

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soient n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ telles que pour tout

$i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p_i \in]0; 1[$. On suppose que $\sum_{i=1}^n X_i = 1$.

1. a) D'après le cours sur les variables de Bernoulli : $E(X_i) = p_i$ et $V(X_i) = p_i(1 - p_i)$.

b) On a supposé que $\sum_{i=1}^n X_i = 1$, donc par linéarité de l'espérance :

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = 1 \iff \sum_{i=1}^n E(X_i) = 1 \iff \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

c) Pour tout couple (i, j) de $\llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$: la variable aléatoire $X_i X_j$ est le produit de deux variables qui ne prennent que les valeurs 0 et 1 : $X_i X_j(\Omega)$ est donc inclus dans $\{0; 1\}$. Si de plus on tient compte du fait que $\sum_{i=1}^n X_i = 1$ implique que dans cette somme de variables de Bernoulli, une seule d'entre elle prend la valeur 1, et les autres sont toutes nulles, alors $X_i X_j$ est presque certainement égale à 0, et par conséquent $E(X_i X_j) = 0$.

2. a) Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$:

$$a_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = 0 - p_i p_j = -p_i p_j,$$

et si $i = j$: $a_{i,i} = \text{Cov}(X_i, X_i) = V(X_i) = p_i(1 - p_i)$.

b) Soit U la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 ; pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, le coefficient de ligne i de la matrice colonne AU vaut :

$$(AU)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_i p_j + (p_i - p_i^2) = p_i - p_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j + p_i \right) = p_i - p_i \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n p_j}_{=1} \right) = p_i - p_i = 0,$$

donc AU est en fait la matrice colonne nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c) On vient donc de constater que $AU = 0_{n,1}$ alors que $U \neq 0_{n,1}$: cela suffit pour conclure que A n'est pas inversible.

(Si elle l'était, alors on pourrait écrire : $AU = 0_{n,1} \implies A^{-1}AU = A^{-1}0_{n,1} \implies U = 0_{n,1}$.)

3. Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux n -uplets de réels tels que $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne sont pas tous nuls.

Soit Q le polynôme défini par : $\forall t \in \mathbb{R}, Q(t) = \sum_{i=1}^n (x_i t + y_i)^2$.

- a) Il est clair qu'en tant que somme de carrés de réels, $Q(t)$ est positif pour tout $t \in \mathbb{R}$. Or si on développe son terme général grâce à une identité remarquable, on constate que $Q(t)$ est un trinôme du second degré de la variable t :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q(t) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 t^2 + 2x_i y_i t + y_i^2) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) t^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) t + \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Puisque Q ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$, alors on peut affirmer que son discriminant est négatif ou nul, soit :

$$4 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \leq 0 \iff \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right). \quad (*)$$

- b) Le cas d'égalité dans la relation $(*)$ survient si et seulement si le discriminant du trinôme Q est nul : celui-ci admet donc une unique racine t_0 , c'est-à-dire un réel tel que :

$$\sum_{i=1}^n (x_i t_0 + y_i)^2 = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad x_i t_0 + y_i = 0,$$

puisque une somme de réels positifs est nulle, si et seulement si chacun de ses termes est nul.

Il y a donc égalité dans $(*)$ si et seulement s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad y_i = -t_0 x_i \iff (y_1, y_2, \dots, y_n) = -t_0 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

En clair, le cas d'égalité survient si et seulement si les vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, sont colinéaires/proportionnels.

4. Pour tout entier $n \geq 2$, soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls. On pose : $\forall n \geq 2, \quad Z_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$.

- a) Par linéarité de l'espérance :

$$E(Z_n) = 1 \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i E(X_i) = 1 \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = 1.$$

- b) L'énoncé rappelait la formule : $V(Z_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 V(X_i) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \alpha_i \alpha_j \text{Cov}(X_i, X_j)$

Si on suppose que $E(Z_n) = 1 \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = 1$, alors :

$$\begin{aligned} V(Z_n) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i (1 - p_i) - \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \alpha_i \alpha_j p_i p_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 (p_i - p_i^2) - \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n \alpha_j p_j}_{=1} - \alpha_i p_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i^2 - \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i}_{=1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i - 1 \end{aligned}$$

Comme on sait qu'une variance est toujours positive, alors : $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i - 1 \geq 0 \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i \geq 1$.

