MATHÉMATIQUES - HEC B/L 2019

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle croissante qui converge vers un réel ℓ.

   Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k.$

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\Big) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n-n-1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{n+1}a_{n+1}$$
$$= \frac{1}{n(n+1)}\Big(n.a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\Big)$$

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} > 0$ et puisque (a_n) est une suite croissante :

   $\forall k \in [\![1;n]\!],\ a_k \leqslant a_{n+1}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant n.a_{n+1} \iff n.a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 0.$

   Ainsi par produit de deux facteurs positifs : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{n+1} - b_n \geqslant 0$, donc la suite (b_n) est croissante.

   c) La suite (a_n) étant croissante et convergente, elle est majorée par sa limite :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k \leqslant \ell \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant n.\ell \iff \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = b_n \leqslant \ell.$$

   La suite (b_n) est donc croissante et majorée par ℓ : d'après le théorème de limite monotone, elle est donc convergente, de limite $\ell' \leqslant \ell$.

   d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} a_k = \frac{1}{2n}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k\Big) = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k}_{=b_n} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$

   où : pour tout $k \in [\![n+1;2n]\!]$, $a_k \geqslant a_n$ toujours par croissance de la suite (a_n), de sorte que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geqslant n.a_n \iff \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geqslant \frac{1}{2}a_n, \text{ et donc : } \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{2n} \geqslant \frac{a_n + b_n}{2}.$$

e) On sait que la suite (b_n) converge vers ℓ' ; par passage à la limite dans l'inégalité précédente :

$$\ell' \geqslant \frac{\ell' + \ell}{2} \iff 2\ell' \geqslant \ell' + \ell \iff \ell' \geqslant \ell$$

L'inégalité dans l'autre sens est aussi vraie d'après c), on conclut donc que $\boxed{\ell' = \ell = \lim_{n \to +\infty} b_n}$.

2. Si la suite (b_n) est décroissante, alors : la relation $b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\left(n.a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ est toujours valable, et donne cette fois $b_{n+1} - b_n \leqslant 0$ puisque $a_k \geqslant a_{n+1}$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$.

On a donc cette fois : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant n.a_{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout k compris entre 1 et n, $a_k \geqslant \ell \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant n.\ell \Longrightarrow b_n \geqslant \ell$:

la suite (b_n) est décroissante et minorée par ℓ, elle converge donc vers une limite $\ell' \geqslant \ell$.

Le même découpage qu'en d) prouve cette fois que $b_{2n} \leqslant \dfrac{b_n + a_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

qui donne : $\quad \ell' \leqslant \dfrac{\ell' + \ell}{2} \iff \ell' \leqslant \ell$ par passage à la limite, et donc $\ell = \ell'$.

Le théorème de Césaro dit que si une suite (a_n) converge vers une limite ℓ, alors la suite (b_n) des moyennes arithmétiques des n premiers termes, converge vers la même limite ℓ.
Le résultat qu'on vient de démontrer dans le cas où (a_n) est monotone, est encore valable pour une suite convergente quelconque : voir l'exercice suivant pour cette preuve générale !

On considère désormais la suite (u_n) telle que :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$$

3. a) On montre ici par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n > 0$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ $u_1 = 1$ rend $\mathcal{P}(1)$ vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

On a supposé (H.R.) que $u_n > 0$, donc $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$ est bien défini et strictement positif comme somme de deux termes qui le sont, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n^2} > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

c) D'après le théorème de limite monotone : (u_n) croissante est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$.

Si (u_n) était convergente, sa limite ℓ serait alors supérieure à $u_1 = 1$, et le principe d'unicité de la limite donne, à partir de la relation de récurrence :

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell^2} \iff \frac{1}{\ell^2} = 0$$

Cette équation d'admet aucune solution, donc (u_n) ne peut pas converger, et par conséquent :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

4. Soit β un réel non nul :

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta = \left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right)^\beta - u_n^\beta = \left(u_n \times (1 + \frac{1}{u_n^3})\right)^\beta - u_n^\beta = \left((1+\frac{1}{u_n^3})^\beta - 1\right) \times u_n^\beta$$

   b) Le $\mathrm{DL}_1(0)$ de la fonction $x \mapsto (1+x)^\beta$ est : $(1+x)^\beta = 1 + \beta.x + o(x)$.

