
ECRICOME 2003

EXERCICE 1

1.1 Convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Elle est en particulier minorée par son premier terme u_0 qui est strictement positif. Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

Ceci donne encore : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$. Finalement :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement croissante.

2 Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit majorée. Etant croissante elle est alors convergente et majorée par sa limite que nous noterons ℓ .

Notons que $\ell \geq u_0 = a > 0$. ℓ est donc un réel strictement positif.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Un passage à la limite banal donne alors $\ell = \ell + \ell^2$, donc $\ell^2 = 0$. Ainsi ℓ vaut 0 !

Cette légère contradiction montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et non majorée donc :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

1.2 Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1 Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln u_{n+1} - \frac{1}{2^n} \ln u_n = \frac{1}{2^{n+1}} (\ln(u_n + u_n^2) - 2 \ln u_n)$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{u_n + u_n^2}{u_n^2} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}$.

En remplaçant n par $n+p$ dans l'égalité précédente on obtient : $v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_{n+p}} \right)$.

Rappelons que $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est croissante et strictement positive. Par conséquent : $0 < u_n \leq u_{n+p}$.

Donc $1 < 1 + \frac{1}{u_{n+p}} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$.

La stricte croissance de la fonction $\ln$ donne : $0 < \ln \left(1 + \frac{1}{u_{n+p}} \right) \leq \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$.

La stricte positivité de $\frac{1}{2^{n+p+1}}$ permet alors d'écrire :

$$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_{n+p}} \right) \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, 0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right).$$

2 Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}$. $\forall p \in \mathbb{N}$, $0 < v_{n+p+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.

En sommant ces inégalités de 0 à k il vient : $0 < \sum_{p=0}^k (v_{n+p+1} - v_{n+p}) \leq \left(\sum_{p=0}^k \frac{1}{2^{n+p+1}}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.

Observons que : $\sum_{p=0}^k (v_{n+p+1} - v_{n+p}) = v_{n+k+1} - v_n$. Observons encore que :

$$\sum_{p=0}^k \frac{1}{2^{n+p+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - (1/2)^{k+1}}{1 - (1/2)} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right).$$

Ainsi pouvons-nous écrire que : $0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.

Or $\frac{1}{2^n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ et $\ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) > 0$. Par conséquent : $0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right).}$$

3 Soit k un élément de $\mathbb{N}$. En donnant la valeur 0 à n dans ce qui précède on obtient en particulier :

$$v_{k+1} - v_0 \leq \ln \left(1 + \frac{1}{u_0}\right), \text{ ou : } v_{k+1} \leq v_0 + \ln \left(1 + \frac{1}{u_0}\right) = \ln u_0 + \ln \left(1 + \frac{1}{u_0}\right) = \ln(1 + u_0).$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} \leq \ln(1 + u_0)$. Ce qui s'écrit encore $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $v_k \leq \ln(1 + a)$.

Ne reste plus qu'à remarquer que $v_0 = \ln u_0 \leq \ln(1 + u_0) = \ln(1 + a)$ pour dire que :

$$\boxed{(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est majorée par } \ln(1 + a).}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $0 < v_{n+p+1} - v_n$. En faisant $p = 0$ ceci donne : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < v_{n+1} - v_n$. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

$$\boxed{(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante et majorée donc elle est convergente.}}$$

4 La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers α donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2^n} \ln u_n \leq \alpha$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln u_n \leq \alpha 2^n$. La croissance de la fonction exp fournit alors sans difficulté :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \exp(\alpha 2^n).}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.

En faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient : $\alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$ ou $\alpha 2^n - v_n 2^n \leq \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.

Par conséquent $\alpha 2^n \leq v_n 2^n + \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \ln u_n + \ln \left(1 + \frac{1}{u_n}\right) = \ln(1 + u_n)$. La croissance de la fonction exp donne alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp(\alpha 2^n) - 1 \leq u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - \frac{1}{\exp(\alpha 2^n)} \leq \frac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} \leq 1$ (*).

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Ceci donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(\alpha 2^n) = +\infty$. Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(\alpha 2^n)} = 0$.

(*) et le théorème d'encadrement fournissent alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} = 1$. Par conséquent :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(\alpha 2^n).$$

Remarque Il était encore plus simple de montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\alpha 2^n)}{u_n} = 1$!