- c) En reprenant les notations de la question 3, on pose pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$: $x_i = \sqrt{p_i}$ et $y_i = \alpha_i \sqrt{p_i}$.
L'inégalité (*) se réécrit dans ces conditions :

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) \times \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i \right)$$

En exigeant $E(Z_n) = 1 \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = 1$, et puisqu'on a toujours $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, on retrouve alors l'inégalité précédente :

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i \iff 0 \leq V(Z_n),$$

mais on sait aussi maintenant comment obtenir le cas d'égalité : $V(Z_n) = 0$ est bien la valeur minimale possible pour une variance, et on sait d'après 3.b) qu'elle peut être atteinte, si et seulement si les vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \dots, \sqrt{p_n})$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) = (\alpha_1 \sqrt{p_1}, \alpha_2 \sqrt{p_2}, \dots, \alpha_n \sqrt{p_n})$ sont colinéaires : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sqrt{p_i} = \lambda \alpha_i \sqrt{p_i} \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, 1 = \lambda \alpha_i.$$

Cette dernière condition équivalente est possible si et seulement si tous les α_i sont égaux : on note alors α leur valeur commune, et dans ce cas on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$E(Z_n) = 1 \iff \sum_{i=1}^n \alpha p_i = 1 \iff \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^n p_i}_{=1} = 1 \iff \alpha = 1.$$

Bref, $E(Z_n) = 1$ et $V(Z_n)$ est minimale si et seulement si tous les α_i sont égaux à 1, et $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

5. Soient n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- $\sum_{i=1}^n Y_i = 1$;
- pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, les variables aléatoires X_i et Y_i sont de même loi ;
- pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, les variables aléatoires X_i et Y_j sont indépendantes.

Soit T_n la variable aléatoire définie par : $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - Y_i)^2}{p_i(1 - p_i)}$.

- a) Au vu des conditions imposées aux variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$: dans la somme définissant T_n , un seul des X_i vaut 1 (et les autres valent forcément 0 chacun), et un seul des Y_j vaut 1 (et les autres valent forcément 0 chacun).

Il reste donc à distinguer deux cas :

- Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i < j$: pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X_i(\omega) = Y_j(\omega) = 1$, on a $T_n(\omega) = \frac{1}{n} \left(\frac{1^2}{p_i(1 - p_i)} + \frac{(-1)^2}{p_j(1 - p_j)} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{p_i(1 - p_i)} + \frac{1}{p_j(1 - p_j)} \right)$, valeur prise aussi si $X_j(\omega) = Y_i(\omega) = 1$, et qui a donc pour probabilité associée :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [Y_j = 1]) + \mathbb{P}([X_j = 1] \cap [Y_i = 1]) = \mathbb{P}(X_i = 1) \times \mathbb{P}(Y_j = 1) + \mathbb{P}(X_j = 1) \times \mathbb{P}(Y_i = 1) = 2p_i p_j,$$

puisque X_i et Y_j sont indépendantes, de même que X_j et Y_i .

- Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$: pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X_i(\omega) = Y_i(\omega) = 1$, $(X_i(\omega) - Y_i(\omega))^2 = (1 - 1)^2 = 0$ et pour tout $j \neq i$, $X_j(\omega) = Y_j(\omega) = 0$ donc $T_n(\omega) = 0$.

Cette valeur de T_n est prise avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n [X_i = 1] \cap [Y_i = 1]\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = 1) \times \mathbb{P}(Y_i = 1) = \sum_{i=1}^n p_i^2.$$

L'union est en effet disjointe (un seul des X_i à la fois vaut 1), et X_i et Y_i sont indépendantes.

b) On termine par le calcul de $E(T_n)$: par linéarité de l'espérance,

$$E(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{E(X_i^2 - 2X_iY_i + Y_i^2)}{p_i(1-p_i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{E(X_i^2) - 2E(X_i) \times E(Y_i) + E(Y_i^2)}{p_i(1-p_i)}$$

X_i et Y_i sont indépendantes, et $X_i^2 = X_i$ puisque X_i ne prend que les valeurs 0 et 1

$$E(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{p_i - 2p_i^2 + p_i}{p_i(1-p_i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2p_i(1-p_i)}{p_i(1-p_i)} = \frac{2n}{n},$$

soit : $E(T_n) = 2$.

