

EXERCICE 1

Remarque Dans la suite si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, nous noterons $\text{Sp } A$ l'ensemble de ses valeurs propres et $\text{SEP}(A, \lambda)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ de A .

Si α, β, γ sont trois réels nous noterons $\text{Diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

Q1. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Posons $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si a, b et c sont trois réels quelconques, I, J, K sont trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ne dépendent pas de a, b, c et $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } K^2 = I + J.$$

$$K^3 = K^2 K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2K. \text{ Donc } K^3 - 2K = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

$J^2 = I$

$K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$K^2 = I + J$

$K^3 = 2K$

$X^3 - 2X \text{ est un polynôme annulateur de } K.$

$X^3 - 2X$ est un polynôme annulateur de K et $X^3 - 2X = X(X^2 - 2) = X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.

$X^3 - 2X$ est donc un polynôme annulateur de K dont les racines sont $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$. Ainsi :

les seules valeurs propres possibles de K sont $-\sqrt{2}, 0$ et $\sqrt{2}$.

Q2. Ici il faut sans doute comprendre que P doit être une matrice orthogonale.

Remarque $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et tPKP est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ mais P^{-1} n'est pas égale à tP !!

K est une matrice symétrique et à coefficients réels donc K est diagonalisable. Mieux il existe une matrice orthogonale P , de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que tPKP soit une matrice diagonale.

Il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} = {}^tP$ et telle que $D = {}^tPKP$ soit une matrice diagonale.

Les valeurs propres possibles de K sont $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$. Regardons si ces réels sont des valeurs propres de K .

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $KX = \begin{pmatrix} y \\ x+z \\ y \end{pmatrix}$.

$$KX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x+z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}.$$

Ainsi 0 est valeur propre de K et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Soit } \varepsilon \text{ un élément de } \{-1, 1\}. KX = \varepsilon\sqrt{2}X \iff \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}x \\ x+z = \varepsilon\sqrt{2}y \\ y = \varepsilon\sqrt{2}z \end{cases} \iff \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}x \\ \varepsilon\sqrt{2}x = \varepsilon\sqrt{2}z \\ x+z = (\varepsilon\sqrt{2})^2x \end{cases}.$$

$$KX = \varepsilon\sqrt{2}X \iff \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}x \\ x = z \\ x+z = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2}x \\ z = x \end{cases}.$$

Ainsi $\varepsilon\sqrt{2}$ est valeur propre de K et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement K possède trois valeurs propres $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

Posons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\|X_1\| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2, \|X_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ et } \|X_3\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Dès lors posons $Y_1 = \frac{1}{\|X_1\|} X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \frac{1}{\|X_2\|} X_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \frac{1}{\|X_3\|} X_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Alors (Y_1) est une base orthonormée de $\text{SEP}(K, -\sqrt{2})$, (Y_2) est une base orthonormée de $\text{SEP}(K, 0)$ et (Y_3) est une base orthonormée de $\text{SEP}(K, \sqrt{2})$.

K est une matrice symétrique à coefficients réels dont les valeurs propres sont $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$. Ainsi $\text{SEP}(K, -\sqrt{2})$, $\text{SEP}(K, 0)$ et $\text{SEP}(K, \sqrt{2})$ sont trois sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \text{SEP}(K, -\sqrt{2}) \oplus \text{SEP}(K, 0) \oplus \text{SEP}(K, \sqrt{2})$ (K est diagonalisable).

Alors $\mathcal{B} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de K respectivement associés aux valeurs propres $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

Notons alors P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

$$1. P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

2. P est une matrice orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée ; ainsi P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

$$3. {}^tPKP = P^{-1}KP = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \text{Diag}(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}).$$

Si $P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$. Alors P est une matrice inversible d'inverse tP , $D = {}^tPKP$ est la matrice diagonale $\text{Diag}(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ et $-\sqrt{2} < 0 < \sqrt{2}$!

Q3. Soient a, b et c trois réels. $M = M(a, b, c) = aI + bJ + cK = aI + b(K^2 - I) + cK = (a-b)I + cK + bK^2$.

$$M = M(a, b, c) = (a-b)I + cK + bK^2.$$

$${}^tPMP = {}^tP((a-b)I + cK + bK^2)P = (a-b){}^tPIP + c{}^tPKP + b{}^tPK^2P.$$

$${}^tPMP = (a-b)P^{-1}P + cP^{-1}KP + bP^{-1}K^2P = (a-b)I + cD + b(P^{-1}KP)^2 = (a-b)I + cD + bD^2.$$

$${}^tPMP = (a-b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^2.$$

$${}^tPMP = \begin{pmatrix} a-b-c\sqrt{2}+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b+c\sqrt{2}+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-c\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Si a, b et c sont trois réels et si $M = M(a, b, c)$ alors :

$$P^{-1}MP = {}^tPMP = (a-b)I + cD + bD^2 = \begin{pmatrix} a+b-c\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ou $P^{-1}MP = {}^tPMP = \text{Diag}(a+b-c\sqrt{2}, a-b, a+b+c\sqrt{2})$.

Soient a, b et c trois réels.

$M = M(a, b, c)$ est semblable à la matrice diagonale $\text{Diag}(a + b - c\sqrt{2}, a - b, a + b + c\sqrt{2})$.

Ainsi $\text{Sp } M = \text{Sp } \text{Diag}(a + b - c\sqrt{2}, a - b, a + b + c\sqrt{2}) = \{a + b - c\sqrt{2}, a - b, a + b + c\sqrt{2}\}$.

Si a, b, c sont trois réels, l'ensemble des valeurs propres de $M = M(a, b, c)$ est $\{a + b - c\sqrt{2}, a - b, a + b + c\sqrt{2}\}$.

Soient a, b et c trois réels. Cherchons le nombre de valeurs propres distinctes de $M = M(a, b, c)$ ainsi que ses sous-espaces propres.

Posons $\lambda_1 = a + b - c\sqrt{2}$, $\lambda_2 = a - b$ et $\lambda_3 = a + b + c\sqrt{2}$.

Nous avons vu que $M = M(a, b, c)$ est diagonalisable et que $\text{Sp } M = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

$M = (a - b)I + cK + bK^2$ donc $M = Q(K)$ où Q est le polynôme $(a - b) + cX + bX^2$.