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^3} = 0$ et on peut écrire :

$$(1+\frac{1}{u_n^3})^\beta = 1 + \frac{\beta}{u_n^3} + o(\frac{1}{u_n^3}) \iff (1+\frac{1}{u_n^3})^\beta - 1 = \frac{\beta}{u_n^3} + o(\frac{1}{u_n^3}) \iff (1+\frac{1}{u_n^3})^\beta - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\beta}{u_n^3}$$

   c) Par compatibilité de l'équivalence avec le produit et d'après le résultat de a), on en déduit :

$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\beta}{u_n^3} \times u_n^\beta = \frac{\beta}{u_n^{3-\beta}}$$

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{3-\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{si } 3-\beta > 0 \iff \beta < 3 \\ 1 & \text{si } 3-\beta = 0 \iff \beta = 3, \\ 0^+ & \text{si } 3-\beta < 0 \iff \beta > 3 \end{cases}$

   et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\beta}{u_n^{3-\beta}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta < 3 \\ \frac{\beta}{1} = 3 & \text{si } \beta = 3 \\ +\infty & \text{si } \beta > 3 \end{cases}$

   Et ainsi, deux suites équivalentes admettant la même limite, $\left(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta\right)$ admet une limite finie non nulle si et seulement si $\beta = 3$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = u_{n+1}^3 - u_n^3$.

   D'après ce qui précède, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$, donc d'après le théorème de Césaro : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n a_k = 3$.

   Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (u_{k+1}^3 - u_k^3) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=2}^{n+1} u_j^3 - \sum_{k=1}^n u_k^3\right) = \frac{u_{n+1}^3}{n} - \frac{u_1^3}{n} = \frac{u_n^3}{n} + \frac{1}{n.u_n^3} - \frac{1}{n},$$

   et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^3}{n} + \frac{1}{n.u_n^3} - \frac{1}{n} = 3 \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^3}{n} = 3 \iff \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{u_n^3}{3n}} = 1 \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\sqrt[3]{3n}} = 1,$$

   ce qui prouve bien que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$.

Exercice 2

Partie 1

Dans toute la Partie 1, on note x un réel de $]0\,;1[$.

1. a) Il y a plusieurs démonstrations possibles de ce résultat classique, par exemple la récurrence puisque la formule est donnée. On procédera ici directement, en remarquant que pour tout entier $m \geqslant 1$, $\sum_{i=1}^{m} ix^{i-1}$ est l'expression de la dérivée de la fonction polynômiale $p_m : x \mapsto \sum_{i=1}^{m} x^i$ sur $]0\,;1[$.

   Or pour tout $x \in]0\,;1[$, on peut aussi écrire : $\sum_{i=1}^{m} x^i = \dfrac{x - x^{m+1}}{1-x} = p_m(x)$, puisqu'il s'agit d'une somme géométrique de raison $x \neq 1$.
   Par unicité de la dérivée, on a donc :

$$\forall x \in]0\,;1[, \quad p'_m(x) = \frac{(1-(m+1)x^m)(1-x) - (x-x^{m+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-(m+1)x^m + mx^{m+1}}{(1-x)^2},$$

   et par conséquent, on a bien démontré que : $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{i=1}^{m} ix^{i-1} = \dfrac{1-(m+1)x^m+mx^{m+1}}{(1-x)^2}$.

   b) Puisque $x \in]0\,;1[$, alors $\lim_{m\to+\infty}(m+1)x^m = 0 = \lim_{m\to+\infty} mx^{m+1}$, donc $\lim_{m\to+\infty}\sum_{i=1}^{m} ix^{i-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, ce qui prouve que la série de terme général ix^{i-1} est convergente, et a pour somme totale :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} ix^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

2. Pour tout entier $N \geqslant 2$, on pose : $S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \dfrac{x^k}{k}$.

   a) On peut commencer par l'un ou l'autre des deux membres de la relation demandée, un grand classique ; en remarquant que $x \mapsto \dfrac{x^k}{k}$ est une primitive de $x \mapsto x^{k-1}$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$), on peut écrire :

