Corrigé de l'exercice 4

1. La fonction f est tout d'abord bien continue sur tout $\mathbb{R}$ comme composée de telles fonctions, et (strictement) positive sur tout $\mathbb{R}$ par stricte positivité de l'exponentielle et puisque $\beta > 0$.

   Par ailleurs, sous réserve de convergence absolue :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\beta}\int_{-\infty}^{\alpha} \exp\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2\beta}\int_{\alpha}^{+\infty} \exp\left(\frac{-t+\alpha}{\beta}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\beta}\lim_{Y\to-\infty}\left[\beta.\exp\left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)\right]_Y^{\alpha} + \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{2\beta}\left[-\beta.\exp\left(\frac{\alpha-t}{\beta}\right)\right]_{\alpha}^{X}$$

$$= \lim_{Y\to-\infty}\frac{1}{2}\left(1-\exp\left(\frac{Y-\alpha}{\beta}\right)\right) + \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\exp\left(\frac{\alpha-X}{\beta}\right)\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.(1-0) + \frac{1}{2}.(1-0) = 1$$

   Ce qui achève de prouver que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

2. La fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathcal{L}(0,1)$, est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|t|}\,\mathrm{d}t$$

   On distingue deux cas de figure, suivant le signe de x :

   - Pour tout $x \in]-\infty; 0]$:

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{Y\to-\infty}\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{Y}\right) = \frac{1}{2}e^{x}$$

   - Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$:

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{Y\to-\infty}\frac{1}{2}\left(e^{0}-e^{Y}\right) + \frac{1}{2}\left[-e^{-t}\right]_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$$

3. On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.

   a) On obtient la loi de $Y = \beta X + \alpha$ par le calcul de sa fonction de répartition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(\beta X + \alpha \leqslant x) = \mathbb{P}\big(X \leqslant \frac{x-\alpha}{\beta}\big) \qquad \text{car } \beta > 0$$

   Soit : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \Psi\Big(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\Big)$.

   Comme la densité d'une loi $\mathcal{L}(0,1)$ est continue sur tout $\mathbb{R}$, la fonction de répartition associée Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}$: par composition avec la fonction affine $x \mapsto \dfrac{x-\alpha}{\beta}$, F_Y est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc Y est une variable à densité, dont une densité est définie par dérivation de la composée F_Y :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \frac{1}{\beta}\Psi'\Big(\frac{x-\alpha}{\beta}\Big) = \frac{1}{\beta}f_X\Big(\frac{x-\alpha}{\beta}\Big) = \frac{1}{2\beta}\exp\left(-\frac{|x-\alpha|}{\beta}\right)$$

   ce qui correspond bien à la densité d'une loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

b) La fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha,\beta)$ est donc celle de $Y=\beta X+\alpha$, où X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$, de sorte que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_Y(x)=\Psi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\exp\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right) & \text{si } \dfrac{x-\alpha}{\beta}\leqslant 0 \iff \boxed{x\leqslant\alpha}\\ 1-\dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right) & \text{si } \dfrac{x-\alpha}{\beta}>0 \iff \boxed{x>\alpha}\end{cases}$$

4. *Espérance et variance.*

a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$. Cette variable aléatoire admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x$, est absolument convergente.

En remarquant ici que la fonction $g:\ x\mapsto\dfrac{x}{2}e^{-|x|}$ est impaire :

$\forall x\in\mathbb{R},\ g(-x)=\dfrac{-x}{2}e^{-|-x|}=-\dfrac{x}{2}e^{-|x|}=g(x)$, et positive sur $\mathbb{R}_+$, il suffit alors de prouver l'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x$ est l'intégrale définissant l'espérance d'une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre 1 : elle est convergente (et vaut 1), donc X admet une espérance qui vaut :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{0}xf_X(x)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=0$$

D'après le théorème de transfert : la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Comme la fonction $h:\ x\mapsto\dfrac{x^2}{2}e^{-|x|}$ est positive et paire, il suffit de prouver la convergence simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{2}e^{-x}\mathrm{d}x$. On reconnaît à un facteur $\dfrac{1}{2}$ près, le moment d'ordre 2 de la variable T précédemment introduite, qui vaut d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$E(T^2)=V(T)+E(T)^2=1+1^2=2.$$

Ainsi, X admet un moment d'ordre 2 qui vaut :

$$E(X^2)=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{2}e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}\mathrm{d}x=E(T^2)=2$$

La variable aléatoire X admet donc une variance qui vaut : $\quad V(X)=E(X^2)-E(X)^2=2-0=2.$

b) D'après ce qui précède, la variable aléatoire $Y=\beta X+\alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha,\beta)$ et admet alors une espérance et une variance données par :

$$E(Y)=\beta E(X)+\alpha=\alpha\quad\text{et}\quad V(Y)=\beta^2V(X)=2\beta^2$$

par linéarité de l'espérance, et d'après les propriétés de la variance.