[5] D'après 1.2.4, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \exp(\alpha 2^n) - u_n \leq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \beta_n \leq 1$.

La suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Posons pour alléger les écritures : $\gamma_n = \exp(\alpha 2^n)$ et observons que $\gamma_{n+1} = \gamma_n^2$.

$$-\beta_{n+1} + \gamma_{n+1} = u_{n+1} = u_n + u_n^2 = \gamma_n - \beta_n + (\gamma_n - \beta_n)^2 = \gamma_n - \beta_n + \gamma_n^2 - 2\gamma_n \beta_n + \beta_n^2 = \gamma_n - \beta_n + \gamma_{n+1} - 2\gamma_n \beta_n + \beta_n^2.$$

$$\text{Alors } -\beta_{n+1} = \gamma_n - \beta_n - 2\gamma_n \beta_n + \beta_n^2 \text{ ou } \gamma_n (2\beta_n - 1) = \beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n.$$

En multipliant par $\frac{1}{\gamma_n}$ c'est à dire par $\exp(-\alpha 2^n)$ il vient : $2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \exp(-\alpha 2^n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \exp(-\alpha 2^n).$$

[6] La suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, il en est donc de même de la suite $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 + \beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\beta_{n+1} + \beta_n^2 + \beta_n| \leq |\beta_{n+1}| + |\beta_n|^2 + |\beta_n| \leq 3).$$

De plus la suite $(\exp(-\alpha 2^n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 alors la suite $((\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n) \exp(-\alpha 2^n))_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(2\beta_n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers 0.

$$\text{Plus précisément (?!)} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \beta_n \leq 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n = \beta_{n+1} + \left(\beta_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Alors, } \forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{4} \leq \beta_{n+1} + \left(\beta_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n = \beta_{n+1} - \beta_n(1 - \beta_n) \leq \beta_{n+1} \leq 1.$$

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{4} \leq \beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n \leq 1. \text{ Donc } \forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{4} \exp(-\alpha 2^n) \leq 2\beta_n - 1 \leq \exp(-\alpha 2^n).$$

Le théorème d'encadrement redonne alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\beta_n - 1) = 0$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\beta_n) = -\frac{1}{2}$. Ce qui s'écrit $-\beta_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2} + o(1)$ et donne alors $u_n - \exp(\alpha 2^n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2} + o(1)$ ou :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1).$$

EXERCICE 2

[1] Tr est par définition une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Montrons qu'elle est linéaire.

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit λ un réel.

$$Tr(\lambda A + B) = Tr((\lambda a_{ii} + b_{ii})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \lambda Tr(A) + Tr(B).$$

D'où la linéarité de Tr .

Posons $C = AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $D = BA = (d_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

$$Tr(AB) = Tr(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n d_{jj} = Tr(D) = Tr(BA).$$

Finalement :

$$\boxed{Tr \text{ est une application linéaire de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ qui vérifie : } \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), Tr(AB) = Tr(BA).}$$

2 Version 1 Notons I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\text{Im } Tr \subset \mathbb{R}$ donc $\text{Im } Tr$ est de dimension 0 ou 1.

$Tr(I_n) = n$ donc $\text{Im } Tr$ n'est pas réduit à 0. Ainsi la dimension de $\text{Im } Tr$ est 1.

$\text{Im } Tr \subset \mathbb{R}$ et $\dim \text{Im } Tr = \dim \mathbb{R} = 1$ donc $\text{Im } Tr = \mathbb{R}$ et :

$$\boxed{Tr \text{ est surjective.}}$$

Version 2 $Tr(I_n) = n$. Par conséquent $\forall \lambda \in \mathbb{R}, Tr\left(\frac{\lambda}{n} I_n\right) = \frac{\lambda}{n} Tr(I_n) = \lambda$.

Ainsi tout élément λ de $\mathbb{R}$ possède au moins un antécédent par Tr dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($\frac{\lambda}{n} I_n$ par exemple). Nous retrouvons ainsi la surjectivité de Tr .

