
EXERCICE 1

Q1 a) Soit A un élément de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

A est de type 0 si et seulement si ${}^t A = A^0 = I_m$; c'est à dire si et seulement si $A = I_m$.

A est de type 1 si et seulement si ${}^t A = A^1 = A$; c'est à dire si et seulement si A est symétrique.

I_m est la seule matrice de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ de type 0. Les matrices de type 1 sont les matrices symétriques.

b) Soit A un élément de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. A est de type -1 si et seulement si ${}^t A = A^{-1}$; c'est à dire si et seulement si ${}^t A A = I_m$. Les matrices de types -1 sont donc les matrices orthogonales.

En se souvenant que la matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale est une matrice orthogonale il n'est pas difficile d'exhiber des matrices de type -1.

Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est de type -1 (et même de type 1 !!) sans être diagonale !

Q2 Soit x un nombre réel.

a) Montrons par récurrence que pour tout élément k de \mathbb{N}^* : $[N(x)]^k = N(kx)$.

L'égalité est claire pour $k = 1$.

Supposons que $[N(x)]^k = N(kx)$ pour un élément k de \mathbb{N}^* . Montrons alors que $[N(x)]^{k+1} = N((k+1)x)$.

$[N(x)]^{k+1} = [N(x)]^k \times N(x) = N(kx) \times N(x)$ d'après l'hypothèse de récurrence.

$$\text{Donc : } [N(x)]^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kx) & -\sin(kx) \\ 0 & \sin(kx) & \cos(kx) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi : } [N(x)]^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kx)\cos x - \sin(kx)\sin x & -\cos(kx)\sin x - \sin(kx)\cos x \\ 0 & \sin(kx)\cos x + \cos(kx)\sin x & -\sin(kx)\sin x + \cos(kx)\cos x \end{pmatrix}$$

$$\text{Ce qui donne : } [N(x)]^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(kx+x) & -\sin(kx+x) \\ 0 & \sin(kx+x) & \cos(kx+x) \end{pmatrix} = N((k+1)x). \text{ Et ainsi s'achève la récurrence.}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, [N(x)]^k = N(kx).$$

b) $N(x)$ est de type n si et seulement si : ${}^t N(x) = [N(x)]^n$. Rappelons alors que : $[N(x)]^n = N(nx)$.

$$\text{Notons que : } {}^t N(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-x) & -\sin(-x) \\ 0 & \sin(-x) & \cos(-x) \end{pmatrix} = N(-x).$$

Alors : $N(x)$ de type $n \iff N(-x) = N(nx) \iff \cos(-x) = \cos(nx)$ et $\sin(-x) = \sin(nx)$.

$$\text{Ainsi : } N(x) \text{ de type } n \iff -x \equiv nx \pmod{2\pi} \iff (n+1)x \equiv 0 \pmod{2\pi} \iff x \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{n+1}}$$

$$\text{L'ensemble des réels } x \text{ tel que } N(x) \text{ soit de type } n \text{ est : } \left\{ \frac{2k\pi}{n+1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Q3 a) ${}^t A = A^n$ donne également $A = {}^t({}^t A) = {}^t(A^n) = ({}^t A)^n$.

Alors $A^{(n^2)} = (A^n)^n = ({}^tA)^n = A$. $A^{(n^2)} = A$.

b) $B^n = (A^{n+1})^n = A^{n^2+n} = A^{(n^2)}A^n = AA^n = A^{n+1} = B$. $B^n = B$.

Observons que $B = A^nA = {}^tAA$. Dès lors ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA({}^tA) = {}^tAA = B$ et B est symétrique.

c) Posons $P = X^n - X$. P est un polynôme annulateur de B et ainsi toute valeur propre de B est un zéro de P .

B est une matrice réelle symétrique donc ses valeurs propres sont réelles.

Les zéros réels de $P = X^n - X$ sont 0 et 1 si n est impair, et 0, 1 et -1 si n est pair.

On peut alors affirmer que les seules valeurs propres possibles de B sont : $-1, 0$ et 1 .

d) Supposons que V soit un vecteur propre de B associé à la valeur propre -1 . V n'est pas nul et $BV = -V$.

${}^tVBV = {}^tV(-V) = -{}^tVV = -\|V\|^2$. De plus : ${}^tVBV = {}^tV{}^tAAV = {}^t(AV)AV = \|AV\|^2$.

Ainsi : $-\|V\|^2 = \|AV\|^2$. Alors nécessairement $\|V\|^2 = 0$ et $V = 0$!

Par conséquent : -1 n'est pas valeur propre de B .

e) Notons f_B l'endomorphisme de \mathbb{R}^m dont la matrice dans la base canonique est B . f_B est alors un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^m (n'oublions pas que la base canonique est orthonormale... pour le produit scalaire canonique). Montrons que f_B est une projection orthogonale.

Si 0 est la seule valeur propre de f_B , f_B est nécessairement l'application linéaire nulle car f_B est diagonalisable ; f_B est bien une projection orthogonale.