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = \sum_{k=1}^{N}\Big(\int_0^x t^{k-1}\mathrm{d}t\Big) = \int_0^x \Big(\sum_{k=1}^{N} t^{k-1}\Big)\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$= \int_0^x \Big(\sum_{j=0}^{N-1} t^j \mathrm{d}t\Big) = \int_0^x \frac{1-t^N}{1-t}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} - \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\mathrm{d}t.$$

   b) On peut calculer : $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x = -\ln(1-x)$. Il s'agit donc de prouver que l'autre intégrale tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$: on travaille pour cela avec des inégalités.
   Comme $x \in]0\,;1[$: $\forall t \in [0\,;x],\ 0 < 1-x \leqslant 1-t \leqslant 1$, donc $1 \leqslant \dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$ et $0 \leqslant t^N \leqslant x^N$, donc $0 \leqslant \dfrac{t^N}{1-t} \leqslant \dfrac{x^N}{1-x}$.
   La fonction intégrée est continue sur $[0\,;x]$ et $0 \leqslant x$, donc par croissance et positivité de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{x^N}{1-x}\mathrm{d}t = \frac{x^{N+1}}{1-x}.$$

Comme $x \in]0\,;1[$: $\lim\limits_{N\to+\infty} x^{N+1} = 0$, donc par encadrement : $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\mathrm{d}t = 0$,

et $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$: on démontre bien ainsi que la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge, et que sa somme totale $S(x)$ est donnée par :

$$\forall x \in]0\,;1[, \quad S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

Partie 2

3. a) Introduisons ici, pour tout entier $i \geqslant 2$, l'événement A_i : « le i-ième jeton tiré est celui qui a été tiré en premier ». Il est clair que pour tout $i \geqslant 2$, $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n}$.

On a : $[X=2] = \overline{A_2}$ donc $\mathbb{P}(X=2) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$. Pour tout entier $k \geqslant 3$, on commence par écrire :

$$\forall k \geqslant 3, \quad [X=k] = A_2 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k},$$

et comme les tirages successifs sont faits avec remise, les numéros successivement tirés sont mutuellement indépendants, de sorte que :

$$\forall k \geqslant 3, \quad \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{k-1}) \times \big(1 - \mathbb{P}(A_k)\big) = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1-2+1} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^{k-1}},$$

et on remarque que cette formule est aussi valable pour $k=2$, donc pour tout entier $k \geqslant 2$.

b) L'entier $n \geqslant 2$ étant fixé : la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{n-1}{n^k} = (n-1)\sum\limits_{k\geqslant 2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}$ est, à une constante près, une série géométrique de raison $\frac{1}{n} \in]0\,;1[$, donc elle converge et a pour somme totale :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = (n-1)\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^j = (n-1) \times \frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = (n-1) \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n-1} = 1.$$

On a donc bien défini la loi de la variable aléatoire X.

c) La variable aléatoire discrète X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k\mathbb{P}(X=k)$ est absolument convergente. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, la convergence simple suffit ; pour tout entier $N \geqslant 2$: $\sum\limits_{k=2}^{N} k\mathbb{P}(X=k) = (n-1)\sum\limits_{k=2}^{N} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$: on reconnaît (au terme initial manquant près) une série dite "géométrique dérivée", du type de celle étudiée à la question 1., avec $x = \frac{1}{n} \in]0\,;1[$: on sait donc que cette série converge, donc X admet une espérance. Toujours d'après les résultats de la question 1 :

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = (n-1)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} - 1\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{1-1}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} - 1\right)$$

$$= (n-1)\cdot\frac{n^2-(n-1)^2}{(n-1)^2} \boxed{= \frac{2n-1}{n-1}.}$$

4. On pose : $Z = X - 1$.

a) Puisque $X(\Omega) = [\![2\,;+\infty[\![$, alors $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout entier $k \geqslant 1$:

$\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(X-1=k) = \mathbb{P}(X=k+1) = \frac{n-1}{n^k}$, qui peut aussi s'écrire

