Correction maths Ecricome ECS 2022

proposée par J.Séb. DUPRAT
pour Major-Prépa

Exercice 1

1)a) on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*, t_k(x) = \frac{x^k}{k!}$$
$$= \frac{x}{k} \cdot \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= \frac{x}{k} t_{k-1}(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*, t_k(x) = \frac{x}{k} t_{k-1}(x)}$$

1)b) on a :

```
t=k/x*t
S=t+S
```

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\forall x \in \mathbb{R}^+, g_n(x) = f_n(x) - a$

La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que fonction polynomiale.

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{x^{k-1}}{k!}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$, d'où par le changement de variable $k' = k-1$:
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

d'où comme $0<1$, alors

$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ g_n''(x) > 0$

Donc la fonction g_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

et comme g_n est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}^+$, avec $\begin{cases} g_n(0) = 1-a \\ \lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty \end{cases}$

g_n définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[1-a, +\infty[$, d'après le théorème de la bijection:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists! \, u_n \in \mathbb{R}^+, \ g_n(u_n) = 0$, d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists! \, u_n \in \mathbb{R}^+, \ f_n(u_n) = a}$$

3)a) on a

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, et comme $x \in \mathbb{R}^+$

≥ 0

$\boxed{\text{Donc la suite } (f_n(x)) \text{ est croissante}}$.

De plus, comme la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge (série exponentielle) de somme e alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$ converge de limite e^x

i.e. $\boxed{\text{la suite } (f_n(x)) \text{ converge de limite } e^x}$

3) b)

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = a$ (cf 2)), on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_{n+1}(u_{n+1}) = a$

d'où: (car c'est vrai pour tout n)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; f_{n+1}(u_n) - f_{n+1}(u_{n+1}) = f_{n+1}(u_n) - a$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_n^k}{k!} - a$$

$$= \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{u_n^k}{k!} - a$$

$$= \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + f_n(u_n) - a \quad \text{or } \forall n \in \mathbb{N}^*, \; f_n(u_n) = a$$

$$= \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{or } \forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n \geq 0 \text{ cf 2)}$$

$$\geq 0$$

d'où:

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$

De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est str. croissante, d'après la contraposée de la définition d'une fonction str. croissante, on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n \geq u_{n+1}$$

<u>Rappel</u>: fonction f str croissante sur I: $\forall (a,b) \in I^2$, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$

contraposée de cette définition. $\forall (a,b) \in I^2$, $f(a) \geq f(b) \Rightarrow a \geq b$

donc ici, on applique la contraposée à $a = u_n$, $b = u_{n+1}$

$\boxed{\text{Ainsi, } (U_n) \text{ est décroissante}}$

3) c) Comme on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$ cf 2), donc (U_n) est minorée (par 0)
et comme (U_n) est décroissante (cf 3)b))
D'après le théorème de la limite monotone :

$\boxed{(U_n) \text{ converge}}$.

4) a) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $(f_n(x))$ est croissante
on peut écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in [\![n, +\infty[\![$, $f_n(x) \leq f_p(x)$, d'où pour $x = U_n$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in [\![n, +\infty[\![$, $f_n(U_n) \leq f_p(U_n)$ et comme pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $(f_p(x))$ converge de limite e^x cf. 3)a) :
par théorème de prolongement des inégalités ($p \to +\infty$)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(U_n) \leq e^{U_n}$ or par 2), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(U_n) = a$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a \leq e^{U_n}$ d'où en composant par $\ln$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(a) \leq U_n \quad (1)}$

4)b) On a

$\forall n \in \mathbb{N}^*, K \leq U_n$, d'où en composant par f_n $(n \in \mathbb{N})$ croissante sur $\mathbb{R}^+$ cf 3)a) :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(K) \leq f_n(U_n)$ i.e.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(K) \leq a$ et comme $(f_n(K))$ converge de limite e^K cf 3)a) par théorème de prolongement des inégalités : $(n \to +\infty)$:

$$\boxed{e^K \leq a}$$

4)c) Comme la suite (U_n) converge (cf 3)a)), on note ℓ $(\ell \in \mathbb{R})$ sa limite.

en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation ①, par théorème de prolongement des inégalités :

$$\ln(a) \leq \ell \quad ②$$

De plus, comme (U_n) est décroissante et converge, elle est minorée par sa limite : $\forall n \in \mathbb{N}, \ell \leq U_n$

Donc d'après 4)b), on en déduit que : $e^\ell \leq a$

d'où en composant cette relation par $\ln$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ell \leq P_n(a) \quad (3)$$

Donc d'après les relations (2) et (3), on en déduit :

$$\ell = P_n(a)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \lim_{n \to +\infty} u_n = P_n(a)}$$

5)a) Comme (u_n) est convergente (cf. 3)c))
on peut directement conclure :

$$\boxed{(u_n) \text{ est bornée.}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

5)b) La fonction exp est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à exp à l'ordre n entre 0 et u_n, on a :

$$\left| \exp(u_n) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(u_n - 0)^k}{k!} \exp^{(k)}(0) \right| \leq \sup_{[0,u_n]} \left| \exp^{(k)} \right| \times \frac{|u_n - 0|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (4)$$

et comme exp est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, d'après l'égalité de Taylor avec reste intégral appliquée à exp à l'ordre n entre 0 et u_n :

$$\exp(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_n^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + \int_0^{u_n} \frac{(u_n - t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t)\,dt \quad (5)$$

Or, par montée finie immédiate, on a :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exp^{(k)}(x) = \exp(x)$$

d'où pour $x = u_n$

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \exp^{(k)}(u_n) = e^{u_n}$$

et comme $e^0 < e^{u_n}$, alors $\sup\limits_{[0,u_n]} |\exp^{(k)}| = e^{u_n}$

Enfin, d'après les relations (4) et (5) et $\forall t \in \mathbb{R},\ \exp^{(n+1)}(t) = e^t$

$$\left| \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n - t)^n}{n!}\, dt \right| \leq e^{u_n} \frac{|u_n|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{i.e.}$$

$$|R_n(u_n)| \leq e^{u_n} \frac{|u_n|^{n+1}}{(n+1)!}$$

et d'après 5)a) :

$|u_n| \leq M$ donc, par croissance des fonctions en présence sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} |u_n|^{n+1} \leq M^{n+1} \\ e^{u_n} \leq e^M \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*\ |R_n(u_n)| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}}$$