Le théorème du rang permet alors de dire que : $\dim \text{Ker } Tr = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \text{Im } Tr = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - 1 = n^2 - 1$.

$$\boxed{\text{Le noyau de } Tr \text{ est de dimension } n^2 - 1.}$$

3 Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}, B$ et C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel.

$$\bullet \varphi(A, \lambda B + C) = Tr({}^t A(\lambda B + C)) = Tr(\lambda {}^t AB + {}^t AC) = \lambda Tr({}^t AB) + Tr({}^t AC) = \lambda \varphi(A, B) + \varphi(A, C).$$

• Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sa transposée ont même trace car elles ont mêmes éléments diagonaux.

$$\text{Ainsi } Tr({}^t AB) = Tr({}^t ({}^t AB)) = Tr({}^t B({}^t A)) = Tr({}^t BA). \text{ Ainsi } \varphi(A, B) = \varphi(B, A).$$

$$\bullet \text{ Posons } {}^t A = (a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}. \varphi(A, A) = Tr({}^t AA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a'_{ij} a_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji}^2 \geq 0. \varphi(A, A) \geq 0.$$

$$\bullet \text{ Supposons que } \varphi(A, A) = 0. \text{ Alors } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji}^2 = 0. \text{ Comme } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ji}^2 \geq 0 : \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ji}^2 = 0.$$

Donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ji} = 0$. Ainsi A est la matrice nulle.

Les quatre points précédents montrent que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous avons vu plus haut que : $\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji}^2$.

$$\text{En changeant } i \text{ en } j \text{ et } j \text{ en } i \text{ on peut écrire : } \|A\|^2 = \varphi(A, A) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2.}$$

4 Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $|Tr(A)| = |Tr({}^t I_n A)| = |\varphi(I_n, A)|$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient alors : $|Tr(A)| \leq \|I_n\| \|A\|$.

Or $\|I_n\|^2 = \varphi(I_n, I_n) = Tr({}^t I_n I_n) = Tr(I_n) = n$. Par conséquent : $|Tr(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$. Finalement :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |Tr(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|}$$

5 Montrons que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

• $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-ensembles non vides de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car ils contiennent tous les deux la matrice nulle.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit λ un réel.

Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ${}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB = \lambda A + B$ donc $\lambda A + B$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ${}^t(\lambda A + B) = \lambda {}^tA + {}^tB = \lambda(-A) - B = -(\lambda A + B)$ donc $\lambda A + B$ appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ce que le texte donnait gracieusement...).

• Montrons que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

Soit A un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On a $\varphi(A, B) = \varphi(B, A) = \text{Tr}({}^tBA) = \text{Tr}(-BA) = -\text{Tr}(BA) = -\text{Tr}(AB) = -\text{Tr}({}^tAB) = -\varphi(A, B)$.

Ainsi $\varphi(A, B) = -\varphi(A, B)$. $\varphi(A, B) = 0$. A et B sont orthogonaux.

$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \varphi(A, B) = 0$ donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

• Montrons que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.

Remarque Etant orthogonaux, leur intersection est réduite à la matrice nulle et ils sont donc en somme directe. Ne resterait plus qu'à montrer que leur somme est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour obtenir la supplémentarité. Je vous laisse cela. Je préfère réactiver une méthode standard pour montrer la supplémentarité dans des cas non triviaux.

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que A est de manière unique somme d'un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et d'un élément de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Analyse/Unicité. Supposons que A soit la somme d'un élément A' de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et d'un élément A'' de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$A = A' + A''$ et ${}^tA = {}^tA' + {}^tA'' = A' - A''$. Alors $A + {}^tA = 2A'$ et $A - {}^tA = 2A''$.

Par conséquent $A' = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ et $A'' = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$. D'où l'unicité.

Synthèse/Existence. Posons $A' = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ et $A'' = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$.

$A' + A'' = A$. De plus ${}^tA' = \frac{1}{2}({}^tA + A) = A'$ et ${}^tA'' = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -A''$; A' appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et A'' à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. D'où l'existence.

Finalement $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists!(A', A'') \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), A = A' + A''$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.

Remarque Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ est la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ étant supplémentaires et orthogonaux, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour φ .

Remarque On peut également retrouver le tout en remarquant que $f : A \rightarrow {}^tA$ est un endomorphisme symétrique et involutif de l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi)$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont, pour $n \geq 2$, les deux seuls sous-espaces propres de f ...

6 Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'après 2.3, $\forall M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2 = \|A - M\|^2$.

On cherche donc à montrer que $\text{Min}_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|^2$ existe et vaut $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - a_{ji})^2$.

Dès lors utilisons le cours pour répondre à la question. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi)$ et A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\text{Min}_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|$ existe et la projection orthogonale P_A de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'unique élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui réalise ce minimum.