Rappelons que $Y_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs propres de K respectivement associés aux valeurs propres $-\sqrt{2}$, 0 et $\sqrt{2}$.

Alors $KY_1 = -\sqrt{2}Y_1$, $KY_2 = 0 \times Y_2$ et $KY_3 = \sqrt{2}Y_3$.

Le cours nous permet alors de dire que $MY_1 = Q(K)Y_1 = Q(-\sqrt{2})Y_1$, $MY_2 = Q(K)Y_2 = Q(0)Y_2$ et $MY_3 = Q(K)Y_3 = Q(\sqrt{2})Y_3$.

Un calcul simple (en fait déjà fait) donne $Q(-\sqrt{2}) = \lambda_1$, $Q(0) = \lambda_2$ et $Q(\sqrt{2}) = \lambda_3$.

Ainsi (Y_1, Y_2, Y_3) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

- Si λ_1, λ_2 et λ_3 sont trois réels deux à deux distincts, M admet trois valeurs propres deux à deux distinctes et les sous-espaces propres de M sont nécessairement des droites vectorielles.

Plus précisément : $\text{SEP}(M, \lambda_1) = \text{Vect}(Y_1)$, $\text{SEP}(M, \lambda_2) = \text{Vect}(Y_2)$ et $\text{SEP}(M, \lambda_3) = \text{Vect}(Y_3)$.

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, M n'admet qu'une valeur propre et comme M est diagonalisable le sous-espace propre associé est $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Supposons que deux des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ soient égaux et que le troisième soit distinct des deux précédents.

Il existe trois éléments i, j, k de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, deux à deux distinctes, et tels que $\lambda_i = \lambda_j \neq \lambda_k$.

Comme M est diagonalisable, M possède deux sous-espaces propres dont l'un est de dimension 1 et l'autre de dimension 2.

(Y_i, Y_j) est une famille libre de $\text{SEP}(M, \lambda_i)$ qui est alors de dimension au moins 2. Ce qui précède montre que $\text{SEP}(M, \lambda_i)$ est de dimension 2. (Y_i, Y_j) est finalement une base de $\text{SEP}(M, \lambda_i)$.

De plus SEP (M, λ_k) est nécessairement de dimension 1 et il est engendré par (Y_k) .

Il ne reste plus qu'à examiner les conditions sur a , b et c qui donnent ses différents cas.

$$\lambda_1 = \lambda_2 \iff a + b - \sqrt{2}c = a - b \iff 2b = \sqrt{2}c \iff c = \sqrt{2}b.$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 \iff a + b + \sqrt{2}c = a - b \iff -2b = \sqrt{2}c \iff c = -\sqrt{2}b.$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \iff a + b - \sqrt{2}c = a + b + \sqrt{2}c \iff c = 0.$$

Ainsi :

- $c = b = 0$ donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = a$;
- $c = 0$ et $b \neq 0$ donne $\lambda_1 = \lambda_3 = a + b \neq \lambda_2 = a - b$;
- $c = \sqrt{2}b$ et $b \neq 0$ donne $\lambda_1 = \lambda_2 = a - b \neq \lambda_3 = a + 3b$;
- $c = -\sqrt{2}b$ et $b \neq 0$ donne $\lambda_2 = \lambda_3 = a - b \neq \lambda_1 = a + 3b$;
- dans les autres cas λ_1 , λ_2 et λ_3 sont trois réels deux à deux distincts.

Il ne reste plus qu'à conclure en faisant la synthèse des résultats obtenus.

Si $b = c = 0$, $M = M(a, b, c)$ admet une seule valeur propre a et SEP $(M, a) = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Si $c = 0$ et $b \neq 0$, $M = M(a, b, c)$ admet deux valeurs propres distinctes : $a + b$ et $a - b$.

Dans ce cas SEP $(M, a + b) = \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right)$ et SEP $(M, a - b) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$.

Si $c = \sqrt{2}b$ et $b \neq 0$, $M = M(a, b, c)$ admet deux valeurs propres distinctes : $a - b$ et $a + 3b$.

Dans ce cas SEP $(M, a - b) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$ et SEP $(M, a + 3b) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right)$.

Si $c = -\sqrt{2}b$ et $b \neq 0$, $M = M(a, b, c)$ admet deux valeurs propres distinctes : $a - b$ et $a + 3b$.

Dans ce cas SEP $(M, a - b) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right)$ et SEP $(M, a + 3b) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right)$.

Dans les autres cas $M = M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres deux à deux distinctes $a + b - \sqrt{2}c$, $a - b$ et $a + b + \sqrt{2}c$.

$$\text{De plus } \text{SEP}(M, a + b - \sqrt{2}c) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right), \text{SEP}(M, a - b) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) \text{ et} \\ \text{SEP}(M, a + b + \sqrt{2}c) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right).$$

4. Ici $a = 4$, $b = 2$ et $c = \sqrt{2}$.

$$\text{Alors } M = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 6 & \sqrt{2} \\ 2 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 4 + 2 - \sqrt{2}\sqrt{2} = 4, \lambda_2 = 4 - 2 = 2 \text{ et } \lambda_3 = 4 + 2 + \sqrt{2}\sqrt{2} = 8.$$

M admet trois valeurs propres distinctes 4, 2 et 8. De plus :

$$\text{SEP}(M, 4) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right), \text{SEP}(M, 2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) \text{ et } \text{SEP}(M, 8) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{Si } P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} \text{ alors } {}^tPMP = P^{-1}MP \text{ est la matrice diagonale } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

L'énoncé est encore approximatif à ce niveau. Dans la suite (x, y, z) est implicitement un élément de $\mathbb{R}^3 - \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et ainsi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un élément non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\text{a. i. } \|X'\|^2 = {}^tX'X' = {}^t({}^tPX){}^tPX = {}^tX({}^tP){}^tPX = {}^tXP{}^tPX = {}^tXPP^{-1}X = {}^tXX = \|X\|^2.$$

$$\boxed{\|X'\|^2 = \|X\|^2.}$$

$${}^tXMX = {}^tXPD{}^tPX = {}^t({}^tPX)D{}^tPX = {}^tX'DX' = (x' y' z') \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (x' y' z') \begin{pmatrix} 4x' \\ 2y' \\ 8z' \end{pmatrix}.$$

Ainsi ${}^tXMX = 4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2$. De plus $\|X\|^2 = \|X'\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Alors

$$\boxed{f(x, y, z) = \frac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}.}$$

a. ii. $2(x'^2 + y'^2 + z'^2) \leq 4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 \leq 8(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ car x'^2, y'^2, z'^2 sont trois réels positifs.