5)c) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{R_n(u_n)}{1/n^2} = n^2 R_n(u_n)$$

d'après 5)b) et comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 \geq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |n^2 R_n(u_n)| \leq e^M \frac{n^2 M^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\leq e^M \frac{n^2 M^2 M^{n-1}}{(n+1)n(n-1)!}$$

Or $$e^M \frac{n^2 M^2 M^{n-1}}{(n+1)n(n-1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^M M^2 \frac{n^2 M^{n-1}}{n^2 (n-1)!}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} e^M M^2 \frac{M^{n-1}}{(n-1)!}$$

Or par négligeabilité usuelle, $M^{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o\,(n-1)!$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^M M^2 \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^M \frac{n^2 M^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

Ainsi, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 R_n(u_n)) = 0$ i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n(u_n)}{1/n^2} = 0$$

Ainsi, par caractérisation de la négligeabilité :

$$\boxed{R_n(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

6)a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
comme exp est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$,
D'après l'égalité de Taylor avec reste intégral appliquée à exp à l'ordre n entre 0 et x :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(x) + \int_0^x \exp^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

d'où comme en 5)b) :

$$= f_n(x) + R_n(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ e^x = f_n(x) + R_n(x)}$$

6)b) d'après 6)a), on a pour $x = u_n$:

$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{u_n} = f_n(u_n) + R_n(u_n)$, d'où comme $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(u_n) = a$
$R_n(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} a + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad 6$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a-\ln(a)}{e^x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}\right) + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a-\ln(a)}{e^x}\right)$ par algèbre des limites (6)

$= 0 + 0$ par croissance comparée

$= 0$

d'où $x+a-\ln(a) \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$, d'où en posant $x = U_n$ lorsque $x\to+\infty$, $n\to+\infty$.

$$U_n + a - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{U_n}) \quad (7)$$

et d'après (6) et (7) :

$$U_n + a - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{=} a + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$, d'où :

$$\boxed{U_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

7)a) Soit $n\in\mathbb{N}$

Comme exp est de classe C^{n+2} sur $\mathbb{R}$, d'après l'égalité de Taylor avec reste intégral appliquée à exp à l'ordre $n+1$ entre 0 et x : $(x\in\mathbb{R})$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}\exp^{(k)}(0) + \int_0^x \exp^{(k)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt$$

de même qu'en 5)b) et 6)a) ;

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ e^x = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt}$$

7)b) D'où pour $x = u_n$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{u_n} = f(u_n) + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^{u_n} e^t \frac{(u_n - t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt$$

$$= a + \frac{u_n^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(u_n) \quad (8)$$

⚠ $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(u_n) \neq \lim\limits_{n \to +\infty} R_{n+1}(u_n)$

On effectue alors le même raisonnement qu'à la question 5)b) mais en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$ appliquée à exp entre 0 et u_n.

On trouve alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_{n+1}(u_n)| \leq e^{u_n} \frac{|u_n|^{n+2}}{(n+2)!} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ e^{u_n} \leq e^M$$

donc :

$$\leq e^M \frac{|u_n|^{n+2}}{(n+2)!}$$

, d'où comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{|u_n|^{n+1}}{(n+1)!} > 0$

car $0 < \ln a \leq u_n$ comme $a > 1$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \left| \frac{R_{n+1}(u_n)}{u_n^{n+1}/(n+1)!} \right| \leq e^M \frac{u_n}{n+2}$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n+2} \times e^M = \ln(a) \times a \times e^M$ cf 4)c) :
$= 0$

par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{R_{n+1}(U_n)}{U_n^{n+1}/(n+1)!} \right) = 0$

d'où par caractérisation de la négligeabilité :

$$R_{n+1}(U_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{U_n^{n+1}}{(n+1)!}\right) \quad (9)$$

Et donc, d'après (8) et (9) :

$$\boxed{e^{U_n} \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{U_n^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(\frac{U_n^{n+1}}{(n+1)!}\right)}$$

7)c) Comme d'après 4)c), $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ln(a)$.

⚠ On ne peut pas procéder par équivalences successives

car le passage de $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(a)$ à $U_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(a)^{n+1}$

est interdit comme la fonction $x \mapsto x^{n+1}$ dépend de n et $n \to +\infty$ ici.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{U_n}{\ln(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to 1} x^{n+1} = 1$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{U_n}{\ln(a)}\right)^{n+1} = 1$, donc $U_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (\ln(a))^{n+1}$, d'où :

$$\boxed{\frac{U_n^{n+1}}{(n+1)!} \sim \frac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Comme, par négligabilité usuelle, on a

$$(\ln(a))^{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} o\,(n+1)!$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln(a))^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n^{n+1}}{(n+1)!} = 0}$

7) d) d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{U_n^{n+1}}{(n+1)!}}{1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n^{n+1}}{(n+1)!} \times \left(\dfrac{1}{-a}\right) = 0 \times \left(-\dfrac{1}{a}\right) = 0$

donc $\dfrac{U_n^{n+1}}{-a(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ (10)

Or, d'après 4)c) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ln(a)$, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n - \ln(a)}{1} = 0 \text{, d'où}$$

$$U_n - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \quad (11)$$

Donc d'après (10) et (11)

$$U_n - \frac{U_n^{n+1}}{a(n+1)} - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \text{, d'où :}$$

$$U_n - \ln(a) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{U_n^{n+1}}{a(n+1)} + o(1)$$

Donc $U_n - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{U_n^{n+1}}{a(n+1)!}$ et d'après 7)c) :

$$\boxed{U_n - \ln(a) \sim \frac{(\ln(a))^{n+1}}{a(n+1)!}}$$

Exercice 2

1)a) λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) est valeur propre de f ssi λ est valeur propre de A comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, avec $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

ssi $\exists X \neq 0 \ (A - \lambda I)X = 0$

Or $(A-\lambda I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} X = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix} X = 0 \quad (L_1 \leftrightarrow L_3 \leftrightarrow L_2)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ 0 & 1+4\lambda & -1-2\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix} X = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ 0 & 9 & -\lambda^2-2\lambda-1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix} X = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3$$

$$(A-\lambda I)X=0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2-\lambda \\ 0 & 9 & -\lambda^2-2\lambda-1 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} X=0 \quad (1) \quad (L_3 \leftarrow 9L_3-(2-\lambda)L_2)$$

Avec $P(\lambda) = -(2-\lambda)\times(-\lambda^2-2\lambda-1)$

$$= -\lambda^3+3\lambda+2$$

$$= (\lambda+1)^2(\lambda-2)$$

Donc λ est valeur propre de f ssi $\lambda \in \{-1, 2\}$

. Pour $\lambda=-1$, en posant $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(1) devient: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \iff \begin{cases} x+4y-z=0 \\ 9y=0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$$

$$\iff X=\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $E_{-1}(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, d'où comme $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3)$

$E_{-1}(f)=\mathrm{Vect}(e_1+e_3)$.