$\mathbb{P}(Z=k) = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdot\frac{n-1}{n}$, ce qui correspond à une loi géométrique de paramètre $p = \frac{n-1}{n}$.

b) Le cours sur la loi géométrique donne alors directement :

$$E(Z) = \frac{1}{p} = \frac{n}{n-1}, \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{n} \times \frac{n^2}{(n-1)^2} = \frac{n}{(n-1)^2}.$$

Comme $X = Z+1$, la linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance ($V(aX+b) = a^2V(X)$ pour tous réels a et b) donnent :

$$E(X) = E(Z) + 1 = \frac{n}{n-1} + 1 = \frac{2n-1}{n-1} \quad \text{et} \quad V(Z) = V(X) = \frac{n}{(n-1)^2}.$$

5. a) Pour tout entier $j \geqslant 2$, on calcule $\mathbb{P}(Y = j)$ grâce à la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\big([X = k]\big)_{k\geqslant 2}$ associé à la variable aléatoire X :

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j),$$

où $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = j) = \begin{cases} 1/k & \text{si } k+1 \geqslant j \iff k \geqslant j-1 \\ 0 & \text{si } k < j-1 \end{cases}.$

Ainsi, $\mathbb{P}(Y = 2) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \times \frac{n-1}{n^{k-1}}$ et pour tout entier $j \geqslant 3$, $\mathbb{P}(Y = j) = \displaystyle\sum_{k=j-1}^{+\infty} \frac{1}{k} \times \frac{n-1}{n^{k-1}}$,
de sorte qu'on peut donner la formule générale, valable pour tout entier $j \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{k=\max(2,j-1)}^{+\infty} \frac{1}{k} \times \frac{n-1}{n^{k-1}}.$$

b) En réorganisant un peu la somme, on peut écrire : $\mathbb{P}(Y = 2) = n(n-1)\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(1/n)^k}{k}$, de sorte qu'on est ramené au calcul réalisé à la question 2, avec $x = 1/n \in]0\,;1[$. On a donc :

$$\mathbb{P}(Y = 2) = n(n-1)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1/n)^k}{k} - \frac{1}{n}\right) = n(n-1)\left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) = -(n-1)\left(1+n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right).$$

c) Dans cette question, on ne suppose plus que l'entier n est fixé.

Le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0 est : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$; comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ alors $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $1 + n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Ainsi, $1 + n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$, et puisque $-(n-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$, alors :

$$-(n-1)\left(1+n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

On a donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{2}$.

C'est un résultat assez logique : si on fait tendre n vers $+\infty$, alors il devient extrêmement difficile de tirer deux fois de suite la même boule. Il est donc extrêmement probable que X prenne la valeur 2, donc que l'urne de la deuxième étape ne contienne que les boules numéros 2 et 3 : il y a dans ce cas, bien une chance sur deux de tomber sur la boule 2.

Exercice 3

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, du produit scalaire usuel et de la norme euclidienne associée.

Soient u et v deux vecteurs orthogonaux non nuls de $\mathbb{R}^n$ et $F = \text{Vect}(u, v)$.
On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle x, u\rangle u + \langle x, u\rangle v.$$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $\langle x, u\rangle$ et $\langle x, v\rangle$ sont des réels, et u et v sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, donc $f(x) \in \mathbb{R}^n$.

   Pour tous $x,\ y$ éléments de $\mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda\cdot x + y) &= \langle \lambda\cdot x + y, v\rangle u + \langle \lambda\cdot x + y, u\rangle v = \big(\lambda\cdot\langle x, v\rangle + \langle y, v\rangle\big)u + \big(\lambda\cdot\langle x, u\rangle + \langle y, u\rangle\big)v \\ &\quad \text{par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \lambda\cdot\big(\langle x, v\rangle u + \langle x, u\rangle v\big) + \big(\langle y, v\rangle u + \langle y, u\rangle v\big) = \lambda\cdot f(x) + f(y) \end{aligned}$$

   L'application f est donc linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$: c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Partie 1

On suppose dans cette partie que $n = 3$ et que $u = (1, 0, 1)$ et $v = (1, 1, -1)$.