De même 1 est la seule valeur propre de f_B , f_B est nécessairement $Id_{\mathbb{R}^m}$ car f_B est diagonalisable ; f_B est toujours une projection orthogonale.

Supposons alors que 0 et 1 soient les deux valeurs propres de f_B .

Les deux sous-espaces propres associés $\text{Ker } f_B$ et $\text{Ker}(f_B - Id_{\mathbb{R}^m})$ sont supplémentaires (f_B est diagonalisable) et orthogonaux (f_B est symétrique). Notons p la projection orthogonale sur $\text{Ker}(f_B - Id_{\mathbb{R}^m})$ parallèlement à $\text{Ker } f_B$.

Soit U un élément de \mathbb{R}^m . $U = U_1 + U_2$ avec $(U_1, U_2) \in \text{Ker}(f_B - Id_{\mathbb{R}^m}) \times \text{Ker } f_B$.

$f_B(U) = f_B(U_1) + f_B(U_2) = U_1 + 0 = U_1 = p(U)$. Ainsi $f_B = p$.

Dans tous les cas f_B est une projection orthogonale... donc f_B est un projecteur orthogonal.

B est une matrice de projecteur orthogonal.

Q4 a) Soit U un élément de E_B . $BU = 0$ donc ${}^tAAU = 0$. En particulier $\|AU\|^2 = {}^t(AU)AU = {}^tU{}^tAAU = 0$. Ceci donne alors $AU = 0$. Donc U est élément de E_A .

E_B est contenu dans E_A .

Réciproquement soit U un élément de E_A ; $BU = {}^tAAU = {}^tA0 = 0$ et U appartient à E_B .

E_A est alors contenu dans E_B , ce qui achève de montrer que : $E_B = E_A$.

b) Soit V un élément de F_B . Il existe un élément U de \mathbb{R}^m tel que : $f_B(U) = V$. Alors $V = f_A^{n+1}(U) = f_A(f_A^n(U))$ et ainsi V appartient à F_A .

On a donc $F_B \subset F_A$. De plus le théorème du rang et l'égalité $E_B = E_A$ donnent : $\dim F_B = \dim \mathbb{R}^m - \dim E_B = \dim \mathbb{R}^m - \dim E_A = \dim F_A$.

$F_B \subset F_A$ et $\dim F_B = \dim F_A$ permettent de dire que : $F_B = F_A$ (nous sommes en dimension finie...).

Nous avons vu plus haut que E_B et F_B sont deux supplémentaires orthogonaux de \mathbb{R}^m .

Ainsi : E_A et F_A sont deux supplémentaires orthogonaux de \mathbb{R}^m .

Q5 Soit U un élément de F_A . Comme $F_A = F_B = \text{Im } f_B = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^m})$, $f_B(U) = U$ et donc $BU = U$.

Alors $\|AU\|^2 = {}^t(AU)AU = {}^tU^tAAU = {}^tUBU = {}^tUU = \|U\|^2$. Ainsi $\|AU\| = \|U\|$.

$$\boxed{\forall U \in F_A, \|AU\| = \|U\|}.$$

Q6 Supposons A inversible et toujours de type n . Alors $B = A^{n+1}$ est également inversible. f_B est alors un automorphisme de \mathbb{R}^m . Donc $\text{Ker}(f_B - \text{Id}_{\mathbb{R}^m}) = \text{Im } f_B = \mathbb{R}^m$ et : $f_B = \text{Id}_{\mathbb{R}^m}$.

Alors $B = I_m$. ${}^tAA = I_m$. Ainsi ${}^tA = A^{-1}$ et $\boxed{A \text{ est de type } -1}$.

Q7 Supposons que A soit de type n et $n+1$.

${}^tAA = A^n A = A^{n+1} = {}^tA$. Or tAA est une matrice symétrique (voir plus haut), donc tA est une matrice symétrique et A également. De plus $AA = {}^tAA = {}^tA = A$. A est alors la matrice d'une projection. Comme $E_A = \text{Ker } f_A$ et $F_A = \text{Im } f_A$ sont orthogonaux, $\boxed{A \text{ est la matrice d'un projecteur orthogonal}}$.

EXERCICE 2

Q1 a) $\varphi : u \rightarrow \frac{1}{e^u + a}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, a est (strictement) positif donc : $\forall u \in [0, +\infty[$, $0 \leq \varphi(u) = \frac{1}{e^u + a} \leq \frac{1}{e^u} = e^{-u}$.

La positivité de φ et la convergence de $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} du$ donnent alors la convergence de $\int_0^{+\infty} \varphi(u) du$

Finalement : $\boxed{J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a} du \text{ converge}}$.

b) $aJ = \int_0^{+\infty} \frac{a}{e^u + a} du = \int_0^{+\infty} \frac{ae^{-u}}{1 + ae^{-u}} du = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\ln|1 + ae^{-u}| \right]_0^x$.

$aJ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(1 + a) - \ln(1 + ae^{-x}) \right) = \ln(1 + a)$.

Ainsi $\boxed{J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + a} du = \frac{\ln(1 + a)}{a}}$.