Donc $2 \leq \frac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} \leq 8$ et ainsi $2 \leq f(x, y, z) \leq 8$ puisque $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \|X\|^2 > 0$.

$$f(x, y, z) = 2 \iff 4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = 2(x'^2 + y'^2 + z'^2) \iff 2x'^2 + 6z'^2 = 0 \iff x' = z' = 0.$$

$$f(x, y, z) = 8 \iff 4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2 = 8(x'^2 + y'^2 + z'^2) \iff 4x'^2 + 6y'^2 = 0 \iff x' = y' = 0.$$

$$\text{Or } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = X' = {}^t P X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}y + z) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - z) \\ z' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{2}y + z) \end{cases}.$$

$$\text{Alors } f(x, y, z) = 2 \iff \begin{cases} x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, 0, -1))$$

$$\text{Et } f(x, y, z) = 8 \iff \begin{cases} x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = \frac{2x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x \end{cases} \iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1))$$

Résumons. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0_{\mathbb{R}^3}\}, 2 \leq f(x, y, z) \leq 8$.

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0_{\mathbb{R}^3}\}, f(x, y, z) = 2 \iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, 0, -1)).$$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0_{\mathbb{R}^3}\}, f(x, y, z) = 8 \iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1)).$$

Le minimum de f est 2 et il est atteint en tout point de $\text{Vect}((1, 0, -1)) - \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
Le maximum de f est 8 et il est atteint en tout point de $\text{Vect}((1, \sqrt{2}, 1)) - \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Remarque Les fans de Rayleigh ne seront pas surpris par ces résultats...

b. i. Soit B une solution de l'équation $BM = BB^2 = B^3 = B^2B = MB$.

B et M commutent.

Soit λ une valeur propre de M et X un élément du sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ .

$BMX = MBX$ donc $B(\lambda X) = MBX$ ou $MBX = \lambda BX$; ainsi BX appartient à E_λ .

Si λ une valeur propre de M et X un élément du sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ alors BX appartient à E_λ

Soit Y un vecteur propre de M . Notons γ la valeur propre associée. $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $MY = \gamma Y$.

M ayant trois valeurs propres deux à deux distinctes, ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Ainsi le sous-espace propre E_γ de M associé à la valeur propre γ est $\text{Vect}(Y)$.

Or $BY \in E_\gamma$ donc il existe un réel γ' tel que $BY = \gamma' Y$. Comme Y n'est pas nul, c'est un vecteur propre de B (associé à la valeur propre γ').

Les vecteurs propres de M sont des vecteurs propres de B .

Montrons que $\Delta = {}^tPBP$ est une matrice diagonale. Notons (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit j un élément de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$. PE_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de P c'est donc Y_j . $PE_j = Y_j$ et $P^{-1}Y_j = E_j$.

De plus Y_j est un vecteur propre de M donc de B ; $\exists \alpha_j \in \mathbb{R}, BY_j = \alpha_j Y_j$.

Alors $\Delta E_j = {}^tPBPE_j = P^{-1}BY_j = \alpha_j P^{-1}Y_j = \alpha_j E_j$.

Ainsi la $j^{\text{ème}}$ colonne de Δ est $\alpha_j E_j$ et ceci pour tout élément j de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$. Donc $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$.

$\Delta = {}^tPBP$ est une matrice diagonale.

b. ii. Oublions pudiquement le texte et résolvons l'équation.

Nous venons de voir que si B est solution de l'équation il existe une matrice diagonale Δ telle que

$$\Delta = {}^tPBP = P^{-1}BP \text{ ou telle que } B = P\Delta^tP = P\Delta P^{-1}.$$

Ainsi les solutions de l'équation sont "de la forme" $P\Delta^tP = P\Delta P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Considérons alors une matrice diagonale $\Delta = \text{Diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et posons $B = P\Delta^tP = P\Delta P^{-1}$.

$$\text{Alors } B^2 = M \iff (P\Delta P^{-1})^2 = M \iff P\Delta^2 P^{-1} = M \iff \Delta^2 = P^{-1}MP = \text{Diag}(4, 2, 8).$$

$$B^2 = M \iff \Delta^2 = \text{Diag}(4, 2, 8) \iff \text{Diag}(\delta_1^2, \delta_2^2, \delta_3^2) = \text{Diag}(4, 2, 8) \iff \begin{cases} \delta_1^2 = 4 \\ \delta_2^2 = 2 \\ \delta_3^2 = 8 \end{cases}.$$

$$B^2 = M \iff \begin{cases} \delta_1 = 2 \text{ ou } \delta_1 = -2 \\ \delta_2 = \sqrt{2} \text{ ou } \delta_2 = -\sqrt{2} \\ \delta_3 = 2\sqrt{2} \text{ ou } \delta_3 = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B^2 = M(4, 2, \sqrt{2})$ est :

$$\left\{ P \begin{pmatrix} 2\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\varepsilon' & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}\varepsilon'' \end{pmatrix} {}^tP; (\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \in \{-1, 1\}^3 \right\}.$$

Ou encore :

$$\left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon + \sqrt{2}\varepsilon' + \sqrt{2}\varepsilon'' & 2\varepsilon'' - \sqrt{2}\varepsilon & \varepsilon - \sqrt{2}\varepsilon' + \sqrt{2}\varepsilon'' \\ 2\varepsilon'' - \sqrt{2}\varepsilon & 2\varepsilon + 2\sqrt{2}\varepsilon'' & 2\varepsilon'' - \sqrt{2}\varepsilon \\ \varepsilon - \sqrt{2}\varepsilon' + \sqrt{2}\varepsilon'' & 2\varepsilon'' - \sqrt{2}\varepsilon & \varepsilon + \sqrt{2}\varepsilon' + \sqrt{2}\varepsilon'' \end{pmatrix}; (\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \in \{-1, 1\}^3 \right\}.$$

Il n'échappera alors à personne que :

l'ensemble des solutions de l'équation $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B^2 = M(4, 2, \sqrt{2})$ est :

$$\left\{ M \left(\frac{\varepsilon + \sqrt{2}\varepsilon' + \sqrt{2}\varepsilon''}{2}, \frac{\varepsilon - \sqrt{2}\varepsilon' + \sqrt{2}\varepsilon''}{2}, \frac{2\varepsilon'' - \sqrt{2}\varepsilon}{2} \right) ; (\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \in \{-1, 1\}^3 \right\}.$$

EXERCICE 2

1. Montrons par récurrence que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n \geq \sqrt{n}$.

- La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 \geq 0$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n + 1$.

u_n est défini et $u_n \geq \sqrt{n} \geq 0$. Ainsi $n + 1 + u_n \geq n + 1 \geq 0$.

