terme à l'autre, est strictement compris entre $a_d + a_{d-1} + \ldots + a_0 = 1$ et $-a_d - a_{d-1} - \ldots - a_0 = -1$.

Par conséquent, $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_{d-k}(-1)^k = a_d - a_{d-1} + a_{d-2} \ldots + a_0(-1)^d$ ne peut pas être égal à $(-1)^{d+1}$, ce qui prouve d'après **15.**a) que -1 n'est pas valeur propre de A.

Si $|\lambda|>1$: alors $|\lambda|^{d+1}>|\lambda|^k$ pour tout entier k compris entre 0 et d, donc d'après l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{k=0}^{d} a_{d-k}\lambda^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{d} a_{d-k}|\lambda|^k < \underbrace{\sum_{k=0}^{d} a_{d-k}}_{=1}|\lambda|^{d+1} = |\lambda|^{d+1}$$

ce qui suffit pour assurer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_{d-k}\lambda^k$ n'est pas égal à λ^{d+1}, donc tout réel λ tel que $|\lambda|>1$ n'est pas valeur propre de A.

En clair : mis à part 1 qui est valeur propre de A, toutes les autres valeurs propres λ de A appartiennent à $]-1;1[$.

16. On pose pour tout $k\in[\![0,d]\!]$, $b_k=\displaystyle\sum_{i=k}^{d} a_k$. On définit aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$ formé des matrices $W=\begin{pmatrix} w_0\\ w_1\\ \vdots\\ w_d\end{pmatrix}$ telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} b_kw_k=0$.

a) Soit $W=\begin{pmatrix} w_0\\ w_1\\ \vdots\\ w_{d-1}\\ w_d\end{pmatrix}\in H$, alors : $\quad AW=\begin{pmatrix} a_0w_0+\ldots+a_dw_d\\ w_0\\ \vdots\\ w_{d-1}\end{pmatrix}$, donc

$\displaystyle\sum_{k=0}^{d} b_k(AW)_k = b_0(a_0w_0+\ldots+a_dw_d)+b_1w_0+\ldots+b_dw_{d-1}$ où l'on remarque que $b_0=\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k=1$, ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{k=0}^{d} b_k(AW)_k = (a_0+b_1)w_0+(a_1+b_2)w_1+\ldots+(a_{d-1}+b_d)w_{d-1}+a_dw_d = b_0w_0+\ldots+b_{d-1}w_{d-1}+b_dw_d$$

puisque : $\quad a_0+b_1=a_0+\sum_{k=1}^{d} a_k=\sum_{k=0}^{d} a_k=b_0$, et ainsi de suite jusqu'à $a_{d-1}+b_d=a_{d-1}+a_d=b_{d-1}$, et $a_d=b_d$.

Et comme $W\in H$, alors $b_0w_0+\ldots+b_{d-1}w_{d-1}+b_dw_d=0=\displaystyle\sum_{k=0}^{d} b_k(AW)_k$, ce qui prouve que AW appartient à H.

b) Pour s réel : $\quad U_0-sV=\begin{pmatrix} 1-s\\ -s\\ \vdots\\ -s\end{pmatrix}$. Ainsi, U_0-sV appartient à H si et seulement si :

$$b_0(1-s)-(b_1+\ldots+b_d)s=0 \iff b_0-(b_0+b_1+\ldots+b_d)s=0 \iff s=\frac{1}{1+b_1+\ldots+b_d}$$

puisque $b_0=\sum_{k=0}^{d} a_k=1$.

c) L'énoncé admettait que, pour tout $W\in H$, $LA^nW \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Avec la valeur de s précédemment trouvée, on peut simplement écrire :

$U_0 = sV + (U_0 - sV) = sV + W$ avec $W = U_0 - sV \in H$. Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = LA^n U_0 = LA^n(sV + W) = sLA^n V + LA^n W$$

où : $AV = V$ entraîne par récurrence immédiate, $A^n V = V$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
donc $LA^n V = LV = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 1$, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = s + LA^n W$$

Vue l'hypothèse faite sur $LA^n W$, on a bien :

$$\lim_{n \to +\infty} z_{n+1} = s = \lim_{n \to +\infty} z_n$$

17. Sous l'hypothèse (H_2), l'énoncé admettait que $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = +\infty$, et sous l'hypothèse (H_3), on vient de voir que $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = s = \dfrac{1}{1 + b_1 + \ldots + b_n} > 0$: dans les deux cas, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0}$ est grossièrement divergente, puisque son terme général ne tend pas vers 0 !

Par contre, sous l'hypothèse (H_1), on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 0$ (le critère *nécessaire* de convergence de la série est vérifié), et plus précisément :

on a vu en **12.**b) qu'à partir d'un certain rang N, on a $0 \leqslant z_n \leqslant M\theta^n$ où $\theta \in]0, 1[$.

La série $\sum\limits_n \theta^n$ est convergente comme série géométrique de raison strictement comprise entre 0 et 1 : d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_n z_n$ est elle aussi convergente.

Bref, la série $\sum\limits_n z_n$ converge uniquement dans l'hypothèse (H_1), qui est en fait le seul cas où (z_n) converge vers 0 : d'après **12.b**, c'est la seule des trois hypothèses sous laquelle il est presque certain que la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours.

★ ★ ★ FIN DU SUJET ★ ★ ★