

EXERCICE 1

Partie I : Quelques propriétés de f^* .

1. Soit M la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives X et Y dans la base $\mathcal{B}$.

MX et tMY sont les matrices de $f(x)$ et de $f^*(y)$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.

Alors $\langle f(x), y \rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX{}^tMY = \langle x, f^*(y) \rangle$.

$$\boxed{\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.}$$

2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$.

Montrons que $g = f^*$.

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle x, g(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$

Alors $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle x, g(y) \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$ ou $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle x, g(y) - f^*(y) \rangle = 0$.

Ainsi si y est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3 : \forall x \in \mathbb{R}^3, \langle x, g(y) - f^*(y) \rangle = 0$.

Donc si y est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3 : g(y) - f^*(y)$ appartient à $(\mathbb{R}^3)^\perp$.

Or $(\mathbb{R}^3)^\perp = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Par conséquent $\forall y \in \mathbb{R}^3, g(y) - f^*(y) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ou $\forall y \in \mathbb{R}^3, g(y) = f^*(y)$.

Finalement $g = f^*$.

$$\boxed{f^* \text{ est le seul endomorphisme } g \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant } \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle.}$$

3. a. Soit x un élément de F et soit y un élément de $F^\perp$. $\langle x, f^*(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$.

Or $f(x)$ appartient à F car x appartient à F qui est stable par f et y appartient à $F^\perp$ donc $\langle f(x), y \rangle = 0$.

Alors $\langle x, f^*(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle = 0$.

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est dans } F \text{ et } y \text{ dans } F^\perp \text{ alors } \langle x, f^*(y) \rangle = 0.}$$

b. Soit y un élément de $F^\perp$. Ce qui précède montre que $\forall x \in F, \langle x, f^*(y) \rangle = 0$ donc que $f^*(y) \in F^\perp$.

Ainsi $\forall y \in F^\perp, f^*(y) \in F^\perp$. $F^\perp$ est stable par f^*

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f alors $F^\perp$ est stable par f^* .

▲ *Exercice* E est un espace vectoriel euclidien. Généraliser tous les résultats précédents.

f et g sont deux endomorphismes de E et λ un réel. Exprimer $(\lambda f + g)^*$ et $(f \circ g)^*$ en fonction de f^* , g^* et λ . Déterminer $(f^*)^*$.

Que dire de f^* si f est un automorphisme de E ? ▼

Partie II : Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

1. • Par définition $\mathcal{E}$ est contenu dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

• $\mathcal{E}$ n'est pas vide car $\mathbb{R}^3$ n'est pas vide !

• Soient g et h deux éléments de $\mathcal{E}$ et λ un réel.

Il existe deux éléments $u = (a, b, c)$ et $u' = (a', b', c')$ tels que $g = f_u$ et $h = f_{u'}$.

$\lambda g + h = \lambda f_u + f_{u'}$ donc la matrice de $\lambda g + h$ dans la base $\mathcal{B}$ est : $\lambda M_u + M_{u'}$.

$$\text{Or } \lambda M_u + M_{u'} = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' & \lambda c + c' \\ \lambda c + c' & \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' & \lambda a + a' \end{pmatrix} = M_{\lambda u + u'}.$$

Ainsi $\lambda g + h$ et $f_{\lambda u + u'}$ ont même matrice dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\lambda g + h = f_{\lambda u + u'}$. Ce qui montre que $\lambda g + h$ appartient à $\mathcal{E}$.

Par conséquent $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (g, h) \in \mathcal{E}^2, \lambda g + h \in \mathcal{E}$.

Ceci achève de montrer que :

$\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2. Soit $u = (a, b, c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}$ est $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

La matrice de f^* dans $\mathcal{B}$ est ${}^t M_u = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

La matrice de f_u^* dans $\mathcal{B}$ est donc $M_{\hat{u}}$ avec $\hat{u} = (a, c, b)$. Ainsi $f_u^* = f_{\hat{u}}$.

Ce qui permet d'affirmer que f_u^* est un élément de $\mathcal{E}$.

Pour tout élément u de $\mathbb{R}^3$, f_u^* appartient à $\mathcal{E}$.

▲ *Exercice* Montrer que la composée de deux éléments de $\mathcal{E}$ est un élément de $\mathcal{E}$ et que deux éléments de $\mathcal{E}$ commutent. ▼

3. a. Soit $u = (a, b, c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de $f_u(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ ou $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a+b+c \\ c+a+b \\ b+c+a \end{pmatrix}$.

Cette matrice est encore $(a+b+c) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Ainsi $f_u(e_1) = (a+b+c)e_1$.

Comme e_1 n'est pas le vecteur nul, e_1 est un vecteur propre de f_u et ceci pour tout élément u de $\mathbb{R}^3$.

e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathcal{E}$.