2. a) Le produit scalaire de u et v vaut : $\langle u, v\rangle = 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 1 - 1 = 0$, donc u et v bien des vecteurs orthogonaux.

   b) Par définition :

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad ||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

3. a) On calcule les images par f des trois vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \langle e_1, v\rangle u + \langle e_1, u\rangle v = 1\cdot u + 1\cdot v = (2, 1, 0) \\ f(e_2) &= \langle e_2, v\rangle u + \langle e_2, u\rangle v = 0\cdot u + 1\cdot v = (1, 1, -1) \\ f(e_3) &= \langle e_3, v\rangle u + \langle e_3, u\rangle v = 1\cdot u + (-1)\cdot v = (0, -1, 2) \end{aligned}$$

   Ansi : $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   b) Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; grâce à la représentation matricielle précédente, on peut écrire :

$$x \in \text{Ker}(f) \iff f(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \; L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

   Ainsi : $\text{Ker}(f) = \big\{(-x_3, 2x_3, x_3) |\ x_3 \in \mathbb{R}\big\} = \text{Vect}\big((-1, 2, 1)\big)$.
   Le noyau de f est engendré par le seul vecteur $z = (-1, 2, 1)$ qui est non nul : ce dernier forme donc une base de $\text{Ker}(f)$.

4. Soient w_1 et w_2 les deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ définis par : $\begin{cases} w_1 &= \sqrt{3}\cdot u + \sqrt{2}\cdot u \\ w_2 &= -\sqrt{3}\cdot u + \sqrt{2}\cdot v \end{cases}$.

   a) Par linéarité de f : $f(w_1) = \sqrt{3}\cdot f(u) + \sqrt{2}\cdot f(v)$, où $f(u) = \langle u, v\rangle u + \langle u, u\rangle v = 0\cdot u + ||u||^2\cdot v = 2v$, et $f(v) = \langle v, v\rangle u + \langle v, u\rangle v = ||v||^2\cdot u + 0\cdot v = 3u$, donc :

$$f(w_1) = 2\sqrt{3}v + 3\sqrt{2}u = \sqrt{6}\big(\sqrt{2}v + \sqrt{3}u\big) = \sqrt{6}\cdot w_1$$

$$f(w_2) = -2\sqrt{3}v + 3\sqrt{2}u = -\sqrt{6}\big(\sqrt{2}v - \sqrt{3}u\big) = -\sqrt{6}\cdot w_2$$

   Comme w_1 et w_2 ne sont pas nuls, on en déduit qu'ils sont vecteurs propres de f, respectivement associés aux valeurs propres $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$.

   b) Il suffisait de constater que la matrice A représentative de f, est symétrique réelle pour conclure que f est diagonalisable.

   On pouvait aussi constater que f, endomorphisme de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, possède 3 valeurs propres distinctes $-\sqrt{6}, 0$ et $\sqrt{6}$, et vérifie donc le critère suffisant de diagonalisabilité.

Partie 2

Dans cette partie, on revient au cas général où n est un entier quelconque supérieur ou égal à 3.

5. a) Par définition, (u, v) est une famille génératrice de $F = \text{Vect}(u, v)$.

   De plus u et v sont non nuls et orthogonaux, donc (u, v) est une famille libre, et c'est finalement une base de F.

   b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x \in \text{Ker}(f) \iff f(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \langle x, v\rangle u + \langle x, u\rangle v = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle = 0,$$

   la dernière équivalence étant obtenue grâce au fait que la famille (u, v) est libre. Un vecteur x appartient donc au noyau si et seulement si il est orthogonal à chacun des deux vecteurs u et v, ce qui est équivalent au fait d'être orthogonal à tout vecteur de $\text{Vect}(u, v) = F$. Cette équivalence assure bien l'égalité d'ensembles :

$$\text{Ker}(f) = F^\perp.$$

   c) D'après le cours : $\dim F^\perp = \dim R^n - \dim F = n - 2 = \dim \text{Ker}(f)$, et d'après le théorème du rang : $\dim \text{Im}(f) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim \text{Ker}(f) = 2$.

   d) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $f(x) = \langle x, v\rangle u + \langle x, u\rangle v \in \text{Vect}(u, v) = F$, donc $\text{Im}(f) \subset F$.