Alors $u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + u_n}$ est défini et $u_{n+1} \geq \sqrt{n + 1}$. Ceci achève la récurrence.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n \geq \sqrt{n}$.

2. a. Soit x un élément de $\mathbb{R}^+$. $(1 - \sqrt{x})^2 \geq 0$ donc $1 + x - 2\sqrt{x} \geq 0$ et ainsi $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1 + x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1 + x).$$

b. Montrons par récurrence que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

- La propriété est vraie pour $n = 0$ car $u_0 \leq u_0 = 0 + \frac{u_0}{2^0}$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n + 1$.

$n + 1 + u_n$ appartient à $\mathbb{R}^+$ donc $u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + u_n} \leq \frac{1}{2}(1 + n + 1 + u_n) = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}u_n$.

L'hypothèse de récurrence donne alors : $u_{n+1} \leq 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\left(n + \frac{u_0}{2^n}\right) = 1 + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \frac{u_0}{2^{n+1}} = n + 1 + \frac{u_0}{2^{n+1}}$.

Ainsi s'achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}.$$

Ce qui précède donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{n-1} \leq n - 1 + \frac{u_0}{2^{n-1}} \leq n + \frac{u_0}{2^{n-1}}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{u_{n-1}}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{u_0}{2^{n-1}}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \frac{u_0}{2^{n-1}} \right) = 0 + 0 \times 0 = 0$.

Il vient alors par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{n^2} = 0$.

La suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

c. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n}{n} = \sqrt{\frac{n+u_{n-1}}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \sqrt{0+0} = 0$.

La suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \leq u_n = \sqrt{n+u_{n-1}}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$!!

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n-1}}{n-1} \frac{n-1}{n}\right) = 0 \times 1 = 0$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} = 1$. L'encadrement obtenu plus haut donne alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$. Ainsi :

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

Remarque Il est clair que l'encadrement est parfaitement inutile et que le résultat s'obtient presque directement.

3.

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ au voisinage de 0.

Donc $\sqrt{1+x} - 1 = \frac{1}{2}x + o(x)$ au voisinage de 0. Alors $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0$, donc $u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left[\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \frac{1}{2} \frac{u_{n-1}}{n}$.

Comme $u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n-1}$ alors $u_n - \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \frac{\sqrt{n-1}}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2}$.

La suite de terme général $w_n = u_n - \sqrt{n}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{n - (n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$.

Comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 0.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n-1} = (u_n - \sqrt{n}) - (u_{n-1} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_{n-1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_{n-1}) = 0.$$

Ce résultat peut encore s'écrire : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq p \Rightarrow |u_n - u_{n-1}| < \varepsilon$.

En prenant ε égal à $\frac{1}{2}$ on obtient l'existence d'un élément N_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - u_{n-1}| < \frac{1}{2} \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N_0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < u_n - u_{n-1} < \frac{1}{2}.$$

Il en résulte que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N_0 \Rightarrow u_{n-1} - \frac{1}{2} < u_n$.

Comme N_0 appartient à $\mathbb{N}^*$, on peut encore écrire $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow u_{n-1} - \frac{1}{2} < u_n$.

Ce qui permet très largement d'affirmer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow u_{n-1} - \frac{1}{2} \leq u_n$.

Ainsi, conformément au texte on peut dire :

$$\text{Il existe un entier naturel } N_0 \text{ tel que pour tout entier naturel } n, \text{ si } n \geq N_0 \text{ alors } u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}.$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1+u_n} - \sqrt{n+u_{n-1}}$. Alors :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{n+1+u_n} - \sqrt{n+u_{n-1}})(\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}})}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}} = \frac{(n+1+u_n) - (n+u_{n-1})}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}}.$$

$$\text{Finalement } u_{n+1} - u_n = \frac{1 + u_n - u_{n-1}}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}}.$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$ car $\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}$ est strictement positif.

$$\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n \text{ est du signe de } 1 + u_n - u_{n-1}.$$

Soit n un entier naturel tel que $n \geq N_0$.

Alors $u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}$ donc $1 + u_n - u_{n-1} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ainsi $1 + u_n - u_{n-1}$ est très largement positif.

Or $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$ (car n est dans $\mathbb{N}^*$ puisque $N_0 \in \mathbb{N}^*$) donc $u_{n+1} - u_n$ est positif.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi :

$$\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante à partir d'un certain rang.}$$

5. Voici une version récursive.

```

1 Function suite(n:integer;u_0:real):real;
2
3 begin
4 if n=0 then suite:=u_0
5     else suite:=sqrt(n+suite(n-1,u_0));
6 end;

```

Ajoutons une version itérative sans doute plus raisonnable...

```

1 Function suite(n:integer;u_0:real):real;
2
3 var i:integer; a:real;
4 begin
5 a:=u_0;
6 for i:=1 to n do
7 a:=sqrt(i+a);
8 suite:=a;
9 end;

```

PROBLÈME

Partie I : Un calcul d'intégrale.

1. Soit α un réel. $\widehat{f}_\alpha : t \rightarrow \frac{1}{(1+t^2)^\alpha}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

Notons que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$ converge et que $\widehat{f}_\alpha(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2\alpha}}$.

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2\alpha}}$.

