Corrigé de l'exercice 2

1. a) Soit $x \geqslant 0$; l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est convergente comme *reste* de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$, qui est convergente puisque X admet une espérance.

   b) Pour tout $t \in [x;+\infty[$: $\quad t \geqslant x \quad$ donc $tf(t) \geqslant xf(t) \quad$ car $f(t) \geqslant 0 \quad$ (f étant une densité).

   Or : $\displaystyle\int_x^{+\infty} xf(t)\mathrm{d}t = x\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d} = xP(X \geqslant x) = x\big(1-F(x)\big)$ car X a pour densité f.

   Les fonctions concernées par l'inégalité qui précède sont continues (éventuellement par morceaux) et les intégrales impropres convergent : par croissance de l'intégrale, on a bien :

$$\int_x^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{+\infty} xf(t)\mathrm{d}t \Longrightarrow \int_x^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \geqslant x\big(1-F(x)\big) \geqslant 0$$

   puisque : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ F(x) \leqslant 1 \iff 1-F(x) \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$.

   c) Soit $x > 0$: on réalise une intégration par parties dans $\displaystyle\int_0^x \big(1-F(t)\big)\mathrm{d}t$ en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = 1-F(t) & \longrightarrow & u'(t) = -f'(t) \\ v'(t) = 1 & \longrightarrow & v(t) = t \end{array}$$

   Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ (au moins par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$\int_0^x \big(1-F(t)\big)\mathrm{d}t = \Big[t\big(1-F(t)\big)\Big]_0^x + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = x\big(1-F(x)\big) + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

   Dans cette relation : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = E(X)$ puisque X admet une espérance.

   Ce fait implique également : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 0$ (reste d'une intégrale impropre convergente) ; l'encadrement obtenu à la question b) donne alors : $\quad\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\big(1-F(x)\big) = 0$.

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1-F(t)\big)\mathrm{d}t$ est par conséquent convergente, et sa valeur est donnée par le passage à la limite quand $x \to +\infty$ dans la relation précédente, qui donne :

$$\int_0^{+\infty} \big(1-F(t)\big)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = E(X)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, G_n la fonction de répartition de Z_n et g_n une densité de Z_n.

   a) Le calcul est classique, et provient de l'égalité d'événements fondamentale, s'agissant du maximum de variables aléatoires :

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad [Z_n \leqslant t] = [X_1 \leqslant t] \cap [X_2 \leqslant t] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant t]$$

   Ainsi, pour tout réel t :

$$\begin{aligned} G_n(t) &= P(Z_n \leqslant t) = P(X_1 \leqslant t) \times P(X_2 \leqslant t) \times \ldots \times P(X_n \leqslant t) \qquad \text{par indépendance des } X_i \\ &= \big(F(t)\big)^n \qquad \text{puisque les } X_i \text{ suivent toutes la même loi que } X \end{aligned}$$

b) La variable aléatoire X est à densité, donc sa fonction de répartition F est continue sur tout $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de point. Conséquence immédiate : par produit de n facteurs tous égaux à F, la fonction G_n a les mêmes propriétés, ce qui garantit que Z_n est une variable à densité. Une densité g_n est d'ailleurs définie presque partout par dérivation de G_n, soit :

$$g_n(t) = n.f(t).\big(F(t)\big)^{n-1}$$

en tout réel t, sauf peut-être en un nombre fini de points où on choisit arbitrairement que g_n suit la formule précédente.
Cette densité, comme f, est nulle sur $]-\infty, 0[$, et pour tout $t \geqslant 0$:

$$0 \leqslant tg_n(t) = n.tf(t).\big(F(t)\big)^{n-1} \leqslant n.tf(t)$$

puisque $0 \leqslant F(t) \leqslant 1$ pour tout réel t. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} n.tf(t)\mathrm{d}t = nE(X)$ est bien convergente : d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, continues par morceaux, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tg_n(t)\mathrm{d}t$ converge, donc que Z_n admet une espérance.

c) Puisque Z_n admet une espérance, le résultat de 1. s'applique, qui donne :

$$E(Z_n) = \int_0^{+\infty} \big(1 - G_n(t)\big)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \Big(1 - \big(F(t)\big)^n\Big)\mathrm{d}t$$

Pour tout entier $n \geqslant 2$, la linéarité de l'intégrale donne alors :

$$E(Z_n) - E(Z_{n-1}) = \int_0^{+\infty} \Big(\cancel{1} - \big(F(t)\big)^n - \cancel{1} + \big(F(t)\big)^{n-1}\Big)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \big(F(t)\big)^{n-1}.\big(1 - F(t)\big)\mathrm{d}t.$$

d) Soit $m > 0$. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre λ : alors pour tout $t \geqslant 0$, $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, et le résultat précédent s'écrit explicitement : pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$E(Z_n) - E(Z_{n-1}) = \int_0^{+\infty} \big(1 - e^{-\lambda t}\big)^{n-1}.e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

Il y a ici plusieurs façons de finir le calcul explicite, en voici une basée sur le changement de variable : $u = 1 - e^{-\lambda t} = \varphi(t)$; φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et :
$\mathrm{d}u = \lambda.e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$, donc $\big(1 - e^{-\lambda t}\big)^{n-1}.e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{\lambda}.u^{n-1}\mathrm{d}u$.
Quand $t = 0$, $u = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$, et quand t tend vers $+\infty$, $u = 1 - e^{-\lambda t}$ tend vers $1 - 0 = 1$; le théorème de changement de variable donne donc :

$$\int_0^{+\infty} \big(1 - e^{-\lambda t}\big)^{n-1}.e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 u^{n-1}\mathrm{d}u \iff E(Z_n) - E(Z_{n-1}) = \frac{1}{\lambda}.\left[\frac{u^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{\lambda n}$$

La sommation de la relation : $\forall k \geqslant 2,\ E(Z_k) - E(Z_{k-1}) = \dfrac{1}{\lambda k}$, pour k variant de 2 à n, donne :

$$\sum_{k=2}^{n} E(Z_k) - E(Z_{k-1}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \iff E(Z_n) - E(Z_1) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \iff E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda k}$$

puisqu'en effet : $Z_1 = X_1$, et $E(Z_1) = \dfrac{1}{\lambda}$.