Corrigé de l'exercice 4
Tiré du Sujet Edhec ECE 2018

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est évidemment non-inversible car ses deux colonnes sont proportionnelles ($C_2 = 2.C_1$).

2. Les valeurs propres de A sont les réels λ tels que $A - \lambda.I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$ est non-inversible. Comme

   A est une matrice carrée d'ordre 2, on peut utiliser le critère du déterminant :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \det(A-\lambda.I_2) = 0 \iff (1-\lambda)(6-\lambda)-3\times 2 = 9 \iff 6-\lambda-6\lambda+\lambda^2-6 = 0 \iff \lambda^2-7\lambda = 0$$

   Les deux racines évidente de cette équation sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 7$.

   Calcul des deux sous-espaces propres :

   - $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff AX = 0_{2,1} \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & + & 6y & = & 0 \end{array}\right. \iff x = -2y,$

     donc $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

   - $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_7(A) \iff (A - 7.I_2)X = 0_{2,1} \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -6x & + & 2y & = & 0 \\ 3x & - & y & = & 0 \end{array}\right. \iff y = 3x,$

     donc $E_7(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

   Dans les deux cas on a obtenu une famille génératrice du sous-espace propre constituée d'un seul vecteur non nul, donc une base de celui-ci.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M) = AM$$

3. Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $f(M) = AM$ appartient encore à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme produit de deux matrices carrées d'ordre 2.

   Pour toutes matrices M, N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ :

$$f(\lambda.M + N) = A \times (\lambda.M + N) = \lambda.AM + AN = \lambda.f(M) + f(N)$$

   donc f est linéaire : f est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. a) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$M \in \mathrm{Ker(f)} \iff f(M) = 0_2 \iff AM = 0_2 \iff \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+6z & 3y+6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & 2z & = & 0 \\ y & + & 2t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & = -2z \\ y & = -2t \end{array}\right. \quad \text{par redondance de deux lignes}$$

   Ainsi : $\mathrm{Ker(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix} \,\middle|\, (\mathrm{z}, \mathrm{t}) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

   Ainsi, Ker(f) est engendré par une famille de deux vecteurs non-colinéaires : il s'agit bien d'une base du noyau, et $\dim \mathrm{Ker(f)} = 2$.

b) Le théorème du rang pour l'endomorphisme f donne :

$$\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker(f)} + \dim \mathrm{Im(f)} \iff \dim \mathrm{Im(f)} = 4 - 2 = 2$$

c) On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- $f(E_1) = AE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = E_1 + 3.E_3$
- $f(E_2) = AE_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E_2 + 3.E_4$
- $f(E_3) = AE_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 2.E_1 + 6.E_3$
- $f(E_4) = AE_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 2.E_2 + 6.E_4$

D'après la propriété du cours, puisque (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\big(f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)\big) = \mathrm{Vect}(E_1 + 3.E_3, E_2 + 3.E_4, 2.E_1 + 6.E_3, 2.E_2 + 6.E_4) \\ &= \mathrm{Vect}(E_1 + 3.E_3, E_2 + 3.E_4) \end{aligned}$$

en supprimant les deux derniers vecteurs, redondants car colinéaires aux deux premiers.
On a ainsi obtenu une famille génératrice de deux vecteurs : comme $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$, il s'agit bien d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.

5. a) Par linéarité de f :

$$f(E_1 + 3.E_3) = f(E_1) + 3.f(E_3) = E_1 + 3.E_3 + 6.E_1 + 18.E_3 = 7.E_1 + 21.E_3 = 7.(E_1 + 3.E_3)$$

$$f(E_2 + 3.E_4) = f(E_2) + 3.f(E_4) = E_2 + 3.E_4 + 6.E_2 + 18.E_4 = 7.E_2 + 21.E_4 = 7.(E_2 + 3.E_4)$$

b) Faisons le bilan des valeurs propres déjà obtenues :

- On a vu que 0 est valeur propre de f, de sous-espace propre associé Ker(f) qui est de dimension 2.
- On vient de voir que $E_1 + 3.E_3$ et $E_2 + 3.E_4$ sont vecteurs propres de f pour la valeur propre 7 : comme ceux deux vecteurs propres sont non-colinéaires, ils forment une famille libre et par conséquent, $\dim E_7(f) \geqslant 2$.

Or d'après le théorème spectral : $\dim E_0(f) + \dim E_7(f) \leqslant 4$. Comme on vient de voir que $\dim E_0(f) + \dim E_7(f) \geqslant 4$, alors :
$\dim E_0(f) + \dim E_7(f) = 4$, et on en déduit que :

- Les réels 0 et 7 sont les seules valeurs propres de f : $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 7\}$.
- Les deux sous-espaces propres sont chacun de dimension 2, et f est diagonalisable puisque $\dim E_0(f) + \dim E_7(f) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

6. Généralisation : f est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On admet que f et A possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre associé.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vecteur propre de A pour la valeur propre λ : alors $X \neq 0_{2,1}$, ce qui est équivalent au fait que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

Alors : $\quad X\,{}^{\mathrm{t}}X = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2, non nulle parce que l'un des deux coefficients x^2 ou y^2 est non nul, et :

$$f(X\,{}^{\mathrm{t}}X) = AX\,{}^{\mathrm{t}}X = (AX)\,{}^{\mathrm{t}}X = \lambda.X\,{}^{\mathrm{t}}X$$

ce qui suffit à prouver que $X\,{}^{\mathrm{t}}X$ est vecteur propre de f pour la valeur propre λ.

b) Soit λ une valeur propre de f et M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vecteur propre de f associée à cette valeur propre.

D'après les règles du calcul matriciel : si on note C_1 et C_2 les colonnes de M, alors l'égalité $f(M) = \lambda.M \iff AM = \lambda.M$ est équivalente au fait que $AC_1 = \lambda.C_1$ et $AC_2 = \lambda.C_2$.

Il reste à bien dire que puisque M est non nulle comme vecteur propre, alors l'un de ses coefficients est non nul, donc l'une des deux colonnes C_1 et C_2 est non nulle et les relations précédentes prouvent que cette colonne non nulle, est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

On a bien démontré l'équivalence : $\quad \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, donc A et f ont les mêmes valeurs propres.