Cette dernière intégrale converge si et seulement si $2\alpha > 1$ ou $\alpha > \frac{1}{2}$. Finalement :

Pour tout réel α , l'intégrale $J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

2. Soit α un réel de l'intervalle $[1, +\infty[$ (ou de l'intervalle $]\frac{1}{2}, +\infty[$). $h_\alpha : t \rightarrow \frac{t^2}{(1+t^2)^\alpha}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Fixons A dans $[0, +\infty[$ et posons $\forall t \in [0, +\infty[$, $u(t) = t$ et $v(t) = -\frac{1}{2\alpha} \frac{1}{(1+t^2)^\alpha}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

De plus : $\forall t \in [0, +\infty[$, $u'(t) = 1$, $\forall t \in [0, +\infty[$, $v'(t) = -\frac{1}{2\alpha} \left(-\frac{\alpha(2t)(1+t^2)^{\alpha-1}}{(1+t^2)^{2\alpha}} \right) = \frac{t}{(1+t^2)^{\alpha+1}}$.

Notons que $h_\alpha = u v'$. Une intégration par parties alors claire donne :

$$\int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt = \left[t \left(-\frac{1}{2\alpha} \frac{1}{(1+t^2)^\alpha} \right) \right]_0^A - \int_0^A 1 \times \left(-\frac{1}{2\alpha} \right) \frac{1}{(1+t^2)^\alpha} dt.$$

$$\int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt = -\frac{1}{2\alpha} \frac{A}{(1+A^2)^\alpha} + \frac{1}{2\alpha} \int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}.$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A}{(1+A^2)^\alpha} = 0 \text{ car } \frac{A}{(1+A^2)^\alpha} \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A}{A^{2\alpha}} = \frac{1}{A^{2\alpha-1}} \text{ et } 2\alpha - 1 > 0.$$

$$\text{Nous avons également } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} = J_\alpha. \text{ Alors } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha.$$

Pour tout réel α de $[1, +\infty[$ (ou de $]\frac{1}{2}, +\infty[$), $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt$ existe et vaut $\frac{1}{2\alpha} J_\alpha$.

Soit α un réel de l'intervalle $[1, +\infty[$ (ou de l'intervalle $]\frac{1}{2}, +\infty[$).

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt + J_{\alpha+1} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(1+t^2)^{\alpha+1}} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt.$$

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt + J_{\alpha+1} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} = J_\alpha.$$

$$\text{Ainsi } J_{\alpha+1} = J_\alpha - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}} dt = J_\alpha - \frac{1}{2\alpha} J_\alpha = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} J_\alpha.$$

Pour tout réel α de $[1, +\infty[$ (ou de $]\frac{1}{2}, +\infty[$), $J_{\alpha+1} = \frac{2\alpha-1}{2\alpha} J_\alpha$.

$$\mathbf{3.} \quad J_1 = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan t]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}.$$

$$J_1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$“J_n = \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} \times \frac{2(n-2)-1}{2(n-2)} \times \dots \times \frac{2 \times 1 - 1}{2 \times 1} \times J_1 = \frac{(2n-3)(2n-5) \dots (1)}{2^{n-1} (n-1)!} J_1”$$

$$“J_n = \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5) \dots (2)(1)}{2^{n-1} (n-1)! (2(n-1))(2(n-2)) \dots (2)} J_1 = \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1} (n-1)!]^2} J_1”$$

$$\text{Montrons alors par récurrence que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1} (n-1)!]^2} J_1.$$

- La propriété est vraie pour $n = 1$ car pour $n = 1$, $\frac{(2n-2)!}{[2^{n-1} (n-1)!]^2} = \frac{0!}{[1 \times 0!]^2} = 1$.

- Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n = \frac{2n-1}{2n} \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1} (n-1)!]^2} J_1 = \frac{(2n)(2n-1)}{(2n)^2} \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1} (n-1)!]^2} J_1.$$

$$J_{n+1} = \frac{(2n)!}{[2n \cdot 2^{n-1} (n-1)!]^2} J_1 = \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2} J_1, \text{ ce qui achève la récurrence.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1}(n-1)!]^2} J_1 = \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1}(n-1)!]^2} \frac{\pi}{2}.$$

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté.

1. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrons d'abord l'existence de $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt$. Notons que g_n est continue, paire et (strictement) positive sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt$ il suffit donc de montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ ou de $\int_1^{+\infty} g_n(t) dt$

$$g_n(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{t^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = 2^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{t^{n+1}}, \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} \text{ converge car } n+1 > 1 \text{ et } g_n \text{ est positive sur } [1, +\infty[.$$

Les règles de comparaisons des intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} g_n(t) dt$ et ainsi de $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt$.

g_n étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n dt$ est également strictement positive.

Posons alors $k_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt$; k_n est un réel strictement positif. Posons encore $f_n = \frac{1}{k_n} g_n$.

- f_n est continue sur $\mathbb{R}$ car g_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- f_n est positive sur $\mathbb{R}$ car g_n est positive sur $\mathbb{R}$ et k_n est un réel strictement positif.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$ converge car $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt$ converge.

Mieux $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt = \frac{1}{k_n} k_n = 1$. Finalement :

$$\text{si } n \text{ appartient à } \mathbb{N}^* \text{ et si } k_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt, f_n = \frac{1}{k_n} g_n \text{ est une densité de probabilité.}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. g_n étant paire sur $\mathbb{R}$, $k_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.

$\varphi : t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{n}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante. Elle définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Ceci suffit pour s'autoriser à faire le changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$ dans $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$. On obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt = \int_0^{+\infty} \left((1+u^2)^{-\frac{n+1}{2}} \sqrt{n}\right) du = \sqrt{n} J_{\frac{n+1}{2}}. \text{ Ainsi :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, k_n = 2 \sqrt{n} J_{\frac{n+1}{2}}.$$

2. a. et b. Gagnons un peu de temps en fixant r dans $\mathbb{N}^*$ et en étudiant l'existence d'un moment d'ordre r pour X .

Il s'agit donc d'étudier l'existence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_n(t) dt$ ou de $\int_0^{+\infty} t^r f_n(t) dt$ car f_n a la parité de r sur $\mathbb{R}$.

Observons que $t \rightarrow t^r f_n(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Notons encore que $\int_0^{+\infty} t^r f_n(t) dt$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} t^r g_n(t) dt$ converge ou si et seulement si $\int_1^{+\infty} t^r g_n(t) dt$ converge.

Retenons alors que X possède un moment d'ordre r si et seulement si $\int_1^{+\infty} t^r g_n(t) dt$ converge et étudions la nature de cette intégrale.

