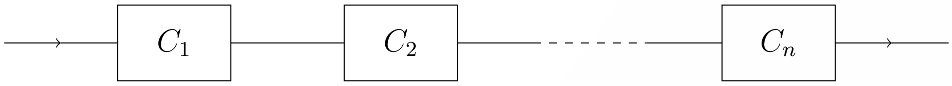
Corrigé de l'exercice 1

1. Montage en série.



On comprend bien via ce schéma, que le courant électrique passe à travers la chaîne de composants en *série*, si et seulement si *tous* les composants sont en bon état de marche !

a) Pour tout réel x : l'événement $[S_n > x]$ est réalisé si et seulement si le temps de bon fonctionnement du système est supérieur à x, ce qui équivaut à dire que le système a fonctionné au moins x unités de temps. Ceci est possible si et seulement si les n composants ont *tous* fonctionné eux-même, au moins x unités de temps, donc :

$$[S_n > x] = [X_1 > x] \cap [X_2 > x] \cap \ldots \cap [X_n > x].$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n > x) &= \mathbb{P}\big([X_1 > x] \cap [X_2 > x] \cap \ldots \cap [X_n > x]\big) \\
&= \mathbb{P}(X_1 > x) \times \mathbb{P}(X_2 > x) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n > x) \quad \text{car les } (X_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ sont indépendantes} \\
&= \big(\mathbb{P}(X_1 > x)\big)^n \qquad \text{car les } (X_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ suivent toutes la même loi} \\
&= \big(1 - F_{X_1}(x)\big)^n = \begin{cases} (1-0)^n = 1 & \text{si } x < 0 \\ \big(1-(1-e^{-\lambda x})\big)^n = (e^{-\lambda x})^n = e^{-n\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Attention à bien détailler chaque étape de ce raisonnement ultra-classique, en donnant bien à chaque fois l'argumentation nécessaire !

b) Pour tout réel x, on a donc :

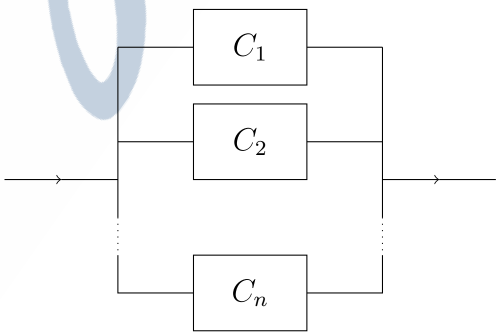
$$F_{S_n}(x) = \mathbb{P}(S_n \leqslant x) = 1 - \mathbb{P}(S_n > x) = \begin{cases} 1-1 = 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

On reconnaît par conséquent, la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$: c'est donc la loi suivie par S_n.

Les résultats du cours sur cette loi permettent de donner directement et sans calcul :

$$E(S_n) = \frac{1}{n\lambda} \quad \text{et} \quad V(S_n) = \frac{1}{(n\lambda)^2} = \frac{1}{n^2\lambda^2}.$$

2. Montage en parallèle.



a) On voit bien cette fois que le courant cesse de circuler à travers le système, si et seulement si les n composants sont tous défaillants.
Pour tout réel x, l'événement $[T_n \leqslant x]$ signifie justement que le système est défaillant après x unités de temps (puisque sa durée de bon fonctionnement est au plus égale à x), donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [T_n \leqslant x] = [X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant x].$$

Le passage à la probabilité donne alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n \leqslant x) &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \times \mathbb{P}(X_2 \leqslant x) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \leqslant x) \text{ par indépendance des } (X_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \\
&= \big(\mathbb{P}(X_1 \leqslant x)\big)^n \text{ car toutes les v.a.r. } X_i \text{ suivent la même loi} \\
&= \begin{cases} (1-e^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ au vu de la loi commune des } (X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}
\end{aligned}$$