• Pour $\lambda = 2$, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

① devient : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x + 4y - 4z = 0 \\ 9y - 9z = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x + 4y - 4y = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ d'où $E_2(f) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3)$

$$\boxed{\text{Ainsi, } Sp(f) \subset \{-1, 2\} \text{ et } \begin{cases} E_{-1}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3) \\ E_2(f) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3) \end{cases}}$$

1)b) Comme f est diagonalisable, A est diagonalisable.

Donc il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$

et on a $Tr(A) = Tr(D)$

$0 = 1 + \mu$ d'où $\mu = -1$

et comme A est diagonalisable : $\dim(E_{-1}(A)) + \dim(E_2(A)) = \dim(\mathbb{R}^3)$ avec $\begin{cases} \dim(E_{-1}(A)) = 1 \\ \dim(E_2(A)) = 1 \end{cases}$ d'après 1a)

$$2 = 3$$

Contradiction

$\boxed{\text{On en déduit donc que } f \text{ n'est pas diagonalisable}}$

2) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f+id)$

on a donc $(f+id)(x) = 0$ Or, comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $id \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, Alors $(f+id) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, d'où en composant par $f+id$:

$$(f+id)^2(x) = (f+id)(0)$$
$$= 0$$

donc $x \in \mathrm{Ker}((f+id)^2)$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f+id) \subset \mathrm{Ker}((f+id)^2)}$

On veut mq $\mathrm{Ker}(f+id)^2 \not\subset \mathrm{Ker}(f+id)$

i.e. mq $\exists x_0 \in \mathrm{Ker}(f+id)^2$, $x_0 \notin \mathrm{Ker}(f+id)$

↳ Donc il faut trouver un contre exemple qui fonctionne.

Donc on cherche un $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $(A+I)^2 X_0 = 0$

mais $(A+I)X_0 \neq 0$

$(A+I)^2 X_0 = 0 \iff X_0 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$ après calculs

donc $x_0 = (x, 0, z)$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$

on peut donc proposer $x_0 = (1,0,0)$

et on a bien $(A+I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$

Soit $x_0 = (1,0,0)$

d'où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $(A+I)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= 0$

donc $(f+id)^2((1,0,0)) = 0$

d'où $(1,0,0) \in \operatorname{Ker}(f+id)^2$

donc $\exists x_0 \in \operatorname{Ker}(f+id)^2$.

De plus, $(A+I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $(f+id)((1,0,0)) \neq 0$ donc $(1,0,0) \notin \operatorname{Ker}(f+id)$.

$\neq 0$

Donc $\exists x_0 \in \mathrm{Ker}(f+id)^2$, $x_0 \notin \mathrm{Ker}(f+id)$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(f+id) \neq \mathrm{Ker}(f+id)^2}$

3) On a d'après 2) :

$\dim(\mathrm{Ker}(f-2id)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f+id)^2)$

$\dim(\mathrm{Ker}(f-2id)) \neq \dim(\mathrm{Ker}(f+id)^2)$

donc $\dim(\mathrm{Ker}(f-2id)) < \dim(\mathrm{Ker}(f+id)^2)$

Et comme $(f+id)^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $\mathrm{Ker}(f+id)^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, d'où : $\mathrm{Ker}(f+id)^2 \subset \mathbb{R}^3$

de même, comme $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ mais $(f+id)^2(1,1,1) \neq 0$

donc $(1,1,1) \notin \mathrm{Ker}(f+id)^2$

Alors $\mathbb{R}^3 \neq \mathrm{Ker}(f+id)^2$

donc $\dim(\mathrm{Ker}(f+id)^2) < \dim(\mathbb{R}^3)$,

d'où $\dim(\mathrm{Ker}(f-2id)) < \dim(\mathrm{Ker}(f+id)^2) < \dim(\mathbb{R}^3)$

Or comme $\dim \mathrm{Ker}(f-2id) = 1$ d'après 1),

$1 < \dim \mathrm{Ker}(f+id)^2 < 3$

la dimension étant forcément un entier, on en déduit que : $\dim \mathrm{Ker}(f+id)^2 = 2$

donc $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f-2id)) + \dim(\ker(f+id)^2)$

Soit $x \in \ker(f-2id) \cap \ker(f+id)^2$

$$f(x) = 2x \quad \text{et} \quad (f+id)^2(x) = 0$$

d'où en composant par f :

$$\begin{cases} f^2(x) + 2f(x) + x = 0 \\ f(x) = 2x \\ f^2(x) = f(2x) = 2f(x) = 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x \\ f^2(x) = 4x \\ 4x + 2 \times 2x + x = 0 \end{cases}$$

donc $9x = 0$

donc $x = 0$

$x \in \{0\}$

d'où $\ker(f-2id) \cap \ker(f+id)^2 \subset \{0\}$

et comme $(f-2id) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $(f+id) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

donc $\ker(f-2id)$ et $\ker(f+id)^2$ sont 2 sous espaces vectoriels

Donc $\ker(f-2id) \cap \ker(f+id)^2$ est un sous-espace vectoriel

Alors $\{0\} \subset \ker(f-2id) \cap \ker(f+id)^2$

Donc $\ker(f-2id) \cap \ker(f+id)^2 = \{0\}$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f-2id) \oplus \operatorname{Ker}(f+id)^2}$$

4) Soit $x \in F$

$f(x) - 2x = 0$ d'où

$$\begin{aligned}(f-2id)(f(x)) &= f^2(x) - 2f(x) \\ &= f(f(x) - 2x) \\ &= f(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $f(x) \in F$

donc $\forall x \in F,\ f(x) \in F$

i.e. $f(F) \subset F$

$\boxed{F \text{ est stable par } f}$.

Soit $x \in G$

d'où $f^2(x) + 2f(x) + x = 0$

$$\begin{aligned}\text{or } (f+id)^2(f(x)) &= f^3 + 2f^2(x) + f(x) \\ &= f(f^2(x) + 2f(x) + x) \\ &= f(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

donc, de même, $\boxed{G \text{ est stable par } f}$.