5. *Simulation à partir d'une loi exponentielle.* Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, indépendante de U.

   a) Pour tout réel x, le calcul de $P(X \leqslant x)$ se fait via la formule des probabilités totales, appliquée avec le s.c.e. $\big([V=0],[V=1]\big)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant x) &= \mathbb{P}\big([V=0] \cap [(2V-1)U \leqslant x]\big) + \mathbb{P}\big([V=1] \cap [(2V-1)U \leqslant x]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([V=0] \cap [-U \leqslant x]\big) + \mathbb{P}\big([V=1] \cap [U \leqslant x]\big) \\
&= \mathbb{P}(V=0) \times \mathbb{P}(U \geqslant -x) + \mathbb{P}(V=1) \times \mathbb{P}(U \leqslant x) \quad \text{par indépendance de } U \text{ et } V \\
&= \frac{1}{2}\big(1 - F_U(-x)\big) + \frac{1}{2} F_U(x)
\end{aligned}$$

   On distingue alors deux cas, suivant le signe de x :

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-0) + \frac{1}{2}(1-e^{-x}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2}(1-1+e^{x}) + 0 = \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

   On retrouve exactement l'expression de Ψ, ce qui permet de conclure que X suit bien la loi $\mathcal{L}(0,1)$.

   b) Le principe du script ci-dessous est alors simple : on simule une réalisation de U et une de V via les fonctions de simulations usuelles connues en `Scilab` : le calcul de $X = (2V-1)U$ correspond alors à une simulation de la loi $\mathcal{L}(0,1)$, et celui de $Y = \beta X + \alpha$ correspond à la simulation de la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

```
function r = Laplace(alpha,beta)
    if rand() <= 1/2 then    // simulation de V
        V = 1
    else
        V = 0
    end
    X = (2*V-1) * grand(1,1,"exp",1)
    r = beta * X + alpha
endfunction
```

6. *Une autre méthode de simulation, issue du sujet HEC E 2007.*

   a) Le fait que Ψ soit la fonction de répartition d'une variable à densité comprend déjà le fait que cette fonction soit continue sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x \to -\infty} \Psi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \Psi(x) = 1$.

   La densité $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, Ψ est elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier, de dérivée cette même fonction f_X qui est de plus strictement positive sur $\mathbb{R}$.

   Bref, Ψ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle-image $]0,1[$.

   N.B. : c'est la stricte croissance de Ψ sur $\mathbb{R}$ qui assure que les limites en $-\infty$ et $+\infty$ ne sont jamais atteintes.

   b) Une question difficile à aborder sans indications préliminaires... Il faut connaître en détail le raisonnement ci-dessous !

   On sait que Ψ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$; définissons alors la variable aléatoire $Y = \Psi(X)$: ainsi, $Y(\Omega) =]0,1[$ et :

   $\forall x \in]0,1[,\ F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(\Psi(X) \leqslant x) = P(X \leqslant \Psi^{-1}(x)) = \Psi\big(\Psi^{-1}(x)\big) = x$ par définition et stricte croissance de Ψ.

Vu l'univers-image de Y, on a bien sûr : $F_Y(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $F_Y(x) = 1$ si $x \geqslant 1$,

Donc $Y = \Psi(X)$ suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

Réciproquement, si Z est une variable aléatoire suivant la loi uniforme à densité sur $]0,1[$, et si on pose $W = \Psi^{-1}(Z)$:

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = P(\Psi^{-1}(Z) \leqslant x) = P(Z \leqslant \Psi(x)) = \Psi(x)$ car Ψ^{-1} est aussi strictement croissante, et car $\Psi(x) \in]0,1[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En clair : si $Z \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$, alors $\Psi^{-1}(Z) \hookrightarrow \mathcal{L}(0,1)$ puisque cette v.a.r. a la même fonction de répartition que X.

c) Le tableau de variation de Ψ permet d'identifier deux sous-intervalles distincts pour le calcul de sa bijection réciproque :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Ψ	0	$\nearrow$	$1/2$	$\nearrow$	1

- Pour tout réel $x \in]0,1/2]$: son unique antécédent $y = \Psi^{-1}(x)$ appartient à $]-\infty, 0]$, comme unique solution de l'équation :

$$\Psi(y) = x \iff \frac{1}{2}e^y = x \iff e^y = 2x \iff y = \ln(2x).$$

- Pour tout réel $x \in [1/2, 1[$: son unique antécédent $y = \Psi^{-1}(x)$ appartient cette fois à $[0, +\infty[$, comme unique solution de l'équation :

$$\Psi(y) = x \iff 1 - \frac{1}{2}.e^{-y} = x \iff 1 - x = \frac{1}{2}.e^{-y} \iff 2(1-x) = e^{-y} \iff y = -\ln(2(1-x)).$$

On a bien montré que : $\quad \forall x \in]0,1[,\ \Psi^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1/2 \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si } 1/2 \leqslant x < 1 \end{cases}$

d) On déduit de tout ce qui précède, une simulation simple de la loi $\mathcal{L}(0,1)$:

```
function y = Laplace()
    Z = rand()
    if Z <= 0.5 then
        y = log(2*Z)
    else
        y = -log(2*(1-Z))
    end
endfunction
```