b) La relation : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_{T_n}(x) = \big(F_{X_1}(x)\big)^n$ permet de justifier très rapidement que F_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf en un nombre fini de points ; ces propriétés sont en fait déjà vérifiée par F_{X_1}, puisque cette dernière est la fonction de répartition d'une variable de loi exponentielle, donc à densité d'après le cours ! La fonction F_{T_n} a alors aussi ces propriétés comme produit de fonctions qui les ont.
La variable aléatoire T_n est donc à densité, et on obtient une telle densité f_n par dérivation de F_{T_n} sur $\mathbb{R}$, sauf en 0 où on définit une valeur arbitraire, par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n.f_{X_1}(x).(F_{X_1}(x))^{n-1} = n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et on reprend la première expression quand $x = 0$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: la v.a.r. T_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
Comme la fonction $x \mapsto x.f_n(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et positive sur $[0, +\infty[$, cela revient à prouver la convergence simple de $\displaystyle n.\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}\mathrm{d}x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $e^{-\lambda x} \in]0,1]$, donc $1-e^{-\lambda x} \in [0,1[$ et $0 \leqslant \lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} \leqslant \lambda x e^{-\lambda x}$.
Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ converge et est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$, puisqu'elle correspond au calcul de l'espérance d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.
Le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues, positives permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle n.\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}\mathrm{d}x$ est convergente, donc que T_n admet une espérance.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) - f_n(x) &= (n+1)\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^n - n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} \\
&= \lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}[(n+1)(1-e^{-\lambda x}) - n] \\
&= \lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}[1-(n+1)e^{-\lambda x}]
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
f'_{n+1}(x) &= -(n+1)\lambda^2 e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^n + (n+1).\lambda^2 e^{-\lambda x}.n.e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} \\
&= \lambda^2 \cdot (n+1)e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}[-(1-e^{-\lambda x}) + ne^{-\lambda x}]
\end{aligned}$$

soit : $f'_{n+1}(x) = -(n+1)\lambda^2 e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}[1-(n+1)e^{-\lambda x}] = -(n+1)\lambda[f_{n+1}(x) - f_n(x)]$, ce qui donne bien la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{\lambda(n+1)} f'_{n+1}(x).$$

e) On réalise comme demandé, une intégration par parties, en se plaçant dans un premier temps sur un intervalle borné $[0, A]$ où $A > 0$: dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\mathrm{d}x$, on pose :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & \to & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{\lambda(n+1)} f'_{n+1}(x) & \to & v(x) & = & -\dfrac{1}{\lambda(n+1)} f_{n+1}(x) \end{array}$$

Les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \forall A > 0,\ \int_0^A x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{\lambda(n+1)} x f_{n+1}(x)\right]_0^A + \frac{1}{\lambda(n+1)} \int_0^A f_{n+1}(x)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\lambda(n+1)}.A.f_{n+1}(A) + \frac{1}{\lambda(n+1)} \int_0^A f_{n+1}(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Lorsque A tend vers $+\infty$: $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} A f_{n+1}(A) = 0$, comme conséquence de la convergence de l'intégrale impropre et convergente, $\displaystyle\int_0^A x f_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ qui définit $E(T_{n+1})$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ étant également convergente (intégrale d'une densité), on en déduit bien par passage à la limite quand $A \to +\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda(n+1)} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x.$$

f) Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_n(x)\mathrm{d}x$ sont, d'après la question 5.a), convergentes et valent respectivement $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$. L'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ vaut 1, comme intégrale d'une densité nulle sur $]-\infty, 0[$. La linéarité de l'intégrale peut donc être utilisée à gauche, et donne la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(T_{n+1}) - E(T_n) = \frac{1}{\lambda(n+1)}$$

Un passage à la somme dans cette relation, réécrite sous la forme : $\forall k \geqslant 2,\ E(T_k) - E(T_{k-1}) = \dfrac{1}{\lambda k}$, donne :

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=2}^n E(T_k) - E(T_{k-1}) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda k} &\iff \sum_{k=2}^n E(T_k) - \sum_{j=1}^{n-1} E(T_j) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda k} \qquad [j = k-1] \\ \iff E(T_n) - E(T_1) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda k} &\iff E(T_n) = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda k} \end{aligned}$$

Soit : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda k}$, formule valable y compris pour $n = 1$.

On reconnaît ainsi, à un facteur $\dfrac{1}{\lambda}$ près, la série harmonique, et un résultat classique donne :

$$E(T_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\lambda}.$$