5) a)

On a

$$(A+I)^2(A-2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} (A-2I)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

donc $(X+1)^2(X-2)$ est un polynôme annulateur de A, donc de f

d'où $P(f) = 0$ i.e.

$P(f)$ est l'endomorphisme nul

6) Comme π_1 et π_2 sont des <u>polynômes d'endomorphismes</u>, ils commutent.

7) a) On a

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \left(\frac{1}{9}(f+id)^2\right) \circ \left(-\frac{1}{9}(f+4id) \circ (f-2id)\right)$$

$$= -\frac{1}{18}(f+id)^2 \circ (f+4id) \circ (f-2id)$$

$$= -\frac{1}{18}(f+id)^2 \circ (f-2id) \circ (f+4id)$$

$$= -\frac{1}{18} P(f) \circ f+4id \quad \text{Or } P(f) = 0 \text{ d'après 5)}$$

$$= 0$$

Donc $\boxed{\pi_2 \circ \pi_1 = 0}$

7)b) On a $\pi_2 \circ \pi_1 = 0$ d'après 7)a)

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\pi_1(x) \in Im(\pi_1)$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $(\pi_2 \circ \pi_1)(x) = 0$, d'où

$\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\pi_2(\pi_1(x)) = 0$, donc

$\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\pi_1(x) \in Ker(\pi_2)$

Alors, $Im(\pi_1) \subset Ker(\pi_2)$

8) a) on a

$$\pi_1 = \frac{1}{9}(f^2 + 2f + id)$$

$$\pi_2 = -\frac{1}{9}(f^2 + 2f - 8id)$$

d'où $\pi_1 + \pi_2 = \frac{1}{9}(f^2 + 2f + id - f^2 - 2f + 8id)$

$$= \frac{9}{9} id$$

$$= id$$

Donc $\pi_1 + \pi_2 = id$

9) Soit $x \in Ker(\pi_2)$

On a $\pi_2(x)=0$ et $\pi_1(x)+\pi_2(x)=x$, donc :

$\pi_1(x)=x$

Or comme $\pi_1(x) \in Im(\pi_1)$

alors $x \in Im(\pi_1)$

Donc $Ker(\pi_2) \subset Im(\pi_1)$

Ainsi, d'après 7)b), et comme π_1 et π_2 jouent des rôles symétriques :

$$\boxed{\begin{array}{l} Ker(\pi_1)=Im(\pi_2) \\ Ker(\pi_2)=Im(\pi_1) \end{array}}$$

10) d'après 7)a) : $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$

d'après 8)a) : $\pi_1+\pi_2=id$, d'où en composant par π_1 puis par π_2 :

$\pi_1 \circ \pi_1 + \pi_2 \circ \pi_1 = \pi_1$ or d'après 7)a), $\pi_2 \circ \pi_1 = 0$

donc $\pi_1^2=\pi_1$

même raisonnement pour π_2 et comme $\begin{cases} \pi_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \\ \pi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \end{cases}$:

$$\boxed{\text{Ainsi, } \pi_1 \text{ et } \pi_2 \text{ sont deux projecteurs}}$$

11)

D'après 3)

$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, d'où

$\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\exists! (x_1, x_2) \in F \times G$, $x = x_1 + x_2$

D'où $\pi_2(x) = \pi_2(x_1) + \pi_2(x_2)$ d'où

$$= -\frac{1}{9}(f+4id)\circ(f-2id)(x_1) - \frac{1}{9}(f+4id)\circ(f-2id)(x_2)$$

or $x_1 \in F$

$$= -\frac{1}{9}(f+4id)\circ(f-2id)(x_2)$$

$$= -\frac{1}{9}(f^2+2f-8id)(x_2)$$

$$= -\frac{1}{9}(f^2+2f+id-9id)(x_2)$$

$$= -\frac{1}{9}\left((f^2+id)(x_2) - 9x_2\right) \text{ or } x_2 \in G$$

$$= x_2$$

Donc par définition, π_2 est le projecteur sur G parallèlement à F

π_1 est donc le projecteur sur F parallèlement à G

12)

Comme $g = 2\pi_1 - \pi_2$

$$= \frac{2}{9}(f+id)^2 + \frac{1}{9}(f+id)\circ(f-2id)$$

et comme $h = f - g$

$$= f - \frac{2}{9}(f+id)^2 - \frac{1}{9}(f+id)\circ(f-2id)$$

$\boxed{\text{On en déduit que } g \text{ et } h \text{ sont des polynômes de l'endomorphisme } f}$

13) on a

$$g = \frac{2}{9}f^2 + \frac{4}{9}f + \frac{2}{9}id + \frac{1}{9}f^2 + \frac{2}{9}f - \frac{8}{9}id$$

$$= \frac{1}{9}(3f^2 + 6f - 6id)$$

Soit x_1 le vecteur propre de f associé à la valeur propre -1

$$g(x_1) = \frac{1}{9}(3f^2(x_1) + 6f(x_1) - 6x_1)$$

$$= \frac{1}{9}(+3x_1 - 6x_1 - 6x_1)$$

$$= -\frac{9}{9}x_1$$

$$= -x_1$$

De même, $g(x_2) = 2x_2$. avec x_2 vecteur propre de f associé à la valeur propre 2

Comme $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$

On en déduit que -1 et 2 sont valeurs propres de g.

↳ Pour chercher la 3ème valeur propre, son vecteur propre et son sous espace propre

Comme on sait qu'il s'agit de -1 car $Tr\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$ et que $-1+2+\mu=0$

$\mu = -1$

Son vecteur propre x_1 se détermine via l'équation $x_1 = (y_1, y_2, y_3)$

$$g(x_1) = -x_1 \iff \frac{1}{9}\left(f^2(x_1) + 6f(x_1) - 6x_1\right) = -x$$

$$\iff \frac{1}{9}\left(A^2\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + 6A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \dots$$

$E_{-1}(g)$

↳ on trouve un sous-espace propre de dimension 2

puis de même pour la valeur propre 2

$g(x_2) = 2x_2 \iff \dots$

$E_2(g)$

↳ on trouve un sous-espace propre de dimension 1

D'où comme $\dim(E_{-1}(g)) + \dim(E_2(g)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

Alors g est diagonalisable

et donc il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de g telle que $Mat_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