Q2 $P(Z \leq t/N = j) = P(\text{Max}(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \leq t/N = j) = \frac{P(\{\text{Max}(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \leq t\} \cap \{N = j\})}{P(N = j)}$.

$P(Z \leq t/N = j) = \frac{P(\{\text{Max}(Y_1, Y_2, \dots, Y_j) \leq t\} \cap \{N = j\})}{P(N = j)} = \frac{P(\{Y_1 \leq t\} \cap \{Y_2 \leq t\} \cap \dots \cap \{Y_j \leq t\} \cap \{N = j\})}{P(N = j)}$.

Il vient alors par indépendance : $P(Z \leq t/N = j) = \frac{P(Y_1 \leq t) P(Y_2 \leq t) \dots P(Y_j \leq t) P(N = j)}{P(N = j)}$.

Ainsi : $P(Z \leq t/N = j) = P(Y_1 \leq t) P(Y_2 \leq t) \dots P(Y_j \leq t) = (1 - e^{-bt})^j$.

$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}^+, P(Z \leq t/N = j) = (1 - e^{-bt})^j}$.

Q3 a) Notons F_Z la fonction de répartition de Z et remarquons que cette variable aléatoire prend ses valeurs dans \mathbb{R}^+ .

Ainsi $\forall t \in]-\infty, 0[$, $F_Z(t) = 0$. Soit t un élément de \mathbb{R}^+ .

$(\{N = j\})_{j \geq 1}$ est un système complet d'événements ; la formule des probabilités totales donne alors :

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(Z \leq t/N = j) P(N = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} (1 - e^{-bt})^j P(N = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} (1 - e^{-bt})^j s(1 - s)^{j-1}.$$

$$F_Z(t) = s(1 - e^{-bt}) \sum_{j=1}^{+\infty} [(1 - s)(1 - e^{-bt})]^{j-1} = s(1 - e^{-bt}) \sum_{k=0}^{+\infty} [(1 - s)(1 - e^{-bt})]^k.$$

Observons, s'il en est besoin, que $|(1 - s)(1 - e^{-bt})| = (1 - s)(1 - e^{-bt}) < 1$ car s est élément de $]0, 1[$ et bt est positif ou nul.

Un résultat basique du cours sur les séries géométriques donne : $F_Z(t) = \frac{s(1 - e^{-bt})}{1 - (1 - s)(1 - e^{-bt})} = \frac{s(1 - e^{-bt})}{s + (1 - s)e^{-bt}}$.

Enfinement : $\forall t \in]-\infty, 0[, F_Z(t) = 0$ et $\forall t \in [0, +\infty[, F_Z(t) = \frac{s(1 - e^{-bt})}{s + (1 - s)e^{-bt}}$.

b)

Remarque On peut encore écrire : $\forall t \in]-\infty, 0[, F_Z(t) = 0$ et $\forall t \in [0, +\infty[, F_Z(t) = \frac{s(1 - e^{-bt})}{s + (1 - s)e^{-bt}}$.

Ainsi F_Z est de classe \mathcal{C}^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$. Alors F_Z est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 au moins sur \mathbb{R}^* .

La remarque précédente montre que la variable aléatoire Z est une variable aléatoire à densité.

De plus elle permet de dériver F_Z en tout point de \mathbb{R}^* .

Cette dérivation donne : $\forall t \in]-\infty, 0[, F'_Z(t) = 0$ et

$$\forall t \in]0, +\infty[, F'_Z(t) = \frac{sbe^{-bt}(s + (1 - s)e^{-bt}) - s(1 - e^{-bt})(1 - s)(-b)e^{-bt}}{(s + (1 - s)e^{-bt})^2} = \frac{sbe^{-bt}}{(s + (1 - s)e^{-bt})^2}.$$

L'application f_Z définie par : $\forall t \in]-\infty, 0[, f_Z(t) = 0$ et $\forall t \in [0, +\infty[, f_Z(t) = \frac{sbe^{-bt}}{(s + (1 - s)e^{-bt})^2}$, est alors une densité de Z .

Q4 Notons que $\int_{-\infty}^0 tf_Z(t) dt$ existe et vaut 0.

Remarquons que : $\forall t \in [0, +\infty[, f_Z(t) = \frac{sbe^{bt}}{(se^{bt} + 1 - s)^2}$ (multiplication du numérateur et du dénominateur par $(e^{bt})^2$)

et que $t \rightarrow -\frac{1}{se^{bt} + 1 - s}$ est une primitive de $t \rightarrow \frac{sbe^{bt}}{(se^{bt} + 1 - s)^2}$ sur \mathbb{R} .

Soit x un élément de \mathbb{R}^+ . Une intégration par parties simple nous donne :

$$\int_0^x tf_Z(t) dt = \left[\frac{-t}{se^{bt} + 1 - s} \right]_0^x - \int_0^x \frac{-1}{se^{bt} + 1 - s} dt = \frac{-x}{se^{bx} + 1 - s} + \int_0^x \frac{1}{se^{bt} + 1 - s} dt.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{se^{bx} + 1 - s} = 0$ (croissance comparée), donc les intégrales $\int_0^{+\infty} tf_Z(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{se^{bt} + 1 - s} dt$ sont de même nature.