Ainsi $\min_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|^2$ existe et vaut $\|A - P_A\|^2$.

Rappelons que $P_A = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$. Par conséquent $\|A - P_A\|^2 = \|\frac{1}{2}(A - {}^t A)\|^2 = \frac{1}{4}\|A - {}^t A\|^2$.

Donc $\|A - P_A\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - a_{ji})^2$.

$$\min_{\substack{(m_{ij}) \\ 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - m_{ij})^2 \text{ existe et vaut } \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - a_{ji})^2.$$

PROBLÈME

3.1 Loi du chi-deux

$$\boxed{1} \text{ Posons : } \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ et } \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

φ est une densité de X_1 et Φ est sa fonction de répartition. Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{Y_1}(x) = P(Y_1 \leq x) = P(X_1^2 \leq x).$$

$$\text{Alors : } \forall x \in]-\infty, 0[, F_{Y_1}(x) = 0 \text{ et } \forall x \in [0, +\infty[, F_{Y_1}(x) = P(-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1.$$

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 0[, F_{Y_1}(x) = 0 \text{ et } \forall x \in [0, +\infty[, F_{Y_1}(x) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - 1.}$$

$$\boxed{2} \text{ } \varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ donc } \Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \Phi' = \varphi.$$

Notons que $\forall x \in]-\infty, 0[, F_{Y_1} = 0$ ($\Phi(0) = \frac{1}{2}$). Alors F_{Y_1} est de classe $\mathcal{C}^1$ SUR $] -\infty, 0]$.

$x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc F_{Y_1} est continue SUR $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ SUR $]0, +\infty[$.

F_{Y_1} étant continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$, F_{Y_1} est continue sur $\mathbb{R}$.

F_{Y_1} étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$, F_{Y_1} est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

F_{Y_1} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points donc Y_1 est une variable aléatoire à densité.

$$\text{De plus } \forall x \in]-\infty, 0[, F'_{Y_1}(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, F'_{Y_1}(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \Phi'(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x}) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

$$\text{Posons : } \forall x \in]-\infty, 0[, f_{Y_1}(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f_{Y_1}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}-1}}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

f_{Y_1} est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui coïncide avec F'_{Y_1} sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points donc f_{Y_1} est une densité de Y_1 .

f_{Y_1} est également une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$. Finalement :

$$\boxed{Y_1 \text{ suit une loi gamma de paramètres 2 et } \frac{1}{2}.}$$

$\boxed{3}$ Notons que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes une loi normale centrée réduite. Ainsi les variables aléatoires $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$ sont indépendantes et suivent toutes une loi gamma de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$.

Le cours indique que la somme de deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois gamma de paramètres respectifs b, τ et b, τ' suit une loi gamma de paramètres $b, \tau + \tau'$.

Une récurrence simple permet alors de dire que $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ suit une loi gamma de paramètres 2 et $n \times \frac{1}{2}$.

$$\boxed{Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2 \text{ suit une loi gamma de paramètres 2 et } \frac{n}{2}.}$$

$\boxed{4}$ Comme $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$ suit une loi gamma de paramètres 2 et $\frac{n}{2}$ le programme nous permet de dire que $E(Y_n) = 2 \times \frac{n}{2} = n$.

Le programme n'exige pas la connaissance de la variance d'une loi gamma. Retrouvons cette variance.

Soit Z une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètres b et τ .

Posons $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\psi_1(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $\psi_1(x) = \frac{e^{-\frac{x}{b}} x^{\tau-1}}{b^\tau \Gamma(\tau)}$. ψ_1 est une densité de Z .

Posons encore : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $\psi_2(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $\psi_2(x) = \frac{e^{-\frac{x}{b}} x^{(\tau+2)-1}}{b^{\tau+2} \Gamma(\tau+2)}$. ψ_2 est une densité d'une variable aléatoire qui suit une loi gamma de paramètres b et $\tau+2$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, x^2 \psi_1(x) = \frac{b^{\tau+2} \Gamma(\tau+2)}{b^\tau \Gamma(\tau)} \frac{e^{-\frac{x}{b}} x^{(\tau+2)-1}}{b^{\tau+2} \Gamma(\tau+2)} = \frac{b^{\tau+2} \Gamma(\tau+2)}{b^\tau \Gamma(\tau)} \psi_2(x).$$

Notons que $\Gamma(\tau+2) = (\tau+1) \tau \Gamma(\tau)$. Alors $\frac{b^{\tau+2} \Gamma(\tau+2)}{b^\tau \Gamma(\tau)} = b^2 (\tau+1) \tau$.

