Corrigé de l'exercice 2
Partie I de l'exercice 1 du sujet Ecricome ECE 2018

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 4+0-2 & 2+3+2 & -4+0-10 \\ 0+0+0 & 0+9+0 & 0+0+0 \\ 2+0+5 & 1-3-5 & -2+0+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - 7A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$,

c'est-à-dire :

$$A^2 - 7A = -12 I_3$$

b) Le résultat précédent s'écrit aussi : $A^2 - 7A^1 + 12A^0 = 0_3$, ce qui signifie que $P(X) = X^2 - 7X + 12$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

On sait donc que les valeurs propres possibles de A sont les racines du trinôme P, dont le discriminant est : $\quad \Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 49 - 48 = 1 > 0$.

Le trinôme admet deux racines distinctes, à savoir $x_1 = \dfrac{7-1}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{7+1}{2} = 4$, qui sont donc les seules valeurs propres *possibles* de A.

c) On vérifie si les deux seules valeurs propres possibles de A le sont effectivement :

- $A - 3.I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$: cette matrice est évidemment non-inversible, puisque sa deuxième ligne est nulle, donc 3 est bien valeur propre de A.

  Le sous-espace propre associé est l'ensemble des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que :

$$(A - 3.I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \iff x = y - 2z$$

  Donc :

$$E_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

  On a obtenu une famille génératrice de $E_3(A)$ constituée de deux vecteurs non colinéaires : c'est aussi une famille libre, donc une base de $E_3(A)$.

- $A - 4.I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: cette matrice est aussi non-inversible puisque deux de ses colonnes sont égales, donc 4 est bien valeur propre de A.

  Le sous-espace propre associé est l'ensemble des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que :

$$(A - 4.I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{cases} -2x + y - 2z = 0 \\ y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 2z = 0 \\ y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc : $E_4(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z. \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

On a obtenu une famille génératrice de $E_4(A)$ constituée d'un unique vecteur non nul : il constitue aussi une famille libre, donc une base de ce sous-espace propre.

d) La matrice A est inversible car ses deux seules valeurs propres sont non nulles.

Ensuite : A est une matrice carrée d'ordre 3, avec :

$$\dim E_3(A) + \dim E_4(A) = 2 + 1 = 3$$

donc A est diagonalisable.

2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est : $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Pour trouver le noyau de f, on résout le système $BX = 0_{3,1}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$BX = 0_{3,1} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & z & = & 0 \\ -3x & + & 3y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & - & y & - & z & = & 0 & \\ & & & - & 6z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ & & & & 0 & = & 0 & \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc : $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, x, 0) |\, x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 1, 0))$.

On en déduit que 0 est valeur propre de f, le sous-espace propre associé étant $E_0(f) = \mathrm{Ker(f)}$.

b) $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a deux colonnes égales (C_1 et C_3) tandis que C_1 et C_2 sont non proportionnelles : on en déduit directement que $\mathrm{rg}(B - 2I_3) = 2$.

c) Le vecteur $f(e_1 - e_2 - e_3)$ est représenté matriciellement par $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc :

$$f(e_1 - e_2 - e_3) = 3e_1 - 3e_2 - 3e_3 = 3(e_1 - e_2 - e_3)$$

d) D'après a), 0 est valeur propre de f.

D'après b), $B - 2I_3$ n'est pas inversible car elle n'est pas de rang maximal 3, donc 2 est valeur propre de B, et de f aussi par conséquent.

D'après c), le vecteur $e_1 - e_2 - e_3$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre 3.

L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ possède donc trois valeurs propres distinctes, à savoir 0, 2 et 3.

D'après le critère suffisant, on peut donc conclure sans calcul que f n'a pas d'autre valeur propre, que f est diagonalisable et que les trois sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

3. D'après ce qui précède : pour diagonaliser effectivement B, avec des valeurs propres dans l'ordre imposé, il suffit de trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre : ils formeront les colonnes de la matrice de passage P.

$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B pour la valeur propre 3 d'après 2.c).

$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de B pour la valeur propre 0 d'après 2.a).

$V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne qui vérifie : $(B - 2I_3)V_3 = 0_{3,1}$ d'après 2.b), il s'agit donc d'un vecteur propre de B pour la valeur propre 2.

La matrice de passage P cherchée est donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, telle que

$D_2 = P^{-1}BP$ est égale à $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Il reste donc à vérifier, conformément à la troisième demande de l'énoncé, que les trois vecteurs colonnes V_1, V_2 et V_3 sont également vecteurs propres de A : d'après les calculs menés à la question 1., c'est le cas des vecteurs V_2 et V_3, respectivement associés aux valeurs propres 3 et 4.

On calcule enfin : $AV_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3V_1$, donc V_1 est bien vecteur propre de A pour la valeur propre 3.

On en déduit sans calcul supplémentaire que $D_1 = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.