$t \rightarrow t^r g_n(t)$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. De plus :

$$t^r g_n(t) = t^r \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^r \left(\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = n^{\frac{n+1}{2}} t^r t^{-(n+1)} = \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{t^{n+1-r}}.$$

Ainsi $\int_1^{+\infty} t^r g_n(t) dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{t^{n+1-r}} dt$. Cette dernière intégrale converge si et seulement si $n+1-r > 1$ ou $n > r$. Finalement :

X possède un moment d'ordre r si et seulement si $n > r$.

X possède une espérance si et seulement si $n > 1$.

X possède un moment d'ordre 2 ou une variance si et seulement si $n > 2$.

$t \rightarrow t f_n(t)$ étant impaire sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = 0$ pourvu que l'on ait $n > 1$. Finalement :

Si $n > 1$, $E(X) = 0$.

Supposons $n > 2$. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} t^2 f_n(t) dt$.

$$V(X) = \frac{2}{k_n} \int_0^{+\infty} t^2 g_n(t) dt = \frac{2}{k_n} \int_0^{+\infty} t^2 \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt.$$

Le changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$ déjà justifié dans **Q1** donne alors :

$$V(X) = \frac{2}{k_n} \int_0^{+\infty} \left(n u^2 (1 + u^2)^{-\frac{n+1}{2}} \sqrt{n}\right) du = \frac{2\sqrt{n}n}{k_n} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1 + u^2)^{\frac{n-1}{2}+1}} du.$$

En remarquant que $\frac{n-1}{2} \geq 1$ (car $n \geq 3$) et en appliquant **I Q2** on obtient :

$$V(X) = \frac{2\sqrt{n}n}{k_n} \frac{1}{2\left(\frac{n-1}{2}\right)} J_{\frac{n-1}{2}} = \frac{2\sqrt{n}n}{(n-1)k_n} J_{\frac{n-1}{2}}.$$

Or $k_n = 2\sqrt{n} J_{\frac{n+1}{2}}$ et, d'après **I Q2**, $J_{\frac{n+1}{2}} = J_{\frac{n-1}{2}+1} = \frac{2 \frac{n-1}{2} - 1}{2 \frac{n-1}{2}} J_{\frac{n-1}{2}} = \frac{n-2}{n-1} J_{\frac{n-1}{2}}$ (toujours parce que $\frac{n-1}{2} \geq 1$). Alors $k_n = 2\sqrt{n} \frac{n-2}{n-1} J_{\frac{n-1}{2}}$.

$$\text{Ainsi } V(X) = \frac{2\sqrt{n}n}{(n-1)2\sqrt{n}\frac{n-2}{n-1}J_{\frac{n-1}{2}}} J_{\frac{n-1}{2}} = \frac{n}{n-2}.$$

$$\boxed{\text{Si } n > 2, V(X) = \frac{n}{n-2}.$$

Partie III : Simulation d'une loi.

1. Posons $T = \tan \Theta$ et notons F_T la fonction de répartition de T et F_Θ celle de Θ .

$$\text{Rappelons que } \forall x \in \left] -\infty, -\frac{\pi}{2} \right[, F_\Theta(x) = 0, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, F_\Theta(x) = \frac{x - (-\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\pi} \left[x + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{et } \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty \right[, F_\Theta(x) = 1.$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = P(T \leq x) = P(\tan \Theta \leq x) = P(\Theta \leq \arctan x)$ car $\arctan$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et Θ prend ses valeurs dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, \arctan x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \text{ par conséquent : } \forall x \in \mathbb{R}, F_T(x) = F_\Theta(\arctan x) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan x + \frac{\pi}{2} \right].$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F_T(x) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan x + \frac{\pi}{2} \right].}$$

$\arctan$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même pour $F_T : x \rightarrow \frac{1}{\pi} \left[\arctan x + \frac{\pi}{2} \right]$.

Ainsi F_T est une variable aléatoire à densité et F'_T en est une densité.

Notons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_T(t) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Alors $F'_T = f_1$. Finalement :

$$\boxed{T = \tan \Theta \text{ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité } f_1 : x \rightarrow \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

2. $Y = \tan \Theta = T$!! Ainsi Y est une variable aléatoire à densité admettant pour densité f_1 . Par conséquent :

$$\boxed{Y = \tan \Theta \text{ et } Y \text{ suit une loi de Cauchy.}}$$

3. Réécrivons le programme pour commencer.

```
1 Program simu;
2 var u,x:real;
3 begin
4   randomize;
5   u:=pi*random-pi/2;
6   x:=sin(u)/cos(u);
7   writeln(x);
8 end.
```

Random fournit un réel choisi au hasard dans l'intervalle $[0, 1[$. Comme $z \rightarrow \pi x - \frac{\pi}{2}$ définit une bijection de $[0, 1[$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, l'instruction **u:=pi*random-pi/2** affecte à la variable u un réel choisit au hasard dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On affecte alors à la variable x la tangente de ce nombre et on l'affiche.

Rassurons nous en disant que la probabilité pour que l'on affecte à u la valeur $-\frac{\pi}{2}$ est nulle.

Ainsi ce programme simule la variable aléatoire $Y = \tan \Theta$ qui suit une loi de Cauchy.

Ce programme simule la loi de Cauchy.

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales.

1. a. Y est une variable aléatoire à densité de densité f . Le cours, ou presque, nous dit alors que $-Y = (-1)Y$ est une variable aléatoire à densité admettant $x \rightarrow \frac{1}{|-1|} f\left(\frac{x-0}{-1}\right)$ ou $x \rightarrow f(-x)$ pour densité.

$-Y$ est une variable aléatoire à densité admettant $x \rightarrow f(-x)$ pour densité.

Notons que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.

Montrons que Y et $-Y$ ont même loi si et seulement si f est paire.

- Supposons que Y et $-Y$ ont même loi. Y et $-Y$ ont même fonction de répartition. Notons $\hat{F}$ celle de $-Y$. Par hypothèse $\hat{F} = F$.

f étant continue sur $\mathbb{R}$, $x \rightarrow f(-x)$ est une densité de $-Y$ continue sur $\mathbb{R}$. Alors $\hat{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{F}'(x) = f(-x)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \hat{F}'(x) = F'(x) = f(x)$. Donc f est paire sur $\mathbb{R}$.

- Supposons que f est paire sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. Ainsi f est une densité de Y et de $-Y$ donc Y et $-Y$ ont même loi.