14) On a

$$(f-2id)\circ\pi_1 = (f-2id)\circ\frac{1}{9}(f+id)^2$$

$$= \frac{1}{9}(f-2id)\circ(f^2+2f+id)$$

$$= \frac{1}{9}(f^3+2f^2+f-2f^2-4f-2id)$$

et

$$= \frac{1}{9}(f^3-3f-2id)$$

$$(f+id)\circ\pi_2 = (f+id)\circ\left(-\frac{1}{9}(f+4id)\circ(f-2id)\right)$$

$$= -\frac{1}{9}(f+id)\circ(f^2-2f+4f-8id)$$

$$= -\frac{1}{9}(f+id)\circ(f^2+2f-8id)$$

$$= -\frac{1}{9}(f^3+2f^2-8f+f^2+2f-8id)$$

$$= -\frac{1}{9}(f^3+3f^2-6f-8id)$$

d'où

$$(f-2id)\circ\pi_1+(f+id)\circ\pi_2 = \frac{1}{9}(-3f^2+3f+6id)$$

$$= \frac{1}{9}(-3f^2-6f+6id+9f)$$

$$= f-\frac{1}{9}(3f^2+6f-6id)$$ d'où d'après l'expression de g trouvée en 13) :

$$= f-g$$

$$= h$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } h=(f-2id)\circ\pi_1+(f+id)\circ\pi_2}$$

Donc

$$h^2 = \left(\left((f-2id)\circ\pi_1 + (f+id)\circ\pi_2\right)\circ\left((f-2id)\circ\pi_1 + (f+id)\circ\pi_2\right)\right)$$

Comme les endomorphismes en présence commutent : (cf 6)

$$= (f-2id)^2\circ\pi_1^2 + (f+id)(f-2id)\circ\pi_1\circ\pi_2$$

$$+ (f-2id)\circ(f+id)\circ\pi_1\circ\pi_2 + (f+id)^2\circ\pi_2^2$$

or $\pi_1\circ\pi_2 = 0$ (cf 7(a)) et π_1 et π_2 sont des projecteurs (cf 4) :

$$= (f-2id)^2\circ\pi_1 + (f+id)^2\circ\pi_2$$

et comme $P(f) = (f+id)^2(f-2id) = 0$ (cf. 5) ;

$$= \frac{1}{9}P(f)\circ(f-2id) - \frac{1}{9}P(f)\circ(f+4id)$$

$$= 0$$

Comme $h^2 = 0$, et $h \in \mathcal{L}(E)$

h est donc nilpotent.

$$\boxed{h^2 = 0}$$

15) comme on a $h = f - g$

donc $f = g + h$

et comme g est diagonalisable (cf 13))
et h est nilpotent (cf 14))

et enfin, comme g et h sont des polynômes de f (cf 12))
g et h commutent.

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ s'écrit bien sous la forme de la somme de deux endomorphismes qui commutent, dont l'un est diagonalisable, l'autre est nilpotent.}}$$

Problème

Partie I

1) a) La fonction $x \mapsto \frac{\mu - x}{a}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$

et comme $-\exp$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, alors $x \mapsto -e^{\frac{\mu - x}{a}}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions de classe C^2 sur des intervalles adéquats, à valeur dans $\mathbb{R}$. Et comme $\exp$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ la fonction $F_{\mu,a} : x \mapsto e^{-e^{\frac{\mu - x}{a}}}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions de classe C^2 sur des intervalles adéquats.

$F_{\mu,a}$ est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

Donc $F_{\mu,a}$ est deux fois dérivables, et on pose $F'_{\mu,a} = f_{\mu,a}$

d'où : $F''_{\mu,a} = f'_{\mu,a}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'_{\mu,a}(x) = \frac{1}{a} e^{\frac{\mu-x}{a}} \times e^{-e^{\frac{\mu-x}{a}}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{\mu,a}(x) = \frac{1}{a} \times e^{\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F''_{\mu,a}(x) = \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a} e^{\frac{\mu-x}{a}}\right) \times \frac{1}{a} e^{\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'_{\mu,a}(x) = \frac{1}{a^2}\left(e^{2\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}} - e^{\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}}\right)}$$

1) b) On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'_{\mu,a}(x) \geq 0 \iff e^{\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}} \leq e^{2\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}}$$

d'où par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\iff \frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}} \leq 2\frac{\mu-x}{a} - e^{\frac{\mu-x}{a}}$$

$$\iff 0 \leq \frac{\mu-x}{a}$$

$$\iff -\frac{\mu}{a} \leq -\frac{x}{a}$$

$$\iff x \leq \frac{\mu}{a} \times a \iff x \leq \mu$$

Donc $f'_{\mu,a}(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty, \mu]$

comme $F''_{\mu,a} = f_{\mu,a}$, on en déduit que

$$\boxed{\begin{array}{l} F_{\mu,a} \text{ est convexe sur }]-\infty, \mu] \\ F_{\mu,a} \text{ est concave sur } [\mu, +\infty[\\ \quad \text{avec } \mu \text{ le point d'inflexion de } F_{\mu,a} \end{array}}$$

Et par caractérisation des fonctions convexes et concaves sur un intervalle, on en déduit que

$F'_{\mu,a} = f_{\mu,a}$ est croissante sur $]-\infty, \mu]$
et décroissante sur $[\mu, +\infty[$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mu - x}{a} = -\infty$ car $a > 0$ et $\begin{cases} \lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0 \\ \lim\limits_{y \to +\infty} e^y = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\mu - x}{a} = +\infty$

donc $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (f_{\mu,a}(x)) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f_{\mu,a}(x) = 0 \end{cases}$

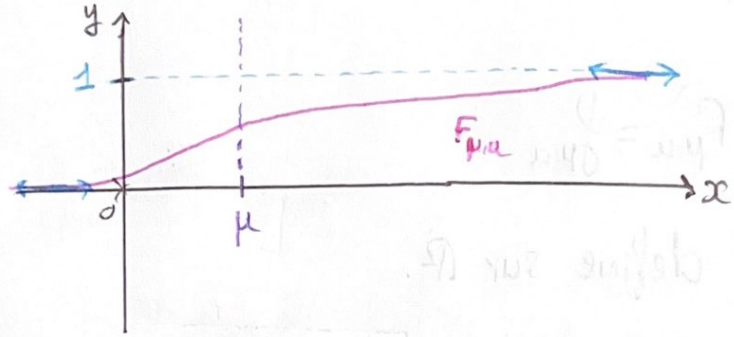
On en déduit alors que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_{\mu,a}(x) \geq 0$

Donc $\boxed{F_{\mu,a} \text{ est (strictement) croissante sur } \mathbb{R}}$.

et $\lim_{y\to\infty} e^{y} = 1$

d'où $\lim_{y\to+\infty} F_{\mu,a} = 1$

Allure de la courbe :



1) c)

Comme $F_{\mu,a}$ est de classe C^2, donc continue sur $\mathbb{R}$ (cf 1/a))

et est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (cf 1/b))

avec $\lim_{x\to-\infty} F_{\mu,a}(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} F_{\mu,a}(x) = 1$

elle définit une bijection de

$\mathbb{R}$ vers $]0,1[= I$

donc $\boxed{I =]0,1[}$.