Exercice 2

Partie 1

Soit A une matrice fixée inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et Φ_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A(M) = AM.$$

1. a) L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a pour dimension n^2 .

b) Soient M, N deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel quelconque :

$$\Phi_A(\lambda \cdot M + N) = A(\lambda \cdot M + N) = \lambda \cdot AM + AN = \lambda \cdot \Phi_A(M) + \Phi_A(N),$$

donc Φ_A est une application linéaire. De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le produit AM de deux matrices carrées d'ordre n , appartient encore à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Les valeurs propres de A sont les réels λ tels que $A - \lambda \cdot I_2$ est non inversible. En utilisant le critère d'inversibilité pour les matrices carrées d'ordre 2 rappelé dans l'énoncé, on peut donc écrire :

$$A - \lambda \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \text{ est non-inversible} \iff (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\iff (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = 0 \iff (1-\lambda)(3-\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3,$$

d'après une identité remarquable et la règle du produit nul. Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

b) On commence ici par calculer la matrice représentative de Φ_A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; pour cela on calcule les images :

$$\Phi_A(E_1) = AE_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_A(E_2) = AE_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_A(E_3) = AE_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_A(E_4) = AE_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{donc : } F = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant vérifier que pour $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$, le système $(F - \lambda_i \cdot I_4)X = 0_{4,1}$ d'inconnue

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, possède une infinité de solutions :

- Pour $\lambda_1 = 1$:

$$(F - 1 \cdot I_4)X = 0_{4,1} \iff \begin{cases} x & + & z & = & 0 \\ & y & & + & t & = & 0 \\ x & & + & z & = & 0 \\ & y & & + & t & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ t = -y \end{cases}$$

On obtient bien une infinité de solutions, donc $\lambda_1 = 1$ est bien valeur propre de Φ_A , et le sous-espace propre associé est :

$$E_1(\Phi_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Ce sous-espace propre est engendré par deux vecteurs non-colinéaires qui forment donc une famille libre, donc une base de $E_1(\Phi_A)$.

- Pour $\lambda_2 = 3$:

$$(F - 3 \cdot I_4)X = 0_{4,1} \iff \begin{cases} -x & + & z & = & 0 \\ & -y & & + & t & = & 0 \\ x & & - & z & = & 0 \\ & y & & - & t & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ t = y \end{cases}$$

On obtient bien une infinité de solutions, donc $\lambda_2 = 3$ est bien valeur propre de Φ_A , et le sous-espace propre associé est :

$$E_3(\Phi_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ce sous-espace propre est engendré par deux vecteurs non-colinéaires qui forment donc une famille libre, donc une base de $E_3(\Phi_A)$.

- c) Le simple fait que la matrice F qui représente Φ_A soit symétrique, assure que cet endomorphisme est diagonalisable.

Ce fait est par ailleurs confirmé par le fait que d'après ce qui précède :

$$\dim E_1(\Phi_A) + \dim E_3(\Phi_A) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

D'après le théorème spectral, Φ_A n'admet donc pas d'autre valeur propre que 1 et 3, et est bien diagonalisable.

- d) Puisque A n'admet pas 0 pour valeur propre, alors cette matrice est inversible : on sait qu'alors AM a le même rang que M , donc le rang de $\Phi_A(M)$ est bien égal au rang de M pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2 et A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre associé : par définition, on a donc $AX = \lambda \cdot X$, et alors :

$$\Phi_A(X {}^tX) = AX {}^tX = (AX) {}^tX = (\lambda \cdot X) {}^tX = \lambda \cdot X {}^tX.$$

Comme de plus, si X a pour composantes x_i ($1 \leq i \leq n$), alors $X {}^tX$ est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient d'indices $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ vaut $x_i x_j$: X est non nul en tant que vecteur propre, donc l'un des x_i au moins est non nul, et l'élément diagonal d'indice (i, i) correspondant de $X {}^tX$ vaut $x_i^2 \neq 0$, donc $X {}^tX$ est également non nul : c'est un vecteur propre de Φ_A pour la valeur propre λ .