Y et $-Y$ ont même loi si et seulement si f est paire.

Dans la suite de ce **a**, f est paire donc Y et $-Y$ ont même loi. Ainsi $\hat{F} = F$.

$\forall x \in]-\infty, 0[, G(x) = P(|Y| \leq x) = 0.$

$\forall x \in [0, +\infty[, G(x) = P(|Y| \leq x) = P(-x \leq Y \leq x) = P(Y \leq x) - P(Y < -x).$

$\forall x \in [0, +\infty[, G(x) = P(Y \leq x) - P(-Y > x) = P(Y \leq x) - (1 - P(-Y \leq x)) = F(x) - (1 - \hat{F}(x)).$

$$\forall x \in [0, +\infty[, G(x) = F(x) - (1 - F(x)) = 2F(x) - 1.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 2F(x) - 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}}$$

$$f \text{ est paire sur } \mathbb{R} \text{ donc } F(0) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt - \int_{-\infty}^0 f(t) dt = 1 - F(0).$$

Alors $2F(0) - 1 = 0$ et ainsi $F(0) = \frac{1}{2}$. On peut alors écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 2F(x) - 1 & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

G est nulle sur $] -\infty, 0]$ donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0]$.

F étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ il en est de même pour $2F - 1$. Ainsi G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

G étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$:

1. G est continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$;
2. G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \{0\}$ au moins.

Ceci suffit pour dire que $|Y|$ est une variable aléatoire à densité.

$$\forall x \in]-\infty, 0[, G'(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, G'(x) = 2F'(x) = 2f(x).$$

$$\text{Posons alors } \forall x \in]-\infty, 0[, g(x) = 0 \text{ et } \forall x \in [0, +\infty[, g(x) = 2f(x).$$

g est une fonction numérique positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec G' sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points donc g est une densité de $|Y|$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 2f(x) & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases} \text{ est une densité de } |Y|.$$

b. Soit x un élément de $]0, +\infty[$. $|Y|$ est une variable aléatoire à densité donc $P(|Y| = x) = 0$.

Alors $0 = P(|Y| = x) = P(Y = x) + P(Y = -x) = P(Y = x) + P(-Y = x) = 2P(Y = x)$ car Y et $-Y$ ont même loi. Donc $P(Y = x) = 0$.

$$0 = P(|Y| = 0) = P(Y = 0); P(Y = 0) = 0.$$

Soit x un réel strictement négatif. $-x$ est strictement positif donc $P(Y = -x) = 0$. Alors $P(-Y = x) = 0$ donc $P(Y = x) = 0$ toujours parce que Y et $-Y$ ont même loi. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, P(Y = x) = 0.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(Y \leq x) = P(Y < x) + P(Y = x) = P(Y < x) = 1 - P(Y \geq x) = 1 - P(-Y \leq -x).$$

Y et $-Y$ ayant même loi il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 1 - P(Y \leq -x) = 1 - F(-x)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 1 - F(-x).}$$

Soit x un élément de $[0, +\infty[$. $G(x) = P(|Y| \leq x) = P(-x \leq Y \leq x) = P(Y \leq x) - P(Y < -x)$.

Or $P(Y = -x) = 0$ donc $G(x) = P(Y \leq x) - P(Y \leq -x) = F(x) - F(-x) = F(x) - (1 - F(x)) = 2F(x) - 1$.

Ainsi $\forall x \in [0, +\infty[, F(x) = \frac{1 + G(x)}{2}$.

$\forall x \in]-\infty, 0], -x \in [0, +\infty[$ donc $\forall x \in]-\infty, 0], F(-x) = \frac{1 + G(-x)}{2}$.

Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0], F(x) = 1 - F(-x) = 1 - \frac{1 + G(-x)}{2} = \frac{1 - G(-x)}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{1 - G(-x)}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \frac{1 + G(x)}{2} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases} \quad \text{ou } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{1 - G(-x)}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1 + G(x)}{2} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases} !!}$$

Montrons alors que Y est une variable aléatoire à densité. Il suffit de montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

$|Y|$ est une variable aléatoire à densité donc g est continue sur $\mathbb{R} - D$ où D est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$.

Alors G est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - D$ et $\forall x \in \mathbb{R} - D, G'(x) = g(x)$.

$x \rightarrow -x$ et G sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $x \rightarrow \frac{1 + G(x)}{2}$ et $x \rightarrow \frac{1 - G(-x)}{2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc F est continue sur $] - \infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$.

Posons $D_1 = D \cap]0, +\infty[$ et $D_2 = \{-x; x \in D_1\}$.

G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - D$ donc $\frac{1 + G}{2}$ aussi.

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[-D_1$ et $\forall x \in]0, +\infty[-D_1, F'(x) = \frac{1}{2} G'(x) = \frac{1}{2} g(x) = \frac{1}{2} g(|x|) !$

$x \rightarrow -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}, \forall x \in]-\infty, 0[-D_2, -x \in \mathbb{R} - D$ et G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - D$.

Alors $x \rightarrow \frac{1 - G(-x)}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[-D_2 ; F$ également.

De plus $\forall x \in]-\infty, 0[-D_2, F'(x) = \frac{1}{2} G'(-x) = \frac{1}{2} g(-x) = \frac{1}{2} g(|x|)$.

Posons $\Delta = D_1 \cup D_2 \cup \{0\}$. Δ est une partie finie de $\mathbb{R}$ et F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} - \Delta$. Ceci achève alors de prouver que :

$$\boxed{Y \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} g(|x|)$. f est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide sur $\mathbb{R} - \Delta$, donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points, avec G' . Ainsi f est une densité de $Y = |X|$.

$$f : x \rightarrow \frac{1}{2} g(|x|) \text{ est une densité de } Y.$$

2. Oui on peut toujours faire le changement de variable $u = e^{2t}$ mais il semble plus raisonnable de remarquer que $t \rightarrow -\frac{1}{c} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \rightarrow e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}}$.