Par conséquent $\forall x \in]0, +\infty[$, $x^2 \psi_1(x) = b^2 (\tau+1) \tau \psi_2(x)$. Mieux $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \psi_1(x) = b^2 (\tau+1) \tau \psi_2(x)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2(t) dt$ existe et vaut 1 donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \psi_1(t) dt$ existe et vaut $b^2 (\tau+1) \tau$. Alors $E(Z^2)$ existe et vaut $b^2 (\tau+1) \tau$.

Par conséquent Z possède une variance qui vaut $b^2 (\tau+1) \tau - (E(Z))^2 = b^2 (\tau+1) \tau - (b\tau)^2 = b^2 \tau$.

$V(Z)$ existe et vaut $b^2 \tau$. Appliqué à Y_n ce résultat permet de dire que :

$$\boxed{Y_n \text{ possède une variance qui vaut } 2n}$$

$$\boxed{5} \text{ Posons : } \forall x \in]-\infty, 0], f_{Y_n}(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f_{Y_n}(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}.$$

f_{Y_n} est une densité de Y_n nulle sur $] -\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$.

Par conséquent la fonction de répartition G_n de Y_n est nulle sur $] -\infty, 0]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $G'_n(x) = f_{Y_n}(x) > 0$.

Tout d'abord il n'existe pas de réel t appartenant à l'intervalle $] -\infty, 0]$ tel que $G_n(t) = \beta$ ($\beta > 0$).

De plus G_n est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. La restriction de G_n à $]0, +\infty[$ définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur l'intervalle $G_n(]0, +\infty[) =] \lim_{x \rightarrow 0^+} G_n(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} G_n(x)[$.

G_n étant une fonction de répartition G_n est en particulier continue en 0, ce qui donne $\lim_{x \rightarrow 0^+} G_n(x) = G_n(0) = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_n(x) = 1$.

La restriction de G_n à $]0, +\infty[$ définit donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$. Comme β appartient à $]0, 1[$, il existe un unique élément t de $]0, +\infty[$ tel que $G_n(t) = \beta$.

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } t \text{ tel que } G_n(t) = \beta}.$$

3.2 Estimation ponctuelle de σ^2 .

$$\boxed{1} \text{ Pour tout } i \text{ dans } \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \text{ possède une espérance qui vaut } m. \text{ Alors } F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ possède une espérance}$$

qui vaut $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)$ donc $\frac{1}{n} (n \times m)$ ou m (linéarité de l'espérance).

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes possédant une variance qui vaut σ^2 donc $\sum_{i=1}^n X_i$ possède une variance qui vaut $n \sigma^2$.

Alors $F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ possède une variance qui vaut $\left(\frac{1}{n}\right)^2 n \sigma^2$ ou $\frac{\sigma^2}{n}$.

$E(F_n) = m$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(F_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$. Par conséquent :

F_n est un estimateur sans biais et convergent de m .

$$\boxed{2} \text{ a) } \sum_{i=1}^n (X_i - F_n)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i F_n + F_n^2) = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) F_n + \sum_{i=1}^n F_n^2.$$

$$\sum_{i=1}^n (X_i - F_n)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2(n F_n) F_n + n F_n^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n F_n^2.$$

En multipliant par $\frac{1}{n}$ il vient : $V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - F_n^2$. Finalement :

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - F_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - F_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((X_i^2 - 2m X_i + m^2) + 2m X_i - m^2 \right) - F_n^2.$$

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 + 2m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m^2 - F_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 + 2m F_n - m^2 - F_n^2$$

Ceci donne alors sans difficulté :

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - (F_n - m)^2.$$

b) Soit i un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. X_i possède une espérance qui vaut m et une variance qui vaut σ^2 .

Donc $E((X_i - E(X_i))^2)$ existe et vaut σ^2 . Ainsi $(X_i - m)^2$ possède une espérance qui vaut σ^2 .

Alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E((X_i - m)^2)$ ou $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2$ soit encore σ^2 .