On note alors $G = F_{0,1}^{-1}$

$\forall y \in]0,1[$, $y = F_{0,1}(x) \iff y = e^{-e^{-x}}$, d'où en composant par ln

$\iff \ln(y) = -e^{-x}$

$\iff -\ln(y) = e^{-x}$, de même :

$\iff \ln(-\ln(y)) = -x$

$\iff x = -\ln(-\ln(y))$

$$\boxed{\text{Donc } G : x \mapsto -\ln(-\ln(x)) \text{ est la bijection réciproque de } F_{0,1}}$$

2)

On a $F'_{\mu,a} = f_{\mu,a}$ ...

- $f_{\mu,a}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- Comme $F_{\mu,a}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, alors $f_{\mu,a}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- On a bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{\mu,a}(x) \geq 0$ (cf 1a))
- Enfin,

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^x f_{\mu,a}(t)\,dt = \left[F_{\mu,a}(t)\right]_0^x$

$= F_{\mu,a}(x) - F_{\mu,a}(0)$.

et d'après 1)b) $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{\mu,a}(x) = 1$

d'où par passage à la limite ($x \to +\infty$) :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f_{\mu,a}(t)\,dt = 1 - F_{\mu,a}(0)$$

Donc la fonction $x \mapsto \int_0^x f_{\mu,a}(t)\,dt$ admet une limite finie

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{\mu,a}(t)\,dt$ converge par définition et vaut $1 - F_{\mu,a}(0)$

De même

$\forall x \in \mathbb{R}^-$, $\int_x^0 f_{\mu,a}(t)\,dt = F_{\mu,a}(0) - F_{\mu,a}(x)$

et $\lim_{x \to -\infty} F_{\mu,a}(x) = 0$

(cf 1b)

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^0 f_{\mu,a}(t)\,dt = F_{\mu,a}(0)$$

donc, de même, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f_{\mu,a}(t)\,dt$ converge par définition et vaut $F_{\mu,a}(0)$

Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(t)\,dt$ converge, et d'après la relation de Chasles :

et vaut $F_{\mu,a}(0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,a}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f_{\mu,a}(t)\,dt + \int_{-\infty}^0 f_{\mu,a}(t)\,dt$$

$= 1$ et comme $F_{\mu,a} = f_{\mu,a}$ (cf 1a))

$$\boxed{\text{Ainsi, } F_{\mu,a} \text{ est la fonction de répartition et } f_{\mu,a} \text{ est sa densité de probabilité}}$$

3) On a $Z \rightsquigarrow \mathcal{G}(\mu', a')$ avec $\mu' = 0$ et $a' = 1$

donc $Z \rightsquigarrow \mathcal{G}(0,1)$, d'où, en notant F_X la fonction de répartition de X

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(X \leq x)$

$= P(aZ + \mu \leq x)$ or comme $a > 0$

$= P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{a}\right)$

$= F_Z\left(\frac{x-\mu}{a}\right)$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = e^{-e^{z}}$

$= e^{-e^{\frac{x-\mu}{a}}}$

$= F_{\mu,a}(x)$

La fonction de répartition caractérisant la loi, on en déduit alors:

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{G}(\mu, a)}$$

4)a) On a $U \rightsquigarrow \mathcal{U}([0,1])$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$

d'où d'après 1)c) :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = P(Y \leq x)$

$= P(G(U) \leq x)$ et comme $F_{0,1}$ est croissante (cf 1)b)) et sa bijection réciproque G l'est également, d'où, en composant par $F_{0,1}$:

$= P(F_{0,1}(G(U)) \leq F_{0,1}(x))$

$= P(U \leq F_{0,1}(x))$

$= F_{0,1}(x)$

La fonction de répartition caractérisant la loi :

$$\boxed{Y \sim \mathcal{C}_g(0,1)}$$

Ex 1

4)b)

```
function g = gumbel(mu,a)
    u = rand()
    y = -log(-log(u))
    g = a*y+mu        <- d'après 3)
endfunction
```

5)a)

La fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont.

De plus, comme $\lim_{t\to 0} e^{-t} = 1$ (car $\lim_{y\to 0} e^{y} = 1$)

alors $e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$, d'où

$$e^{-t}\ln(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$$

$$-e^{-t}\ln(t) \underset{0}{\sim} -\ln(t)$$

↳ on montre rapidement que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge :

$\forall y \in]0,1]$, $\int_y^1 \ln(t)\,dt = \left[t\ln(t) - t\right]_y^1 = -1 + y - y\ln(y)$

et $\lim\limits_{y \to 0} -1+y = -1$ et $\ln(y) \underset{y \to 0}{=} o\left(\frac{1}{y}\right)$ (négligeabilité usuelle)

(22)

donc $\lim\limits_{y \to 0} \ln(y) \cdot y = 0$

donc par passage à la limite : $\lim\limits_{y \to 0} \int_y^1 \ln(t) = -1$

donc $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge

comme les fonctions $t \mapsto -e^{-t}\ln(t)$ et $t \mapsto -\ln(t)$ sont continues et positives sur $]0,1]$

et comme l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge (cf. supra)

donc l'intégrale $\int_0^1 -\ln(t)\,dt$ également,

par les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives :

l'intégrale $-\int_0^1 e^{-t}\ln(t)\,dt$ converge

donc l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}\ln(t)\,dt$ converge.