   Et comme on vient de voir, $\dim \text{Im}(f) = \dim F = 2$: combinée à l'inclusion ci-dessus, cette égalité assure que :

$$\text{Im}(f) = F.$$

6. a) Soit $w \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ non nulle de f : par définition, w est donc non nul et vérifie $f(w) = \lambda\cdot w \iff w = \frac{1}{\lambda}\cdot f(w) \iff w = f\big(\frac{1}{\lambda}\cdot w\big)$.

   Cette dernière égalité assure bien que w appartient à $\text{Im}(f)$.

   b) Dans le cas général : $f(u) = \underbrace{\langle u, v\rangle}_{=0} u + \langle u, u\rangle v = ||u||^2\cdot v$, et $f(v) = \langle v, v\rangle u + \underbrace{\langle v, u\rangle}_{=0} v = ||v||^2\cdot u$.

   À l'exemple de ce qui a été fait à la question 4., définissons les vecteurs : $\begin{cases} w_1 &= ||v||u + ||u||v \\ w_2 &= -||v||u + ||u||v \end{cases}$.

   Puisque u et v sont non nuls et orthogonaux, alors w_1 et w_2 sont eux-mêmes non nuls, et :

$$\begin{aligned} f(w_1) &= ||v||\cdot f(u) + ||u||\cdot f(v) = ||u||^2||v||\cdot v + ||u||\times||v||^2\cdot u = ||u||\times||v||\cdot\big(||u||\cdot v + ||v||\cdot u\big) \\ &= ||u||\times||v||\cdot w_1 \end{aligned}$$

$$f(w_2) = -||v|| \cdot f(u) + ||u|| \cdot f(v) = -||u||^2||v|| \cdot v + ||u|| \times ||v||^2 \cdot u$$
$$= -||u|| \times ||v|| \cdot \big(||u|| \cdot v - ||v|| \cdot u\big) = -||u|| \times ||v|| \cdot w_2$$

ce qui prouve que w_1 et w_2 sont deux vecteurs propres de f, associés respectivement aux valeurs propres $||u|| \times ||v||$ et $-||u|| \times ||v||$, qui sont non nulles et opposées donc distinctes, puisque u et v ne sont pas nuls.

c) On connaît donc 3 valeurs propres de f : 0 dont le sous-espace propre associé est $\mathrm{Ker}(f)$ qui est de dimension $n-2$, $||u|| \times ||v||$ donc le sous-espace propre associé contient au moins le vecteur w_1, et qui est donc de dimension supérieure ou égale à 1, et $-||u|| \times ||v||$ dont le sous-espace propre associé contient w_2 est est lui aussi de dimension supérieure on égale à 1.

La somme des dimensions de ces trois sous-espaces propres est donc au moins égale à n, or d'après le théorème spectral, cette somme ne dépasse jamais la dimension de l'espace soujacent, ici $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension n. On en déduit que :

- L'endomorphisme f n'admet pas d'autres valeurs propres que $0, ||u|| \times ||v||$ et $-||u|| \times ||v||$, et les sous-espaces propres associés à ces deux dernières sont de dimension 1 chacun.
- La somme des dimensions des trois sous-espaces propres est *égale* à n, donc f est diagonalisable.

Exercice 4

1. a) Pour tout couple de réels (s,t) :

$$\exp\left(\frac{s^2}{2}\right) \times \exp\Big(-\frac{1}{2}(t-s)^2\Big) = \exp\Big(\frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}(t^2 - 2st + s^2)\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}t^2 + st\Big)$$

b) La fonction $t \mapsto \exp(s \cdot t)$ étant continue sur $\mathbb{R}$: d'après le théorème de transfert, $E\big(\exp(sX)\big)$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} \cdot \varphi(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente,

où $\varphi :\ t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2}$ est une densité de la loi normale centrée, réduite.