Mieux en cas d'existence ces deux intégrales sont égales.

Le changement de variable $u = bt$ donne : $\int_0^x \frac{1}{se^{bt} + 1 - s} dt = \int_0^{bx} \frac{1}{b(se^u + 1 - s)} du = \frac{1}{bs} \int_0^{bx} \frac{1}{e^u + \frac{1-s}{s}} du.$

La question 1 donne alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{bx} \frac{1}{e^u + \frac{1-s}{s}} du = \frac{\ln\left(1 + \frac{1-s}{s}\right)}{\frac{1-s}{s}} = \frac{-s \ln s}{1 - s}$ car $\frac{1-s}{s}$ est strictement positif.

Ainsi $\int_0^{+\infty} tf_Z(t) dt$ existe et vaut : $\frac{-s \ln s}{bs(1 - s)} = -\frac{\ln s}{b(1 - s)}$. $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_Z(t) dt$ converge et vaut $-\frac{\ln s}{b(1 - s)}$.

Z admet une espérance qui vaut : $-\frac{\ln s}{b(1-s)}$.

Q5 a) Commençons par remarquer que : $\forall t \in]0, +\infty[$, $g(t) = \frac{t}{e^t - 1}$.

g est de toute évidence continue sur $]0, +\infty[$. De plus $\frac{t}{e^t - 1} \sim \frac{t}{t} = 1$ en 0, donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1 = g(0)$; g est également continue en 0.

g est continue sur $[0, +\infty[$.

Remarque A titre d'exercice on pourra montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ ($g'(0) = -1/2$).

Donnons deux idées pour montrer que g est bornée sur $[0, +\infty[$.

$x \rightarrow e^x$ est convexe sur \mathbb{R} donc sa courbe représentative est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y = x + 1$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

Alors : $\forall t \in]0, +\infty[$, $e^t - 1 \geq t > 0$; $\forall t \in]0, +\infty[$, $0 < g(t) = \frac{t}{e^t - 1} \leq 1$.

Mieux : $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 < g(t) \leq 1$ et g est bornée sur $[0, +\infty[$.

Retrouvons ce résultat en remarquant que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t - 1} = 0$.

Alors il existe un réel A strictement positif tel que : $\forall t \in]A, +\infty[$, $|g(t)| \leq 2000$!

g est donc bornée sur l'intervalle $]A, +\infty[$. De plus g est continue sur le segment $[0, A]$ donc g est également bornée sur $[0, A]$. Ainsi g est bornée sur $[0, +\infty[$.

Remarque On peut encore traiter cette question en montrant que g est décroissante $[0, +\infty[$.

b) Soit n un élément de \mathbb{N} et t un réel positif.

Si $t = 0$, $g(t) e^{-(n+1)t} + \sum_{k=0}^n t e^{-(k+1)t} = 1 \times 1 + 0 = 1 = g(t)$. Dès lors supposons t strictement positif, ce qui donne en particulier : $e^{-t} \neq 1$.

Alors : $\sum_{k=0}^n t e^{-(k+1)t} = \sum_{k=0}^n t (e^{-t})^{k+1} = t e^{-t} \frac{1 - (e^{-t})^{n+1}}{1 - e^{-t}} = g(t) (1 - e^{-(n+1)t}) = g(t) - g(t) e^{-(n+1)t}$.

Donc : $g(t) e^{-(n+1)t} + \sum_{k=0}^n t e^{-(k+1)t} = g(t)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, +\infty[$, $g(t) = g(t) e^{-(n+1)t} + \sum_{k=0}^n t e^{-(k+1)t}$.

Q6 Soit k un élément de \mathbb{N} . Posons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $h_{k+1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (k+1)e^{-(k+1)t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

h_{k+1} est une densité de probabilité d'une variable aléatoire T_{k+1} qui suit une loi exponentielle de paramètre $k+1$.

Le cours nous indique que T_{k+1} possède une espérance qui vaut $\frac{1}{k+1}$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t h_{k+1}(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{k+1}$. Donc $\int_0^{+\infty} t(k+1)e^{-(k+1)t} dt$ converge et vaut également $\frac{1}{k+1}$.

Alors $\int_0^{+\infty} t e^{-(k+1)t} dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{(k+1)^2}$.

Q7 g est continue et positive sur $[0, +\infty[$, $g(t) \sim t e^{-t}$ en $+\infty$ et $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge (d'après la question précédente).

Cela suffit très largement pour dire que $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Soit n un élément de \mathbb{N} .