De plus nous avons vu, dans 3.2.1 que F_n possède une espérance et une variance, que $E(F_n) = m$ et que $V(F_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Alors $(F_n - m)^2$ possède une espérance qui vaut $\frac{\sigma^2}{n}$.

Finalement $V_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - (F_n - m)^2$ possède une espérance qui vaut : $E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2\right) - E((F_n - m)^2)$

ou $\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$.

$$V_n \text{ possède une espérance et } E(V_n) = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

c) Supposons $n \geq 2$. $E(V_n) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$ donc $\frac{n}{n-1} E(V_n) = \sigma^2$. Ainsi $E\left(\frac{n}{n-1} V_n\right) = \sigma^2$. Finalement :

$$\frac{n}{n-1} V_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - F_n)^2 \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma^2$$

3.3 Estimation par intervalle de confiance de σ^2 , m étant connue.

Il semble raisonnable de supposer dans la suite que α est un réel appartenant à $]0, 1[$

[1] Soit i un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Posons $Z_i = \frac{X_i - m}{\sigma}$.

X_i suit une loi normale de paramètres m et σ et $Z_i = \frac{X_i - E(X_i)}{\sqrt{V(X_i)}}$ donc Z_i suit une loi normale centrée réduite.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes donc $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ le sont également.

3.1.3 permet alors de dire que $\sum_{i=1}^n Z_i^2$ suit une loi du *Chi-deux* à n degrés de liberté.

Or $\sum_{i=1}^n Z_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - m}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 = U_n$. Finalement :

U_n suit une loi du *Chi-deux* à n degré de liberté.

[2] $n T_n = \sigma^2 U_n$ donc $\left\{ \frac{n T_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{n T_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right\} = \left\{ \frac{\sigma^2 U_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sigma^2 U_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right\} = \left\{ \frac{U_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq 1 \leq \frac{U_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right\}$.

3.1.5 nous a montré que $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ et $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ sont des réels strictement positifs. Alors :

$$\left\{ \frac{n T_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{n T_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right\} = \left\{ \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) \leq U_n \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n) \right\}.$$

U_n suit une loi du *Chi-deux* à n degrés de liberté, sa fonction de répartition est donc G_n .

Alors $P\left(\left\{ \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) \leq U_n \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n) \right\}\right) = G_n\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right) - G_n\left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$.

La probabilité de l'événement $\left\{ \frac{n T_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \leq \sigma^2 \leq \frac{n T_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)} \right\}$ est $1 - \alpha$.

3.4 Estimation par intervalle de confiance de σ^2 , m étant inconnue.

Nous supposons dans toute cette partie que n est supérieur ou égal à 2.

[1] a) A est une matrice symétrique et réelle donc A est diagonalisable.

b) Posons $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $C = AB = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $b_i = 1$.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, c_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} = a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} = n - 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-1) = n - 1 + (n - 1) \times (-1) = 0.$$

$$AB = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.$$

B n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AB = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ par conséquent :

0 est une valeur propre de A et B est un vecteur propre associé.

c) La matrice de $\varphi - n Id_{\mathbb{R}^n}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $A - n I_n$.

Il est aisé de voir que $A - n I_n$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à -1 .

Cette matrice n'est pas la matrice nulle et toutes ses colonnes sont identiques, elle est donc de rang 1.

Ainsi $\varphi - n Id_{\mathbb{R}^n}$ est de rang 1.

$$\dim \text{Im}(\varphi - n Id_{\mathbb{R}^n}) = 1.$$

d) Le théorème du rang donne $\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) + \dim \text{Im}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$.

Ainsi $n = \dim \text{Ker}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) + 1$. Par conséquent :

$$\dim \text{Ker}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = n - 1.$$

Comme $n \geq 2$, $\dim \text{Ker}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n}) = n - 1 \geq 1$. Alors $\text{Ker}(\varphi - n \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$ n'est pas réduit au vecteur nul et ainsi n est une valeur propre de φ dont le sous-espace propre est de dimension $n - 1$.

n est donc une valeur propre de A dont le sous-espace propre $\text{SEP}(A, n)$ est de dimension $n - 1$.

Rappelons que 0 est une valeur propre de A et que A est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc la somme des dimensions de ces sous espaces propres est n . Ainsi 0 et n sont les seules valeurs propres de A et le sous-espace propre $\text{SEP}(A, 0)$ associé à la valeur propre 0 est de dimension 1. Mieux $\text{SEP}(A, 0) = \text{Vect}(B)$.