De plus comme $\ln$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln''(t) \leq 0$

Alors $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$

donc sa courbe représentative se situe en dessous de toutes ses tangentes, en particulier sa tangente au point $y=$:

$$y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1)$$
$$= x-1.$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\ln(x) \leq x-1 \leq x$, d'où exp étant positive sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ e^{-t}\ln(t) \leq e^{-t}t$$

or par négligeabilité usuelle : $t^3 \underset{t\to+\infty}{=} o(e^t)$

donc $e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^3}\right)$, d'où

$$e^{-t}t \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Donc, comme $\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+^* \ e^{-t}\ln(t) \leq e^{-t}t \\ e^{-t}t \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) \end{cases}$,

comme les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, $t \mapsto te^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t}\ln(t)$

Sont continues et positives sur $[1,+\infty[$

et comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge

(intégrale de Riemann)

D'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge

donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$ converge

et comme on a montré que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t) e^{-t} dt$ converge :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt \text{ converge}}.$$

5)b) Comme la fonction $u \mapsto e^{-u}$ est de classe C^1 et bijective sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,1[$

à l'aide du changement de variable

$$\begin{array}{l} t = e^{-u} \\ dt = -e^{-u} \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} u = -\ln(t) \\ du = -\frac{1}{t} dt \end{array} \right), \text{ on a :}$$

les intégrales $\int_0^{+\infty} \ln(u) e^{-u} du$ et $\int_0^1 \ln(-\ln(t)) \times \frac{t}{-t} dt = -\int_0^1 \ln(-\ln(t)) dt$

Sont de même nature, et comme il y a convergence en 5a) :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^1 \ln(-\ln(t))\,dt \text{ converge.}}$$

5)d) d'après 3) $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(\mu,a) \Longleftrightarrow Z \rightsquigarrow \mathcal{G}(0,1)$

et

$\forall t \in \mathbb{R},\ t f_{0,1}(t) = t e^{-t} \times e^{-e^{-t}}$.

Comme la fonction $f_{0,1} : t \mapsto e^{-e^{-t}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0,1[$ (cf 1))

On effectue le changement de variable $\left| \begin{array}{l} u = e^{-e^{-t}} \\ du = e^{-t} \times e^{-e^{-t}} dt \end{array} \right.$

et $\left(\begin{array}{l} t = -\ln(-\ln(u)) \\ dt = \frac{1}{u \ln(u)} du \end{array} \right)$

les intégrales

$$-\int_0^1 \ln(-\ln(u))\,du \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t} \times e^{-e^{-t}} dt \text{ sont de même nature}$$

et comme il y a convergence de l'intégrale définissant γ (cf 5)b)),

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t} \times e^{-e^{-t}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{0,1}(t)\,dt$$

Or, comme $\forall t \in \mathbb{R}^-$, $|t f_{0,1}(t)| = -t f_{0,1}(t)$

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|t f_{0,1}(t)| = t f_{0,1}(t)$

donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t f_{0,1}(t)| = t f_{0,1}(t)$

et comme l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{0,1}(t)\, dt$ converge,

alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t f_{0,1}(t)|\, dt$ converge,

donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{0,1}(t)$ converge absolument

$$\boxed{\text{Donc } Z \text{ admet une espérance, et : } \mathbb{E}(Z) = \gamma.}$$

5) d) comme $X = aZ + \mu$ et comme Z admet une espérance alors X admet une espérance et par linéarité de l'espérance :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = a\mathbb{E}(Z) + \mu = a\gamma + \mu}$$

6)a)

Comme $Z \rightsquigarrow \mathcal{E}(0,1)$ et f_Z est une densité de Z

alors par transformation affine ; $-Z$ est une variable à densité et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{-Z}(x) = \frac{1}{|-1|} f_Z\left(\frac{x-0}{-1}\right)$$

$$= f_Z(-x)$$

$$= e^{x} \times e^{-e^{x}}$$

$$\boxed{g = f_{-Z} : x \mapsto e^{x} \times e^{-e^{x}} \text{ est une densité de la variable aléatoire } -Z}$$

6)b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$\forall y \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^y u e^{-(e^{-x}+1)u}\, du = \int_0^y u \times e^{-(e^{-x}+1)u}\, du.$$

Comme les fonctions $u \mapsto \frac{e^{-(e^{-x}+1)u}}{-(e^{-x}+1)}$ et $u \mapsto u$

sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, donc pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, sur $[0,y]$

on a, par une intégration par parties :

- on dérive $u \mapsto u$ en $u \mapsto 1$
- on intègre $u \mapsto e^{-(e^{-x}+1)u}$ en $u \mapsto \frac{e^{-(e^{-x}+1)u}}{-(e^{-x}+1)}$

D'où :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \int_0^y u e^{-(e^{-x}+1)u}\,du = \left[\frac{u e^{-(e^{-x}+1)u}}{e^{-x}+1}\right]_0^y + \frac{1}{e^{-x}+1}\int_0^y e^{-(e^{-x}+1)u}\,du$$

$$= \frac{e^{-(e^{-x}+1)y}}{e^{-x}+1} - 0 + \frac{1}{e^{-x}+1}\left[-\frac{e^{-(e^{-x}+1)u}}{e^{-x}+1}\right]_0^y$$

$$= \frac{e^{-(e^{-x}+1)y}}{e^{-x}+1} + \frac{1}{e^{-x}+1}\left(-\frac{e^{-(e^{-x}+1)y}}{e^{-x}+1} + \frac{1}{e^{-x}+1}\right)$$

$$= \frac{e^{-(e^{-x}+1)y}}{e^{-x}+1} + \frac{1}{(e^{-x}+1)^2}\left(1 - e^{-(e^{-x}+1)y}\right)$$

Or $\lim\limits_{y\to+\infty} -(e^{-x}+y)y = -\infty$ et $\lim\limits_{z\to-\infty} e^z = 0$

donc $\lim\limits_{y\to+\infty} e^{-(e^{-x}+1)y} = 0$

D'où par passage à la limite $(y\to+\infty)$:

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^y u e^{-(e^{-x}+1)u}\,du = \frac{1}{(e^{-x}+1)^2}$$

$$\boxed{\text{Donc pour tout } x\in\mathbb{R} \text{ l'intégrale converge et } \int_0^{+\infty} u e^{-(e^{-x}+1)u}\,du = \frac{1}{(e^{-x}+1)^2}}$$

6)c) Comme la fonction exp est de classe C^1 (26)
et définit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$,
à l'aide du changement de variable $\left| \begin{array}{l} u = e^t \\ du = e^t dt \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} t = \ln(u) \\ dt = \frac{du}{u} \end{array} \right.$