$\forall t \in [0, +\infty[$, $g(t) = g(t) e^{-(n+1)t} + \sum_{k=0}^n t e^{-(k+1)t}$, $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge et $\int_0^{+\infty} t e^{-(k+1)t} dt$ converge pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Ceci permet alors de dire que $\int_0^{+\infty} g(t) e^{-(n+1)t} dt$ est convergente et d'écrire que :

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-(n+1)t} dt + \sum_{k=0}^n \int_0^{+\infty} t e^{-(k+1)t} dt = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-(n+1)t} dt + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\text{Alors : } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} = \int_0^{+\infty} g(t) dt - \int_0^{+\infty} g(t) e^{-(n+1)t} dt.$$

Dès lors montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g(t) e^{-(n+1)t} dt = 0$.

$\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leq g(t) \leq 1$ donc $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leq g(t) e^{-(n+1)t} \leq e^{-(n+1)t}$.

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} h_{n+1}(t) dt$ converge et vaut 1 car h_{n+1} est une densité de probabilité. Ainsi $\int_0^{+\infty} (n+1) e^{-(n+1)t} dt$ converge

et vaut également 1. Alors $\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt$ converge et vaut $\frac{1}{n+1}$

Nous pouvons donc écrire que : $0 \leq \int_0^{+\infty} g(t) e^{-(n+1)t} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, il vient par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g(t) e^{-(n+1)t} dt = 0$.

$$\text{Ainsi : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} g(t) dt.$$

La série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} g(t) dt$.

Q8 Notons que $s \mapsto \frac{-\ln s}{1-s}$ est continue sur $]0, 1[$ et même prolongeable par continuité en 1.

Soit α et β deux éléments de $]0, 1[$.

Le changement de variable $t = -\ln s$ ou $s = e^{-t}$ donne :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{-\ln s}{1-s} ds = \int_{-\ln \alpha}^{-\ln \beta} \frac{t}{1-e^{-t}} (-e^{-t}) dt = \int_{-\ln \beta}^{-\ln \alpha} \frac{t e^{-t}}{1-e^{-t}} dt = \int_{-\ln \beta}^{-\ln \alpha} g(t) dt$$

Remarquons alors que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (-\ln \alpha) = +\infty$ et $\lim_{\beta \rightarrow 1} (-\ln \beta) = 0$, et que $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge et vaut $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Alors $\int_0^1 \frac{-\ln s}{1-s} dt$ existe et vaut $\frac{\pi^2}{6}$. Donc $\int_0^1 \frac{-\ln s}{b(1-s)} dt$ existe et vaut $\frac{\pi^2}{6b}$.

La valeur moyenne de $E(Z)$ sur $]0, 1[$ est $\frac{\pi^2}{6b}$.

PROBLÈME

Q0 Le théorème de transfert donne : $E(g(Y)) = \sum_{i=1}^t g(y_i) P(Y = y_i)$.

Comme $(\{X = x_j\})_{j \in \llbracket 1, u \rrbracket}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne, pour tout élément i de $\llbracket 1, t \rrbracket$:

$$P(Y = y_i) = \sum_{j=1}^u P(Y = y_i / X = x_j) P(X = x_j).$$

$$\text{Ainsi } E(g(Y)) = \sum_{i=1}^t \left[g(y_i) \left(\sum_{j=1}^u P(Y = y_i / X = x_j) P(X = x_j) \right) \right] = \sum_{j=1}^u \left[\left(\sum_{i=1}^t g(y_i) P(Y = y_i / X = x_j) \right) P(X = x_j) \right].$$

Ce qui donne encore : $E(g(Y)) = \sum_{j=1}^u [E_j P(X = x_j)]$.

Par conséquent $E(g(Y)) = \sum_{j=1}^u E_j P(X = x_j)$

Q1 a) T_k prend ses valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

b) Soit j un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Si l'événement $\{T_k = j\}$ est réalisé, pour obtenir la génération $k+2$ on tire avec remise n disquettes dans la génération $k+1$ qui contient une proportion de disquettes infectées égale à $\frac{mj}{mn} = \frac{j}{n}$ et T_{k+1} compte alors le nombre de disquettes infectées obtenues.

Ainsi la loi conditionnelle de la variable T_{k+1} sachant que l'événement $\{T_k = j\}$ est réalisé est la loi binômiale de paramètres n et $\frac{j}{n}$.

Q2 a) Utilisons le préliminaire avec la fonction $g : x \rightarrow x$ et le couple (T_k, T_{k+1}) .

Il vient alors : $E(T_{k+1}) = \sum_{j=0}^n E_j P(T_k = j)$ avec, pour tout élément j de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $E_j = \sum_{i=0}^n i P(T_{k+1} = i / T_k = j)$.

Soit j un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$ et soit U_j une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, P) qui suit la loi binômiale de paramètres n et $\frac{j}{n}$. $E(U_j) = n \frac{j}{n} = j$.

$T_{k+1} / \{T_k = j\} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{j}{n})$ et donc $E_j = \sum_{i=0}^n i P(T_{k+1} = i / T_k = j) = \sum_{i=0}^n i P(U_j = i) = E(U_j) = j$.

Alors : $E(T_{k+1}) = \sum_{j=0}^n E_j P(T_k = j) = \sum_{j=0}^n j P(T_k = j) = E(T_k)$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, E(T_{k+1}) = E(T_k).$$

b) La suite $(E(T_k))_{k \geq 0}$ est constante et $E(T_0) = np$ car T_0 suit la loi binômiale de paramètres n et p .