Comme la fonction intégrée est positive sur $\mathbb{R}$, la convergence simple suffit et sous réserve de celle-ci :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} \cdot \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} \cdot e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = e^{s^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-s)^2}\mathrm{d}t = e^{s^2/2}.$$

On a en effet reconnu en la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(t-s)^2}$ une densité de la loi normale $\mathcal{N}(s,1)$, dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1 ; l'intégrale étudiée est donc bien convergente, et

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad E\big(\exp(sX)\big) = \exp\left(\frac{s^2}{2}\right)$$

c) On sait que Z qui suit la loi log-normale $\mathcal{LN}(m,\sigma^2)$ a même loi que la variable $\exp(Y)$ où Y suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, qui a elle-même une loi identique à cette de $\sigma.X + m$; par conséquent, et sous réserve d'existence :

$$E(Z) = E\big(\exp(\sigma.X + m)\big) = e^m.E\big(\exp(\sigma.X)\big) = e^m.e^{\sigma^2/2} = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$$

De même, toujours sous réserve de convergence de l'intégrale doublement impropre :

$$E(Z^2) = E\big((e^{\sigma \cdot X+m})^2\big) = E\big(e^{2\sigma \cdot X+2m}\big) = e^{2m} \cdot e^{(2\sigma)^2/2} = e^{2m+2\sigma^2},$$

d'après la formule vue en b), avec $s = 2\sigma$.
La variable aléatoire Z admet bien un moment d'ordre 2, donc une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = e^{2m+2\sigma^2} - e^{2m+\sigma^2} = e^{2m+\sigma^2} \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$$

d) On note Φ la fonction de répartition de X et F_Z celle de Z.
Pour tout réel $x > 0$:

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leqslant x) = \mathbb{P}\big(e^{\sigma.X+m} \leqslant x\big) = \mathbb{P}\big(\sigma.X+m \leqslant \ln(x)\big) = \mathbb{P}\Big(X \leqslant \frac{\ln(x)-m}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\ln(x)-m}{\sigma}\Big)$$

e) Puisque $Z = \exp(Y)$ est une variable aléatoire à valeurs strictement positives, alors l'expression complète de F_Z est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \Phi\Big(\dfrac{\ln(x)-m}{\sigma}\Big) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi définie : F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc aussi continue sur $]-\infty\,;0[$ comme fonction constante, et sur $]0\,;+\infty[$ comme composée de fonctions de référence de classe $\mathcal{C}^1$.
Il reste donc seulement à vérifier la continuité de la fonction F_Z en 0 :
$\lim\limits_{x\to 0^-} F_Z(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0 = F_Z(0)$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)-m}{\sigma} = -\infty$, donc par composition :
$\lim\limits_{x\to 0^+} \Phi\Big(\dfrac{\ln(x)-m}{\sigma}\Big) = \lim\limits_{X\to -\infty} \Phi(X) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} F_Z(x)$.
La fonction F_Z est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 : Z est donc une variable à densité, et une densité f_Z de Z est obtenue par dérivation de F_Z sur $\mathbb{R}$, sauf en 0 où on choisit une valeur arbitraire positive (ici $f_Z(0) = 0$), de sorte que :

$$\forall x \in]-\infty\,;0],\ f_Z(x) = 0 \quad \text{et}$$

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f_Z(x) = \frac{1}{x\sigma}.\Phi'\Big(\frac{\ln(x)-m}{2}\Big) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{x} \times \exp\Big(-\frac{(\ln(x)-m)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

2. On pose : $R = \dfrac{1}{Z}$. La variable aléatoire R est encore à valeurs dans $]0\,;+\infty[$, donc $F_R(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty\,;0]$, et pour tout $x > 0$:

$$F_R(x) = \mathbb{P}(R \leqslant x) = \mathbb{P}\big(\frac{1}{Z} \leqslant x\big) = \mathbb{P}\big(Z \geqslant \frac{1}{x}\big)$$

$$= 1 - F_Z\big(\frac{1}{x}\big) = 1 - \Phi\Big(\frac{\ln(1/x)-m}{\sigma}\Big) = 1 - \Phi\Big(-\frac{\ln(x)+m}{\sigma}\Big)$$

Or la fonction de répartition de la loi normale vérifie la relation :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \iff 1 - \Phi(-z) = \Phi(z),$$

donc pour tout $x > 0$:

$$F_R(x) = \Phi\Big(\frac{\ln(x)+m}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\ln(x)-(-m)}{\sigma}\Big)$$

qui correspond bien à la fonction de répartition de la loi log-normale $\mathcal{LN}(-m, \sigma^2)$.
C'est bien la loi suivie par R.