On sait que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)\, g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-x} \times e^{-e^{t-x}} \times e^{t} \times e^{-e^{t}}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t-x} \times e^{-e^{t-x}} \times e^{-e^{t}}\, dt$$

et

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{u^2}{e^x} \times e^{-u \times e^{-x}} \times e^{-u} \frac{du}{u} = \int_{0}^{+\infty} \frac{u}{e^x} e^{-u \times e^{-x}} \times e^{-u}\, du$$

sont de même nature.

$$= e^{-x} \int_{0}^{+\infty} u e^{-u \times e^{-x} - u}\, du$$

$$= e^{-x} \int_{0}^{+\infty} u e^{-u(1+e^{-x})}\, du$$

or comme l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} u e^{-u(e^{-x}+1)}\, du$ converge, alors :

$$\boxed{\text{l'integrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)\,g(t)\,dt \text{ converge.}}$$

(et il y a égalité entre les intégrales)

6) d) Comme les variables Y et Z sont independantes, par le lemme des coalitions Y et $-Z$ sont indépendantes.

de densité respectives $f_{0,1}$ et g

Or comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{0,1}(x) = e^{-x} \times e^{-e^{-x}}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f_{0,1}(x) \leq 1$

alors f_Z est bornée,

donc la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)\,g(t)\,dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points, donc par convolution, $Y-Z$ est une variable aléatoire à densité, de densité:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y-Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0,1}(x-t)\,g(t)\,dt$$

d'où d'après 6)c) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y-Z}(x) = e^{-x}\int_0^{+\infty} u\, e^{-u(e^{-x}-1)}\,du \quad \text{et d'après 6)b)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y-Z}(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

$$\boxed{\text{donc } Y-Z \text{ est une variable aléatoire à densité, de densité } f_{Y-Z} : x \mapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}$$

<u>Partie II</u> → Erreur, l'énoncé a oublié de définir n dans cette partie (n n'est pas fixé), on prend l'initiative de le faire.

7) a) On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall \varepsilon > 0 \quad \begin{cases} |\alpha V_n(\omega) - \alpha V(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |\beta W_n(\omega) - \beta W(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow |\alpha V_n(\omega) - \alpha V(\omega)| + |\beta W_n(\omega) - \beta W(\omega)| < \varepsilon$$

Or par l'inégalité triangulaire :

$$\Rightarrow |\alpha V_n(\omega) + \beta W_n(\omega) - \alpha V(\omega) - \beta W(\omega)| < \varepsilon$$

d'où, par contraposition :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall \varepsilon > 0,\ |\alpha V_n(\omega) + \beta W_n(\omega) - \alpha V(\omega) - \beta W(\omega)| \geq \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \alpha V_n(\omega) - \alpha V(\omega) \geq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{ou} \\ \beta W_n(\omega) - \beta W(\omega) \geq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \quad \left[|\alpha V_n + \beta W_n - \alpha V - \beta W| \geq \varepsilon\right] \subset \left[|\alpha V_n - \alpha V| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[|\beta W_n - \beta W| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

d'où en passant aux probabilités, et d'après la formule du crible :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq P(|\alpha V_n + \beta W_n - \alpha V - \beta W| \geq \varepsilon) \leq P\left(|\alpha V_n - \alpha V| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|\beta W_n - \beta W| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Or comme $V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} V$ et $t \mapsto t\alpha$ est continue, sur $\mathbb{R}$ par application du théorème de continuité,

$$\alpha V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha V$$

et de même pour $\beta W_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \beta W$

d'où par définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} P\left(|\alpha V_n - \alpha V| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} P\left(|\beta W_n - \beta W| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Donc, finalement, par encadrement :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} P(|\alpha V_n + \beta W_n - \alpha V - \beta W| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{i.e.}$$

$$\boxed{\alpha V_n + \beta W_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \alpha V + \beta W}$$

7)b) Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

et comme les $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ sont mutuellement indépendants, de même loi et de même espérance $\mathbb{E}(X_1)$, d'après la loi faible des grands nombres :

$$\boxed{M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)}$$

De même, comme, d'après le lemme des coalitions les $(X_k^2)_{1\leq k\leq n}$ sont mutuellement indépendantes

On montre de la même façon que

$$\boxed{C_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1^2)}$$

7)c) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{C_n - M_n^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2}$$

Comme $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes la même loi $\mathcal{G}(\mu, a)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ est un n-échantillon de la loi $\mathcal{G}(\mu, a)$

et comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est une fonction des variables aléatoires $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$, indépendante de a

Alors A_n est un estimateur de a.

Comme d'après 7)b), on a : $M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$

$$C_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1^2)$$

et comme la fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, par application du théorème de continuité :

$$M_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} (\mathbb{E}(X_1))^2$$

et d'après 7)a) :

$$C_n - M_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2$$

Or, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = \mathbb{V}(X_1)$ et comme $X_1 \rightsquigarrow \mathcal{G}(\mu, a)$

$= a^2 c$, d'où

$C_n - M_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} a^2 c$ et comme la fonction

$x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \times \sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{c}}$ est continue sur $\mathbb{R}$

avec $a^2 c \in \mathbb{R}^+$

par application du théorème de continuité :

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{C_n - M_n^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{a^2 c}$$, d'où :

$$A_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$$

$\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}^*, A_n \text{ est un estimateur convergent de } a}$

7)d) On montre, de la même manière qu'en 7)c), que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est un estimateur de μ.

De plus, comme $M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1)$ (cf 7)b)),

$\xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma$ (cf 5)c)),

et $A_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ (cf 7)c))

Alors par 7)a) : $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma - a\gamma$ or d'après 5)d) : $\mathbb{E}(X) = a\gamma + \mu$, d'où $\gamma = a\gamma + \mu$ i.e : $\mu = \gamma - a\gamma$

donc $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$

$\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_n \text{ est un estimateur convergent de } \mu.}$

8) a)

```
function A=estimateur_a(X).
    A=(1/sqrt(c))*sqrt(sum(X.^2)/n - (sum(X)/n)^2)
endfunction
```

8) b)

D'après 7) c), on sait que A_n ($n \in \mathbb{N}$) est un estimateur convergent de $a=1$, ce qui s'observe très bien sur les simulations de ce graphique, étant donné qu'elles tendent tous vers l'ordonnée 1

En revanche, les valeurs semblent assez dispersées pour un n inférieur à 10^2 ce qui peut témoigner d'une variance assez grande.

On peut conjecturer que l'estimateur A_n ($n \in \mathbb{N}$) est juste mais pas précis (dû à l'erreur aléatoire)