Par conséquent : $\forall k \in \mathbb{N}, E(T_k) = np$.

Q3 a) Utilisons alors le préliminaire avec la fonction $g : x \rightarrow x(n-x)$ et le couple (T_k, T_{k+1}) . Nous obtenons :

$E(Z_{k+1}) = E(g(T_{k+1})) = \sum_{j=0}^n E_j P(T_k = j)$ avec, pour tout élément j de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $E_j = \sum_{i=0}^n g(i) P(T_{k+1} = i / T_k = j)$.

Rappelons que, pour tout j élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$, la loi de T_{k+1} sachant que $\{T_k = j\}$ est réalisé est la loi binômiale de paramètres n et $\frac{j}{n}$.

Soit j un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Reprenons la variable aléatoire U_j sur (Ω, \mathcal{A}, P) qui suit la loi binômiale de paramètres n et $\frac{j}{n}$.

On a encore : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $E_j = \sum_{i=0}^n g(i)P(T_{k+1} = i/T_k = j) = \sum_{i=0}^n g(i)P(U_j = i) = E(g(U_j)) = E(U_j(n - U_j))$.

Or : $E(U_j(n - U_j)) = nE(U_j) - E(U_j^2) = nE(U_j) - V(U_j) - (E(U_j))^2$, $E(U_j) = j$ et $V(U_j) = n \frac{j}{n} (1 - \frac{j}{n}) = j - \frac{j^2}{n}$.

Donc : $E_j = nj - j + \frac{j^2}{n} - j^2 = (n - 1)j - j^2(1 - \frac{1}{n}) = \frac{n - 1}{n} j(n - j)$.

Finalement : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $E_j = \frac{n - 1}{n} j(n - j)$.

Revenons alors à $E(Z_{k+1})$. $E(Z_{k+1}) = \sum_{j=0}^n E_j P(T_k = j) = \frac{n - 1}{n} \sum_{j=0}^n [j(n - j)P(T_k = j)] = \frac{n - 1}{n} E(g(T_k))$

$E(Z_{k+1}) = \frac{n - 1}{n} E(Z_k)$

Ainsi La suite de terme général $E(Z_k)$ est géométrique de raison $\frac{n - 1}{n}$.

b) Notons que $E(Z_0) = E(g(T_0)) = E(T_0(n - T_0)) = nE(T_0) - E(T_0^2) = nE(T_0) - V(T_0) - (E(T_0))^2$.

T_0 suit la loi binômiale de paramètres n et p donc : $E(T_0) = np$ et $V(T_0) = np(1 - p)$.

Alors $E(Z_0) = n^2p - np(1 - p) - n^2p^2 = np(n - (1 - p) - np) = np(n - 1)(1 - p) = n(n - 1)p(1 - p)$.

La suite de terme général $E(Z_k)$ est géométrique de premier terme $n(n - 1)p(1 - p)$ et de raison $\frac{n - 1}{n}$.

Alors : $\forall k \in \mathbb{N}$, $E(Z_k) = n(n - 1)p(1 - p) \left(\frac{n - 1}{n}\right)^k$.

c) $\left|\frac{n - 1}{n}\right| < 1$ donc : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{n - 1}{n}\right)^k = 0$. Ainsi $\lim_{k \rightarrow +\infty} E(Z_k) = 0$.

Q4 a) $\{Z_k = 0\}$ est réalisé si et seulement si l'un de deux événements $\{T_k = 0\}$ et $\{T_k = n\}$ est réalisé.

La réalisation de l'événement $\{Z_k = 0\}$ signifie "concrètement" que les n disquettes tirées dans la génération k pour constituer la génération $k + 1$ sont ou toutes saines ou toutes infectées.

b) Une rapide étude de la fonction $x \rightarrow x(n - x)$ sur $[1, n - 1]$ conduit naturellement aux considérations suivantes !

$\forall j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $j(n - j) - 1(n - 1) = (n - 1)(j - 1) \geq 0$.

Ainsi la plus petite valeur de $j(n - j)$ quand j décrit $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ est $n - 1$.

c) Le théorème de transfert donne : $E(Z_k) = E(T_k(n - T_k)) = \sum_{j=0}^n j(n - j) P(T_k = j) = \sum_{j=1}^{n-1} j(n - j) P(T_k = j)$.

D'après ce qui précède : $\forall j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $j(n - j)P(T_k = j) \geq (n - 1)P(T_k = j)$.

Ainsi $0 \leq \sum_{j=1}^{n-1} (n - 1) P(T_k = j) \leq \sum_{j=1}^{n-1} j(n - j) P(T_k = j) = E(Z_k)$.

Donc : $0 \leq P(0 < T_k < n) = \sum_{j=1}^{n-1} P(T_k = j) \leq \frac{1}{n - 1} E(Z_k)$.