A étant symétrique $\text{SEP}(A, 0)$ et $\text{SEP}(A, n)$ sont orthogonaux. Ces deux sous-espaces étant supplémentaires :

$$\text{SEP}(A, n) = \left(\text{SEP}(A, 0) \right)^\perp = \left(\text{Vect}(B) \right)^\perp$$

L'ensemble des valeurs propres de A est $\{0, n\}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est la droite vectorielle engendrée par B et celui associé à la valeur propre n est $\left(\text{Vect}(B) \right)^\perp$.

e) Nous supposons que W est un vecteur propre de A associé à la valeur propre n ...

Version 2 W est orthogonal à B donc $\langle W, B \rangle = 0$. Ainsi $\sum_{j=1}^n (w_j \times 1) = 0$ donc $\sum_{j=1}^n w_j = 0$!

Version 2 $AW = nW$. Alors : $n w_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} w_j = a_{11} w_1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n a_{1j} w_j = (n-1) w_1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n (-w_j) = n w_1 - \sum_{j=1}^n w_j$.

$n w_1 = n w_1 - \sum_{j=1}^n w_j$ donc $\sum_{j=1}^n w_j = 0$. Ainsi :

Si $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre n alors $\sum_{i=1}^n w_i = 0$.

Remarque $\text{SEP}(A, n)$ est en fait l'ensemble des éléments $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que : $\sum_{i=1}^n u_i = 0$.

f) Soit $(W_1, W_2, \dots, W_{n-1})$ une base orthonormale du sous-espace propre $\text{SEP}(A, n)$ de A associé à la valeur propre n . Soit (W_n) une base orthonormale du sous-espace propre $\text{SEP}(A, 0)$ de A associé à la valeur propre 0.

$\text{SEP}(A, n)$ et $\text{SEP}(A, 0)$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi $\mathcal{B} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $n, n, \dots, n, 0$.

Notons P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$.

P est inversible et $P^{-1} = {}^t P$ car $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont deux bases orthonormales de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

De plus $D = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale dont les $n - 1$ premiers coefficients de la diagonale valent n et le dernier 0. $D = \text{Diag}(n, n, \dots, n, 0)$...

Notons que la dernière colonne de P est W_n et que W_n est un élément de $\text{SEP}(A, 0)$ qui est la droite vectorielle engendrée par B . Ainsi la dernière colonne de P est proportionnelle à B .

Il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la première colonne est proportionnelle à B et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $P^{-1}AP = D$ avec ${}^tP = P^{-1}$. $D = \text{Diag}(n, n, \dots, n, 0)$.

g) On est prié de remarquer que ${}^tP = (p_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Soit i un élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. La $i^{\text{ème}}$ colonne de P est W_i et W_i appartient à $\text{SEP}(A, n)$. e) montre alors que la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ colonne de P est nulle.

Ainsi la somme des coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de tP est nulle. $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 0$.

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \sum_{j=1}^n p_{ij} = 0.$$

Posons $P = (q_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et ${}^tPP = (s_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. ${}^tPP = I_n$ donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 1 = s_{ii} = \sum_{j=1}^n p_{ij} q_{ji} = \sum_{j=1}^n p_{ij} p_{ij} = \sum_{j=1}^n p_{ij}^2$.

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 = 1.$$

2 a) Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = {}^tPX$ et observons que $A = PD^tP$.

$$q(X) = {}^tXMX = \frac{1}{n} {}^tXAX = \frac{1}{n} {}^tXPD^tPX = \frac{1}{n} ({}^tPX)D^tPX = \frac{1}{n} {}^tYDY.$$

Si X est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et si $Y = {}^tPX$ alors $q(X) = \frac{1}{n} {}^tYDY$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ pour simplifier les écritures.

$$q(X) = \frac{1}{n} {}^tXAX = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_i \left((n-1)x_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \right) \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_i \left(nx_i - \sum_{j=1}^n x_j \right) \right)$$

$$q(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i (nx_i - ns) = \sum_{i=1}^n x_i (x_i - s) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - s \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2s \sum_{i=1}^n x_i + s \sum_{i=1}^n x_i.$$

$$q(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2s \sum_{i=1}^n x_i + ns^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2s \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2sx_i + s^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - s)^2. \text{ Ainsi :}$$