- b) Réciproquement, si λ est valeur propre de Φ_A , alors il existe une matrice carrée M non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\Phi_A(M) = \lambda \cdot M \iff AM = \lambda \cdot M$.

Comme M est non nulle, alors l'une de ses colonnes (notons-les C_i avec $1 \leq i \leq n$) possède au moins un coefficient non nul : soit i_0 l'indice correspondant.

D'après la définition du calcul matriciel, l'égalité $AM = \lambda \cdot M$ est équivalente à :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, AC_i = \lambda \cdot C_i,$$

donc en particulier : $AC_{i_0} = \lambda \cdot C_{i_0}$ et la matrice-colonne non nulle C_{i_0} est alors un vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre λ .

Ayant montré une implication et sa réciproque, on en déduit que la matrice A et l'endomorphisme Φ_A ont les mêmes valeurs propres.

- c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: par définition, $\text{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0_{n,1}\}$ et :

$$X \in \text{Ker}(\Phi_A(M)) \iff \Phi_A(M)X = 0_{n,1} \iff AMX = 0_{n,1} \xLeftrightarrow{(*)} MX = 0_{n,1} \iff X \in \text{Ker}(M).$$

On a notamment utilisé l'inversibilité de A pour écrire l'équivalence indiquée par $(*)$.

Les équivalences obtenues assurent l'égalité d'ensembles : $\text{Ker}(\Phi_A(M)) = \text{Ker}(M)$.

- d) Le rang d'une matrice étant celui de l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé : le théorème du rang assure que :

$$\text{rg}(M) = n - \dim \text{Ker}(M) \stackrel{c)}{=} n - \dim \text{Ker}(\Phi_A(M)) = \text{rg}(\Phi_A(M)).$$

Partie 2

4. Soit h l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), h(M) = \text{Tr}(M)$.

- a) Soient $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et λ un réel quelconque : dans ce cas, la matrice $\lambda \cdot M + P$ a pour terme général $\lambda \cdot m_{i,j} + p_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq n$), donc sa trace vaut :

$$\text{Tr}(\lambda \cdot M + P) = \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot m_{i,i} + p_{i,i}) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n m_{i,i} + \sum_{i=1}^n p_{i,i} = \lambda \cdot \text{Tr}(M) + \text{Tr}(P),$$

donc $h(\lambda \cdot M + P) = \lambda \cdot h(M) + h(P)$, et h est bien une application linéaire.

- b) L'image $\text{Im}(h)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$, il n'y a donc que deux solutions : soit $\dim \text{Im}(h) = 0 \iff \text{Im}(h) = \{0\}$, soit $\dim \text{Im}(h) = 1 \iff \text{Im}(h) = \mathbb{R}$.

La première option est exclue : cela signifierait que la trace de n'importe quelle matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nulle, et on trouve très facilement des contre-exemples, notamment : $\text{Tr}(I_n) = n \neq 0$.

Ainsi, $\dim \text{Im}(h) = 1$ (et donc $\text{Im}(h) = \mathbb{R}$), et le théorème du rang pour l'application h donne alors :

$$\dim \text{Ker}(h) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \text{Im}(h) = n^2 - 1.$$

5. Soit Ψ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \Psi(M) = -M + \text{Tr}(M) \cdot I_n$.

- a) Prouver que -1 est valeur propre de Ψ , c'est trouver une matrice M non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\Psi(M) = -M \iff -M + \text{Tr}(M) \cdot I_n = -M \iff \text{Tr}(M) \cdot I_n = 0_n$.

Comme I_n n'est pas la matrice nulle, alors $\Psi(M) = -M \iff \text{Tr}(M) = 0 \iff M \in \text{Ker}(h)$.

Comme le noyau de h n'est pas réduit à la matrice nulle, on en déduit que -1 est bien valeur propre de Ψ , et l'équivalence précédente prouve même que :

$$E_{-1}(\Psi) = \text{Ker}(h),$$

le sous-espace propre associé est donc de dimension $n^2 - 1$.

b) La matrice I_n a pour seuls coefficients non nuls, ses n éléments diagonaux tous égaux à 1, donc :

$$\Psi(I_n) = -I_n + \text{Tr}(I_n) \cdot I_n = -I_n + n \cdot I_n = (n-1) \cdot I_n.$$

c) Du calcul précédent, on déduit que I_n est vecteur propre de Ψ pour la valeur propre $(n-1)$, et $\dim E_{n-1}(\Psi) \geq 1$.