3. Soit u une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{LN}(0,1)$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $\quad W_n = U^n$.
La variable aléatoire W_n est, comme U, à valeurs positives donc $F_{W_n}(x) = 0$ pour tout $x \leqslant 0$; pour tout $x > 0$:

$$F_{W_n}(x) = \mathbb{P}(W_n \leqslant x) = \mathbb{P}(U^n \leqslant x) = \mathbb{P}(U \leqslant x^{1/n}) = \Phi\Big(\frac{\ln(x^{1/n}) - 0}{1}\Big) = \Phi\Big(\frac{\ln(x) - 0}{n}\Big),$$

ce qui correspond bien d'après 1.d) à la fonction de répartition de la loi $\mathcal{LN}(0, n^2)$, loi qui est donc suivie par $W_n = U^n$.

4. Soit $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{LN}(m, \sigma^2)$, avec $0 < \sigma \leqslant 2$. Soit a un réel tel que $0 < a < 1$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$\overline{T}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(Z_k), \quad I_n = \overline{T}_n - \frac{2}{\sqrt{na}} \quad \text{et} \quad J_n = \overline{T}_n + \frac{2}{\sqrt{na}}.$$

Par définition de la loi log-normale : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(Z_k)$ suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Et d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\big(\ln(Z_k)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

D'après le théorème de stabilité de la loi normale, on sait alors que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(Z_k)$ suit la loi $\mathcal{N}(nm\,, n\sigma^2)$ et $\overline{T_n} = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(Z_k)$ suit la loi normale $\mathcal{N}\big(m, \frac{\sigma^2}{n}\big)$.

Par conséquent, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(I_n \leqslant m \leqslant J_n) = \mathbb{P}\big(\overline{T_n} - \frac{2}{\sqrt{na}} \leqslant m \leqslant \overline{T_n} + \frac{2}{\sqrt{na}}\big) = \mathbb{P}\big(m - \frac{2}{\sqrt{na}} \leqslant \overline{T_n} \leqslant m + \frac{2}{\sqrt{na}}\big)$$
$$= \mathbb{P}\big(-\frac{2}{\sqrt{na}} \leqslant \overline{T_n} - m \leqslant \frac{2}{\sqrt{na}}\big) = \mathbb{P}\big(|\overline{T_n} - m| \leqslant \frac{2}{\sqrt{na}}\big)$$

Or $\overline{T_n}$ admet une variance, donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour cette variable aléatoire avec $\varepsilon = \dfrac{2}{\sqrt{na}} > 0$:

$$\mathbb{P}\big(|\overline{T_n} - n| > \frac{2}{\sqrt{na}}\big) \leqslant \frac{V(\overline{T_n})}{(2/\sqrt{na})^2} \iff 1 - \mathbb{P}\big(|\overline{T_n} - m| \leqslant \frac{2}{\sqrt{na}}\big) \leqslant \frac{\sigma^2.na}{4n}$$
$$\iff \mathbb{P}\big(|\overline{T_n} - m| \leqslant \frac{2}{\sqrt{na}}\big) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2.a}{4}$$

Comme $0 < \sigma \leqslant 2$, alors $0 < \sigma^2 \leqslant 4$ et $\dfrac{\sigma^2.a}{4} \leqslant a \iff 1 - \dfrac{\sigma^2.a}{4} \geqslant 1 - a$, ce qui achève effectivement de prouver que :

$$\mathbb{P}(m \in [I_n\,, J_n]) = \mathbb{P}\big(|\overline{T_n} - m| \geqslant \frac{2}{\sqrt{na}}\big) \geqslant 1 - a.$$

Ce résultat signifie que $[I_n\,, J_n]$ est un intervalle de confiance de m au niveau de confiance $1 - a$.

★ ★ ★ FIN DU SUJET ★ ★ ★