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $q(X) = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2$.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tPX$. $q(X) = \frac{1}{n} {}^tYDY$.

$$DY = \begin{pmatrix} n y_1 \\ n y_2 \\ \vdots \\ n y_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors } q(X) = \frac{1}{n} {}^t Y D Y = \frac{1}{n} (n y_1^2 + n y_2^2 + \cdots + n y_{n-1}^2) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2.$$

$$\text{Or } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \text{ donc } q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right)^2.$$

$$\boxed{\text{Si } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ est un élément de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), q(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right)^2.}$$

3 a) Soit i un élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Posons $J = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid p_{ij} \neq 0\}$.

J n'est pas vide car la $i^{\text{ème}}$ ligne de ${}^t P$ n'est pas nulle puisque ${}^t P$ est inversible. $Y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} X_j = \sum_{j \in J} p_{ij} X_j$.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes donc $(X_j)_{j \in J}$ est une famille finie de variables aléatoires indépendantes.

$(p_{ij} X_j)_{j \in J}$ est alors également une famille finie de variables aléatoires indépendantes.

De plus pour tout j dans J , $p_{ij} X_j$ suit une loi normale car X_j suit une loi normale et p_{ij} est un réel non nul.

Le cours montre alors que $Y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} X_j = \sum_{j \in J} p_{ij} X_j$ suit une loi normale.

$$E(Y_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij} E(X_j) = \sum_{j=1}^n p_{ij} m = m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 0.$$

Rappelons que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes donc il en est de même pour $p_{i1} X_1, p_{i2} X_2, \dots, p_{in} X_n$.

$$\text{Alors } V(Y_i) = \sum_{j=1}^n V(p_{ij} X_j) = \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 V(X_j) = \sigma^2 \sum_{j=1}^n p_{ij}^2 = \sigma^2 \times 1 = \sigma^2. \text{ Ainsi :}$$

Pour tout élément i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, Y_i suit une loi normale de paramètres 0 et σ .

$$\text{b) 3.4.2 montre que : } \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right)^2. \text{ Ainsi :}$$

$$U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(X_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} X_j \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2.$$

$$\boxed{U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2.}$$

$$\text{c) Posons } \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, H_i = \frac{1}{\sigma} Y_i.$$

Soit i un élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Y_i suit une loi normale et $\frac{1}{\sigma}$ est un réel non nul donc H_i suit une loi normale.

$$E(H_i) = \frac{1}{\sigma} E(Y_i) = 0 \text{ et } V(H_i) = \frac{1}{\sigma} V(Y_i) = 1. \text{ Ainsi } H_i \text{ suit une loi normale centrée réduite.}$$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ sont mutuellement indépendantes donc $H_1, H_2, \dots, H_{n-1}$ sont mutuellement indépendantes et suivent une loi normale centrée réduite.

Alors, d'après 3.1.2, $\sum_{i=1}^{n-1} H_i^2$ suit une loi du *Chi - deux* à $n - 1$ degrés de liberté.

$$\text{Or } \sum_{i=1}^{n-1} H_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{Y_i}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^2 = U_n.$$

U_n suit une loi du *Chi - deux* à $n - 1$ degrés de liberté.

d) $(n - 1) S_n = \sigma^2 U_n$, donc :

$$\left\{ \frac{(n - 1) S_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n - 1) S_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \right\} = \left\{ \frac{\sigma^2 U_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sigma^2 U_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \right\} = \left\{ \frac{U_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \leq 1 \leq \frac{U_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \right\}.$$

3.1.5 nous a montré que $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ et $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ sont des réels strictement positifs. Alors :

$$\left\{ \frac{(n - 1) S_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n - 1) S_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \right\} = \left\{ \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1) \leq U_n \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1) \right\}.$$

e) U_n suit une loi du *Chi - deux* à $n - 1$ degrés de liberté, sa fonction de répartition est donc G_{n-1} .

Donc $P \left(\left\{ \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1) \leq U_n \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1) \right\} \right) = G_{n-1} \left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1) \right) - G_{n-1} \left(\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1) \right) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha.$

La probabilité de l'événement $\left\{ \frac{(n - 1) S_n}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n - 1) S_n}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \right\}$ est $1 - \alpha$.

Remarque Ce problème donne l'occasion de revisiter HEC 99 math 2.