On connaît donc deux valeurs propres distinctes de Ψ : -1 et $n-1$, et de plus :

$$\dim E_{-1}(\Psi) + \dim E_{n-1}(\Psi) \geq n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

donc d'après le théorème spectral :

- L'endomorphisme Ψ n'a pas d'autre valeur propre que -1 et $n-1$.
- Les deux sous-espaces propres ont pour dimensions respectives :

$$\dim E_{-1}(\Psi) = n^2 - 1 \quad \text{et} \quad \dim E_{n-1}(\Psi) = 1,$$

et Ψ est diagonalisable.

d) On suppose dans cette questions que $n = 2$. Alors pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\text{Tr}(M) = a + d$, donc

$$\Psi(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a+d) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Le rang de M a alors trois valeurs possibles :

- $\text{rg}(M) = 0 \iff a = b = c = d = 0 \iff \psi(M) = 0 \iff \text{rg}(\Psi(M)) = 0$, donc dans ce cas, M et $\Psi(M)$ ont bien le même rang.
- $\text{rg}(M) = 2 \iff M$ est inversible $\iff ad - bc \neq 0 \iff (-d) \times (-a) - bc \neq 0 \iff \Psi(M)$ est inversible $\iff \text{rg}(\Psi(M)) = 2$.
- Le dernier cas est celui où M est non nulle et non-inversible, auquel cas $\text{rg}(M) = 1$. Dans ce cas, $\Psi(M)$ est également non nulle (un coefficient au moins de M , est non-nul, donc il en est de même pour $\Psi(M)$), et son déterminant $(-d) \times (-a) - bc = ad - bc$ est, lui, nul : par conséquent, $\text{rg}(\Psi(M)) = 1$.

On a bien vérifié que dans tous les cas de figure, M et $\Psi(M)$ ont le même rang lorsque $n = 2$.

e) On suppose que $n \geq 3$ et que le rang de M est égal à n : cela signifie donc que M est de rang maximal, donc est inversible.

Par définition d'une valeur propre, on sait que :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } M \iff \lambda \cdot I_n - M \text{ est non-inversible} \iff \text{rg}(\lambda \cdot I_n - M) < n.$$

A contrario, et avec $\lambda = \text{Tr}(M)$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M) \text{ n'est pas valeur propre de } M &\iff \text{Tr}(M) \cdot I_n - M \text{ est inversible} \\ &\iff \text{rg}(\text{Tr}(M) \cdot I_n - M) = n \\ &\iff \text{rg}(\text{Tr}(M) \cdot I_n - M) = \text{rg}(M), \end{aligned}$$

ce qui donne bien l'équivalence demandée.

Exercice 3

1. a) D'après le cours sur la loi uniforme à densité, la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\theta} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}.$$

- b) L'espérance et la variance de X sont encore données directement par le cours :

$$E(X) = \frac{0 + \theta}{2} = \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(\theta - 0)^2}{12} = \frac{\theta^2}{12}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $Y_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n X_k$.

- a) La loi des X_k , donc de Y_n dépend de θ , donc Y_n est un estimateur du paramètre θ .

D'autre part, par linéarité de l'espérance :

$$E(Y_n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\theta}{2} = \frac{2}{n} \times n \times \frac{\theta}{2} = \theta,$$

donc Y_n est un estimateur sans biais de θ .

- b) Les variables $(X_k)_{k \geq 1}$ étant mutuellement indépendantes, d'après les propriétés de la variance :

$$V(Y_n) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^n V(X_k) = \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{\theta^2}{12} = \frac{4}{n^2} \times n \times \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

On peut alors écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire Y_n : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y_n - E(Y_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2} \iff \mathbb{P}(|Y_n - \theta| > \varepsilon) \leq \frac{\theta^2}{3n\varepsilon^2}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta^2}{3n\varepsilon^2} = 0$ et puisqu'une probabilité est toujours positive : d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n - \theta| > \varepsilon) = 0.$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $T_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