Notons que $t \rightarrow e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Soit } A \text{ un réel. } \int_0^A e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}} dt = \left[-\frac{1}{c} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}} \right]_0^A = -\frac{1}{c} e^{-\frac{c e^{2A}}{2}} + \frac{1}{c} e^{-\frac{c}{2}}.$$

$$\text{Alors } \int_A^0 e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}} dt = \frac{1}{c} e^{-\frac{c e^{2A}}{2}} - \frac{1}{c} e^{-\frac{c}{2}}.$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{c e^{2A}}{2} = -\infty \text{ donc } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}} dt = \frac{1}{c} e^{-\frac{c}{2}}. \text{ Alors } \int_0^{+\infty} e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}} dt \text{ existe et vaut } \frac{1}{c} e^{-\frac{c}{2}}.$$

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} -\frac{c e^{2A}}{2} = 0 \text{ donc } \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}} dt = \frac{1}{c} - \frac{1}{c} e^{-\frac{c}{2}}. \text{ Alors } \int_{-\infty}^0 e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}} dt \text{ existe et vaut } \frac{1}{c} - \frac{1}{c} e^{-\frac{c}{2}}.$$

$$\text{Ainsi } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}} dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{c} - \frac{1}{c} e^{-\frac{c}{2}} + \frac{1}{c} e^{-\frac{c}{2}} = \frac{1}{c}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} e^{-\frac{c e^{2t}}{2}} dt \text{ converge et vaut } \frac{1}{c}.$$

3. a. Notons Φ la fonction de répartition de X . φ est une densité de X continue sur $\mathbb{R}$ donc Φ est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi$. Rappelons également que $\forall t \in [0, +\infty[$, $P(|X| \leq t) = 2\Phi(t) - 1$.

Cherchons maintenant la fonction de répartition F_Z de Z .

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(Z \leq x) = P(\ln |X| \leq x) = P(|X| \leq e^x) = 2\Phi(e^x) - 1.$$

Φ et $x \rightarrow e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition $x \rightarrow \Phi(e^x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Il est alors de même pour F_Z et ainsi :

$$Z \text{ est une variable aléatoire à densité.}$$

Z étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, F'_Z est une densité de Z .

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'_Z(x) = 2e^x \Phi'(e^x) = 2e^x \varphi(e^x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^x e^{-\frac{e^{2x}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^x e^{-\frac{e^{2x}}{2}}.$$

$$x \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^x e^{-\frac{e^{2x}}{2}} \text{ est une densité de } Z.$$

$$x \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x} e^{-\frac{e^{-2x}}{2}} \text{ est une densité de } -Z$$

b. Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^x e^{-\frac{e^{2x}}{2}}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times 0 \times e^{-0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{x - \frac{e^{2x}}{2}} \right) = 0 \text{ et } \psi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

Alors ψ est bornée sur $\mathbb{R}$ (air connu...)

$$\text{Posons } T = \ln \left| \frac{X}{X'} \right| = \ln |X| + (-\ln |X'|).$$

• X et X' sont deux variables aléatoires indépendantes donc $\ln |X|$ et $(-\ln |X'|)$ sont également indépendantes.

• $\ln |X|$ et $(-\ln |X'|)$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives ψ et $x \rightarrow \psi(-x)$.

• ψ est une densité de $\ln |X|$ et ψ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Alors T est une variable aléatoire à densité admettant pour densité $h : x \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \psi(-(x-t)) dt$.

$$\text{Soit } x \text{ un réel. } h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^t e^{-\frac{e^{2t}}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(x-t)} e^{-\frac{e^{-2(x-t)}}{2}} \right) dt = \frac{2}{\pi} e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} e^{-\frac{(1+e^{-2x})e^{2t}}{2}} dt.$$

$1 + e^{-2x}$ étant un réel strictement positif nous pouvons utiliser 2 avec $c = 1 + e^{-2x}$.

$$\text{Il vient alors } h(x) = \frac{2}{\pi} e^{-x} \frac{1}{1 + e^{-2x}}. \text{ Alors } h(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{2}{\pi} \frac{e^{2x} e^{-x}}{e^{2x} (1 + e^{-2x})} = \frac{2}{\pi} \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 1)}.$$

$$x \rightarrow \frac{2}{\pi} \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 1)} \text{ est une densité de } \ln \left| \frac{X}{X'} \right|.$$

c. Notons F_T la fonction de répartition de $T = \ln \left| \frac{X}{X'} \right|$ et F_U la fonction de répartition de $U = \left| \frac{X}{X'} \right|$.

Observons que : $U = e^T$.

U prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\forall x \in]-\infty, 0], F_U(x) = 0$.

Soit x un réel strictement positif. $F_U(x) = P(U \leq x) = P(e^T \leq x) = P(T \leq \ln x) = F_T(\ln x)$.

$$F_U(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\ln x} h(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^t}{(e^t)^2 + 1} dt = \frac{2}{\pi} \lim_{A \rightarrow -\infty} [\arctan(e^t)]_A^{\ln x} = \frac{2}{\pi} \arctan x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \frac{2}{\pi} \arctan x & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}.$$

$$\text{Mieux, pour la suite, } \forall x \in \mathbb{R}, F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \frac{2}{\pi} \arctan x & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}.$$

F_U est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$. Alors F_U est continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$, et F_U est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Ainsi U est une variable aléatoire à densité.

$$\forall x \in] -\infty, 0[, F'_U(x) = 0 \text{ et } \forall x \in [0, +\infty[, F'_U(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{Posons } \forall x \in] -\infty, 0[, f_U(x) = 0 \text{ et } \forall x \in [0, +\infty[, f_U(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

f_U est une fonction numérique positive sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec F'_U sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

f_U est une densité de U

La fonction f_U définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in] -\infty, 0[\\ \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$ est une densité de $\left| \frac{X}{X'} \right|$.

$$\text{Posons } Y = \frac{X}{X'}.$$

1) $|Y|$ est une variable aléatoire à densité de densité f_U .

2) D'après **1. a** X et $-X$ ont même loi car X est une variable aléatoire à densité admettant une densité φ continue et paire ; ainsi $Y = \frac{X}{X'}$ et $-Y = \frac{-X}{X'}$ ont même loi.

En appliquant **1. b** on peut dire que Y est une variable aléatoire à densité et que $x \rightarrow \frac{1}{2} f_U(|x|)$ en est une densité.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2} f_U(|x|) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+|x|^2} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} = f_1(x). \text{ } f_1 \text{ est donc une densité de } Y. \text{ Ainsi}$$

$\frac{X}{X'}$ est une variable aléatoire à densité qui suit une loi de Cauchy.