$\lim_{k \rightarrow +\infty} E(Z_k) = 0$ donne alors : $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(0 < T_k < n) = 0$.

d) $P(Z_k = 0) = P(T_k(n - T_k) = 0) = P(\{T_k = 0\} \cup \{T_k = n\}) = 1 - P(0 < T_k < n)$.

La question précédente donne alors : $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(Z_k = 0) = 1$.

Pour tout élément k de \mathbb{N} , $\{Z_k = 0\} \subset \{Z_{k+1} = 0\}$.

La suite de terme général $\{Z_k = 0\}$ étant croissante, le théorème de la limite monotone nous donne alors :

$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(\{Z_k = 0\}) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \{Z_k = 0\}\right)$ donc $P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \{Z_k = 0\}\right) = 1$.

Il est quasi-certain que l'on obtiendra un lot constitué ou de n disquettes saines ou de n disquettes contaminées.

e) Rappelons que : $P(0 < T_k < n) \leq \frac{1}{n-1} E(Z_k) = \frac{1}{n-1} n(n-1)p(1-p) \left(\frac{n-1}{n}\right)^k = np(1-p) \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$.

$P(Z_k = 0) > 0,99$ si et seulement si : $P(0 < T_k < n) = 1 - P(Z_k = 0) < 0,01$.

Or $p(1-p) = -p^2 + p = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$. Ainsi : $P(0 < T_k < n) \leq \frac{n}{4} \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$.

Donc pour avoir $P(Z_k = 0) > 0,99$ il suffit d'avoir : $\frac{n}{4} \left(\frac{n-1}{n}\right)^k < 0,01$.

$\frac{n}{4} \left(\frac{n-1}{n}\right)^k < 0,01 \iff \left(\frac{n-1}{n}\right)^k < \frac{0,04}{n} \iff k \ln \left(\frac{n-1}{n}\right) < \ln \left(\frac{0,04}{n}\right)$.

Comme : $0 < \frac{n-1}{n} < 1$, on peut alors écrire : $\frac{n}{4} \left(\frac{n-1}{n}\right)^k < 0,01 \iff k > \frac{\ln(0,04) - \ln n}{\ln(n-1) - \ln n}$.

$P(Z_k = 0) > 0,99$ dès que k est strictement supérieur à la partie entière de $\frac{\ln(0,04) - \ln n}{\ln(n-1) - \ln n}$.

Q5 Soit k un élément de $\mathbb{N}^{(*)}$. Supposons l'événement $\{T_k = n\}$ réalisé. On a alors obtenu n disquettes infectées lorsque l'on a tiré n disquettes dans la génération k pour constituer la génération $k+1$. Ainsi la génération $k+1$ est constituée de nm disquettes infectées. Pour constituer la génération $k+1$ on tire n disquettes parmi ces nm disquettes toutes infectées et on obtient n disquettes infectées ! L'événement $\{T_{k+1} = n\}$ est donc réalisé.

On a $\{T_k = n\} \subset \{T_{k+1} = n\}$.

La suite $(\{T_k = n\})_{k \geq 1}$ est croissante pour l'inclusion ; la suite $(\{T_k = n\})_{k \geq 0}$ aussi...

b) $F = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{T_k = n\}$. La question précédente et le théorème de la limite monotone montrent que :

$P(F) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(T_k = n)$.

Q6 $\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\{T_k = j\} \subset \{0 < T_k < n\}$ donc : $\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $0 \leq P(T_k = j) \leq P(0 < T_k < n)$.

Comme : $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(0 < T_k < n) = 0$, il vient par encadrement $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(T_k = j) = 0$ pour tout élément j de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Q7 $np = E(T_k) = \sum_{j=0}^n j P(T_k = j) = \sum_{j=1}^{n-1} j P(T_k = j) + n P(T_k = n)$.

Alors : $P(T_k = n) = p - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j P(T_k = j)$. Comme, pour tout élément j de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$: $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(T_k = j) = 0$, il vient :

$\lim_{k \rightarrow +\infty} P(T_k = n) = p$.

Ainsi : $P(F) = p$

Q8 a) $G = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{T_k = 0\}$ et on montre comme dans la question 5 que la suite $(\{T_k = 0\})_{k \geq 0}$ est croissante.

le théorème de la limite monotone donne encore : $P(G) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(T_k = 0)$.

$$\sum_{j=0}^n P(T_k = j) = 1. \text{ Alors : } P(T_k = 0) = 1 - \sum_{j=0}^n P(T_k = j) = 1 - P(0 < T_k < n) - P(T_k = n).$$

$$\text{Alors : } P(G) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(T_k = 0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (1 - P(0 < T_k < n) - P(T_k = n)) = 1 - 0 - p. \quad P(G) = 1 - p.$$

b) La méthode est géniale.

Q9 Reprenons rapidement les questions 1, 2 et 3. $N = nm$.

• La question 1.

Ici encore T_k prend ses valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Soit j un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Si l'événement $\{T_k = j\}$ est réalisé, pour obtenir la génération $k + 2$ on tire sans remise n disquettes dans la génération $k + 1$ qui contient mj disquettes infectées et T_{k+1} compte alors le nombre de disquettes infectées obtenues.