- a) Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F_{T_n}(x) &= \mathbb{P}(T_n \leq x) = \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x) \\ &= \mathbb{P}([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x]) \quad \text{par définition du maximum} \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x) \times \mathbb{P}(X_2 \leq x) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \leq x) \quad \text{par indépendance mutuelle des } X_k \\ &= (F_X(x))^n \quad \text{car les } X_k \text{ suivent toutes la même loi que } X \end{aligned}$$

$$F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0^n = 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1^n = 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}.$$

- b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $F_{T_n} = (F_X)^n$ est le produit de n facteurs identiques égaux à F_X , qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points, en l'occurrence 0 et θ ; la fonction F_{T_n} a donc les mêmes propriétés, et T_n est une variable à densité. On obtient une densité de T_n en dérivant F_{T_n} sauf en 0 et en θ où on lui donne la valeur arbitraire zéro :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq \theta \\ \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} & \text{si } 0 < x < \theta \end{cases}.$$

- c) La variable aléatoire T_n est à support borné, donc elle admet une espérance donnée par l'intégrale :

$$E(T_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f_{T_n}(t) dt = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^n dt = \frac{n}{\theta^n} \times \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \theta.$$

On en déduit, par linéarité de l'espérance, que $E\left(\frac{n+1}{n} \cdot T_n\right) = \frac{n+1}{n} E(T_n) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \theta = \theta$, donc $W_n = \frac{n+1}{n} \cdot T_n$ est un estimateur sans biais de θ .

- d) Pour utiliser à nouveau l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on commence par calculer la variance de T_n , via son moment d'ordre 2 : comme T_n est à support borné, alors elle admet un moment d'ordre 2 qu'on obtient via le théorème de transfert :

$$E(T_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f_{T_n}(t) dt = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^{n+1} dt = \frac{n}{\theta^n} \times \frac{\theta^{n+2}}{n+2} = \frac{n\theta^2}{n+2}.$$

La variable aléatoire T_n admet donc une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(T_n) = E(T_n^2) - E(T_n)^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} \cdot \theta^2 = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}.$$

La variable aléatoire W_n admet donc une variance qui vaut :

$$V(W_n) = \frac{(n+1)^2}{n^2} V(T_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}, \quad \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} V(W_n) = 0.$$

On peut alors écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire W_n : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|W_n - E(W_n)| > \varepsilon) \leq \frac{V(W_n)}{\varepsilon^2} \iff \mathbb{P}(|Y_n - \theta| > \varepsilon) \leq \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta^2}{n(n+2)\varepsilon^2} = 0$ et puisqu'une probabilité est toujours positive : d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|W_n - \theta| > \varepsilon) = 0.$$

Remarque : ce n'était pas demandé, mais le fait remarquable que $V(W_n) = o(V(Y_n))$ assure que W_n est un meilleur estimateur sans biais et convergent de θ , que Y_n .

4. Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes, f_U une densité de U et F_V la fonction de répartition de V .

D'après les propriétés de ces deux fonctions, on sait que F_V est continue sur $\mathbb{R}$, f_U est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de point ; pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a pour tout réel t :

$$0 \leq f_U(t) \quad \text{et} \quad 0 \leq F_V(z+t) \leq 1 \quad \text{donc} \quad 0 \leq f_U(t) \cdot F_V(z+t) \leq f_U(t).$$

Or l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) dt$ converge (et vaut 1) puisque f_U est une densité de probabilité : d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues (presque partout), positives, on en

déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) \cdot F_V(z+t)dt$ est elle-même convergente.

On pose alors : $\forall z \in \mathbb{R}, J(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) \cdot F_V(z+t)dt$.

L'énoncé admettait que dans toute la suite, J est la fonction de répartition de la variable aléatoire $V - U$.

5. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $T_{n-1} = \max(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ et $Z_n = T_{n-1} - X_n$.

a) La variable aléatoire T_{n-1} est le maximum de $n - 1$ variables aléatoires qui ont toutes pour univers-image $[0; \theta]$, donc on peut dire que $T_{n-1}(\Omega) = [0; \theta]$, et ainsi :

$$Z_n(\Omega) = (T_{n-1} - X_n)(\Omega) = \{x - y \mid x, y \in [0; \theta]\} = [-\theta; \theta].$$

En effet pour tout x de $T_{n-1}(\Omega)$ et tout y de $X_n(\Omega)$: $0 \leq y \leq \theta \iff -\theta \leq -y \leq 0$ et $0 \leq x \leq \theta$, donc $-\theta \leq x - y \leq \theta$, et pour tout $z \in [-\theta; \theta]$, on peut trouver un couple $(x, y) \in [0; \theta]^2$ tel que $z = x - y$.

b) La variable aléatoire T_{n-1} est une fonction des seules variables $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ et les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes, donc d'après le lemme des coalitions, T_{n-1} et X_n sont indépendantes.

c) La fonction de répartition $F_{T_{n-1}}$ est donnée, à un décalage d'indice près, par le calcul réalisé en

$$3.a) \text{ et une densité de } X_n \text{ est } f_{X_n} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > \theta \\ 1/\theta & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \end{cases}.$$

D'après le résultat admis juste avant cette question 5, la fonction de répartition F_{Z_n} de $Z_n = T_{n-1} - X_n$ est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{R}, F_{Z_n}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_n}(t) F_{T_{n-1}}(z+t)dt = \int_0^\theta \frac{1}{\theta} F_{T_{n-1}}(z+t)dt \stackrel{[u=z+t]}{=} \int_z^{z+\theta} \frac{1}{\theta} F_{T_{n-1}}(u)du.$$

d) On termine donc le calcul de $F_{Z_n}(z)$ en distinguant les 4 cas suggérés par l'énoncé :

- si $z < -\theta$: alors $z + \theta < 0$ et pour tout $u \in [z; z + \theta]$, $F_{T_{n-1}}(u) = 0$ et par conséquent, $F_{Z_n}(z) = 0$.

- si $-\theta \leq z \leq 0$, alors $0 \leq z + \theta \leq \theta$ et :

$$F_{Z_n}(z) = \int_0^{z+\theta} \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{u}{\theta}\right)^{n-1} du = \frac{1}{\theta^n} \left[\frac{u^n}{n}\right]_0^{z+\theta} = \frac{(z+\theta)^n}{n\theta^n} = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{z}{\theta}\right)^n.$$

- si $0 < z \leq \theta$: alors $\theta < z + \theta$, et :

$$F_{Z_n}(z) = \int_z^\theta \frac{1}{\theta} \cdot \left(\frac{u}{\theta}\right)^{n-1} du + \int_\theta^{z+\theta} \frac{1}{\theta} \cdot 1 du = \frac{1}{\theta} \left[\frac{u^n}{n}\right]_z^\theta + \frac{1}{\theta} (z + \theta - \theta) = \frac{\theta^n - z^n}{n\theta^n} + \frac{z}{\theta} = \frac{1}{n} \left(1 - \left(\frac{z}{\theta}\right)^n\right) + \frac{z}{\theta}.$$

- si $z > \theta$, alors $[z; z + \theta]$ est entièrement inclus dans $[\theta; +\infty[$, et : $F_{Z_n}(z) = \int_z^{z+\theta} \frac{1}{\theta} \cdot 1 du = \frac{\theta}{\theta} = 1$.

On retrouve bien donc, l'expression de $F_{Z_n}(z)$ donnée par l'énoncé.

6. a) Pour tout entier $n \geq 2$: l'événement $[T_n = X_n]$ est réalisé si et seulement si X_n est le maximum des n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$. C'est le cas si et seulement si X_n est supérieur à toutes les autres variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$, ce qui est aussi équivalent au fait que X_n est supérieur à la plus grande des $(n - 1)$ autres variables aléatoires de l'échantillon.

En clair : pour tout entier $n \geq 2$, les événements $[T_n = X_n]$ et $[X_n \geq T_{n-1}]$ sont égaux, et $[T_n = X_n]$ et $[T_{n-1} > X_n]$ ont la même probabilité puisqu'on travaille avec des variables à densité.

b) Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\mathbb{P}(T_n = X_n) = \mathbb{P}(X_n > T_{n-1}) = \mathbb{P}(T_{n-1} - X_n < 0) = \mathbb{P}(Z_n < 0) = F_{Z_n}(0) = \frac{1}{n}.$$

★ ★ ★ FIN DU SUJET ★ ★ ★