Ainsi la loi conditionnelle de la variable T_{k+1} sachant que l'événement $\{T_k = j\}$ est réalisé est la loi hypergéométrique de paramètres N, n et $\frac{j}{n}$.

• La question 2.

Utilisons encore le préliminaire avec la fonction $g : x \rightarrow x$ et le couple (T_k, T_{k+1}) .

$$\text{Il vient alors : } E(T_{k+1}) = \sum_{j=0}^n E_j P(T_k = j) \text{ avec, pour tout élément } j \text{ de } \llbracket 0, n \rrbracket, E_j = \sum_{i=0}^n i P(T_{k+1} = i / T_k = j).$$

$$\text{Si } j \text{ appartient à } T_k(\Omega), T_{k+1}/T_k = j \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, \frac{j}{n}) \text{ et donc } E_j = \sum_{i=0}^n i P(T_{k+1} = i / T_k = j) = n \frac{j}{n} = j.$$

$$\text{Alors : } E(T_{k+1}) = \sum_{j=0}^n E_j P(T_k = j) = \sum_{j=0}^n j P(T_k = j) = E(T_k).$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, E(T_{k+1}) = E(T_k).$$

La suite $(E(T_k))_{k \geq 0}$ est constante et $E(T_0) = np$ car T_0 suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p .

$$\text{Par conséquent : } \forall k \in \mathbb{N}, E(T_k) = np.$$

• La question 3.

Utilisons alors le préliminaire avec la fonction $g : x \rightarrow x(n - x)$ et le couple (T_k, T_{k+1}) . Nous obtenons :

$$E(Z_{k+1}) = E(g(T_{k+1})) = \sum_{j=0}^n E_j P(T_k = j) \text{ avec, pour tout élément } j \text{ de } \llbracket 0, n \rrbracket, E_j = \sum_{i=0}^n g(i) P(T_{k+1} = i / T_k = j).$$

Rappelons que, pour tout j élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$, la loi de T_{k+1} sachant que $\{T_k = j\}$ est réalisé est la loi hypergéométrique de paramètres N, n et $\frac{j}{n}$.

Soit V_j une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, P) suivant cette loi.

$$\text{On a encore : } \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, E_j = \sum_{i=0}^n g(i) P(T_{k+1} = i / T_k = j) = \sum_{i=0}^n g(i) P(V_j = i) = E(g(V_j)) = E(V_j(n - V_j)).$$

$$\text{Or : } E(V_j(n - V_j)) = nE(V_j) - E(V_j^2) = nE(V_j) - V(V_j) - (E(V_j))^2, E(V_j) = j \text{ et } V(V_j) = n \frac{j}{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{N-n}{n(N-1)} j(n-j) = \frac{m-1}{(N-1)} j(n-j)$$

$$\text{Donc : } \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, E_j = nj - \frac{m-1}{(N-1)} j(n-j) - j^2 = j(n-j) \left[1 - \frac{m-1}{N-1}\right] = j(n-j) \frac{N-m}{N-1}.$$

$$\text{Revenons alors à } E(Z_{k+1}). E(Z_{k+1}) = \sum_{j=0}^n E_j P(T_k = j) = \frac{N-m}{N-1} \sum_{j=0}^n [j(n-j) P(T_k = j)] = \frac{N-m}{N-1} E(g(T_k))$$

$$E(Z_{k+1}) = \frac{N-m}{N-1} E(Z_k)$$

Ainsi La suite de terme général $E(Z_k)$ est géométrique de raison $\frac{N-m}{N-1}$.

$$\text{Notons que } E(Z_0) = E(g(T_0)) = E(T_0(n - T_0)) = nE(T_0) - E(T_0^2) = nE(T_0) - V(T_0) - (E(T_0))^2.$$

$$T_0 \text{ suit la loi hypergéométrique de paramètres } N, n \text{ et } p \text{ donc : } E(T_0) = np \text{ et } V(T_0) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}.$$

$$\text{Alors : } E(Z_0) = n^2 p - np(1-p) \frac{N-n}{N-1} - n^2 p^2 = np(n - (1-p) \frac{N-n}{N-1} - np) = np(1-p) \left[n - \frac{N-n}{N-1}\right]$$

$$E(Z_0) = n(n-1)p(1-p) \frac{N}{N-1}.$$

La suite de terme général $E(Z_k)$ est géométrique de premier terme $n(n-1)p(1-p) \frac{N}{N-1}$ et de raison $\frac{N-m}{N-1}$.

$$\text{Alors : } \forall k \in \mathbb{N}, E(Z_k) = n(n-1)p(1-p) \frac{N}{N-1} \left(\frac{N-m}{N-1}\right)^k.$$

$$\left|\frac{N-m}{N-1}\right| < 1 \text{ donc : } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{N-m}{N-1}\right)^k = 0. \text{ Ainsi } \left[\lim_{k \rightarrow +\infty} E(Z_k) = 0\right].$$