▲ *Exercice* Soit $u = (a, b, c)$. M_u est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$? (on pourra remarquer que $M_u = aI_3 + bT + cT^2 \dots$) ▲

b. Soit $u = (a, b, c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

$f_u(\mathcal{D}) = f_u(\text{Vect}(e_1)) = \text{Vect}(f_u(e_1)) = \text{Vect}((a+b+c)e_1) \subset \text{Vect}(e_1) = \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ est donc stable par f_u .

Pour tout élément u de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ est stable par f_u .

c. Soit $u = (a, b, c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. Posons $v = (a, c, b)$.

Rappelons que $f_v^* = f_{\hat{v}}$ avec $\hat{v} = (a, b, c)$ donc $f_v^* = f_u$ d'après II 2).

f_v est un élément de $\mathcal{E}$ donc $\mathcal{D}$ est stable par f_v d'après la question précédente.

La question **I 3. b.** montre alors que $\mathcal{D}^\perp$ est stable par f_v^* donc par f_u .

Pour tout élément u de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}^\perp$ est stable par f_u .

d. Notons que $D = \text{Vect}(e_1) = \text{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)\right) = \text{Vect}(i+j+k)$.

Notons également que $D^\perp$ est l'orthogonal d'une droite vectorielle donc est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{D}^\perp$ est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$.

$x \in \mathcal{D}^\perp \iff \langle x, i+j+k \rangle = 0 \iff x_1 \times 1 + x_2 \times 1 + x_3 \times 1 = 0 \iff x_1 + x_2 + x_3 = 0$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ est une équation de } \mathcal{D}^\perp \text{ dans la base } \mathcal{B}.$$

e. $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}i - \frac{1}{\sqrt{2}}j + 0k$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 = 0$ donc e_2 est un élément de $\mathcal{D}^\perp$.

$e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}i + \frac{1}{\sqrt{6}}j - \frac{2}{\sqrt{6}}k$ et $\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = 0$ donc e_3 est un élément de $\mathcal{D}^\perp$.

$\mathcal{B} = (i, j, k)$ étant une base orthonormale : $\|e_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$;

$$\|e_3\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = 1 ;$$

$$\langle e_2, e_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{6}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = 0.$$

Finalement (e_2, e_3) est une famille orthonormale, donc une famille libre, de cardinal 2 du plan vectoriel $\mathcal{D}^\perp$.

Ceci suffit pour dire que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$.

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \text{ donc } \|e_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{1} = 1.$$

Ainsi (e_1) est une base orthonormale de $\mathcal{D}$.

(e_1) est une base orthonormale de $\mathcal{D}$, (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^\perp$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et orthogonaux. Ainsi $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

$$(e_2, e_3) \text{ est une base orthonormale de } \mathcal{D}^\perp \text{ et } \mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^3.$$

f. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{D} = \text{Vect}(e_1)$ et $\mathcal{D}^\perp = \text{Vect}(e_2, e_3)$ sont stables par f_u .

Par conséquent $f_u(e_1) \in \text{Vect}(e_1)$, $f_u(e_2) \in \text{Vect}(e_2, e_3)$ et $f_u(e_3) \in \text{Vect}(e_2, e_3)$.

Alors il existe cinq réels e , f , g , h et ℓ tels que $f_u(e_1) = e e_1$, $f_u(e_2) = f e_2 + h e_3$ et $f_u(e_3) = g e_2 + \ell e_3$.

Alors la matrice N_u de f_u dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est : $\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$.

$$\text{Si } u \text{ est un élément de } \mathbb{R}^3, \text{ il existe cinq réels } e, f, g, h \text{ et } \ell \text{ tels que la matrice de } f_u \text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ soit } N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}.$$

$$\blacktriangle \text{ Exercice } \quad \text{Si } u = (a, b, c), \text{ montrer que : } N_u = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \frac{1}{2}(b+c) & \frac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(c-b) & a - \frac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}. \quad \blacktriangledown$$

EXERCICE 2

1. a. Notons que le simple fait que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ ne donne pas l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ et de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$ pour tout (x, t) dans $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ car le domaine de définition de f n'est pas $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$. Il faut donc en faire un peu plus au niveau du a) pour pouvoir traiter le b) dans de bonnes conditions...

Posons $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, t) = 1 + xt$. φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynôme. En particulier φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Posons $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + xt > 0\}$. Observons que $\Omega = \varphi^{-1}(]0, +\infty[)$.

Ω est donc l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Ω est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (programme de première année...)

Montrons alors que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω .

$(x, t) \rightarrow -t^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω , car c'est une fonction polynôme, et $u \rightarrow e^u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$; par composition $(x, t) \rightarrow e^{-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω .

φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω , $\forall (x, t) \in \Omega, \varphi(x, t) \in \mathbb{R}^{+*}$ et $u \rightarrow \sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; par composition $(x, t) \rightarrow \sqrt{1 + xt}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω .

Alors par produit f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω .

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \boxed{\text{l'ouvert}} \Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + xt > 0\}.}$$

▲ *Remarque* Ce résultat assure l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ et de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$ lorsque (x, t) est dans Ω . ▼

Notons que $\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[, 1 + xt \geq 1 > 0$ donc $[0, +\infty[\times [0, +\infty[\subset \Omega$. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0, +\infty[\times [0, +\infty[.}$$

b. $\forall (x, t) \in \Omega, f(x, t) = e^{-t^2} \sqrt{1 + xt}$ donc $\forall (x, t) \in \Omega, \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-t^2} \frac{t}{2\sqrt{1 + xt}} = \frac{t}{2} e^{-t^2} (1 + xt)^{-\frac{1}{2}}$.

Alors $\forall (x, t) \in \Omega, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t}{2} e^{-t^2} \left(-\frac{1}{2}\right) t (1 + xt)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{t^2}{4} e^{-t^2} \frac{1}{(1 + xt)^{\frac{3}{2}}}$. En particulier :

$$\boxed{\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[, \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{2} e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{(1 + xt)}}.}$$

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{t^2}{4} e^{-t^2} \frac{1}{(1+xt)^{\frac{3}{2}}}.$$

c. $\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[, \quad 1+xt \geq 1$ donc $\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[, \quad \sqrt{1+xt} \geq 1$.

Ainsi $\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+xt}} \leq 1$ et $0 \leq \frac{t^2}{4} e^{-t^2}$.

Alors $\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| = \frac{t^2}{4} e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{1+xt}} \leq \frac{t^2}{4} e^{-t^2}$.

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2}{4} e^{-t^2}.$$

2. Soit α un réel strictement positif. Posons $\forall t \in]0, +\infty[, \quad h_\alpha(t) = t^\alpha e^{-t^2}$.

h_α est continue sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow 0} h_\alpha(t) = 0$. Ainsi h_α est prolongeable par continuité en 0.

Ceci donne déjà la convergence de $\int_0^1 h_\alpha(t) dt$. Montrons la convergence de $\int_1^{+\infty} h_\alpha(t) dt$.

$\forall t \in [1, +\infty[, t \leq t^2$ donc $\forall t \in [1, +\infty[, \quad -t^2 \leq -t$. Alors $\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$ et $0 \leq t^\alpha$.

Ainsi $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq h_\alpha(t) \leq t^\alpha e^{-t}$.

$\alpha + 1$ étant strictement positif, $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ existe. En particulier $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} h_\alpha(t) dt$. Ceci achève de montrer que :

$$\text{pour tout réel } \alpha \text{ strictement positif, } \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

▲ *Exercice* Montrer en fait que cette intégrale converge si et seulement si $\alpha \in]-1, +\infty[$. ▼

Soit x un réel positif. Posons : $\forall t \in [0, +\infty[, \quad u(t) = e^{-t^2} \sqrt{1+xt}$.

• u est continue sur $[0, +\infty[$.

Rusons un peu pour éviter l'équivalent qui oblige à faire deux cas $x = 0$ et $x \neq 0$; le premier cas ne passant pas dans le résultat précédent à cause du α strictement positif...

Observons que $\int_0^1 u(t) dt$ converge. Montrons alors que $\int_1^{+\infty} u(t) dt$ converge.

• $\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq u(t) = e^{-t^2} \sqrt{1+xt} \leq e^{-t^2} \sqrt{t+xt} = \sqrt{1+x} t^{1/2} e^{-t^2}$;

• $\int_1^{+\infty} t^{1/2} e^{-t^2} dt$ converge car $\int_0^{+\infty} t^{1/2} e^{-t^2} dt$ converge d'après ce qui précède, ainsi

$\int_1^{+\infty} \sqrt{1+x} t^{1/2} e^{-t^2} dt$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} u(t) dt$. Ceci achève de montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} u(t) dt$.

Posons : $\forall t \in [0, +\infty[, v(t) = \frac{t e^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}}$.

- v est continue sur $[0, +\infty[$.
- $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq v(t) = \frac{t e^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}} \leq t e^{-t^2}$.
- $\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt$ converge d'après le début de la question.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_0^{+\infty} v(t) dt$.

Pour tout réel x positif, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{1+xt} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t^2}}{\sqrt{1+xt}} dt$ convergent.

3. a) Soient x et y deux éléments de $[0, +\infty[$ tels que $x \leq y$.

$\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq 1+xt \leq 1+yt$ donc $\forall t \in [0, +\infty[, \sqrt{1+xt} \leq \sqrt{1+yt}$ et $0 \leq e^{-t^2}$.

Alors $\forall t \in [0, +\infty[, e^{-t^2} \sqrt{1+xt} \leq e^{-t^2} \sqrt{1+yt}$.

En intégrant il vient $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{1+xt} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{1+yt} dt$ ou $g(x) \leq g(y)$.

$\forall (x, y) \in [0, +\infty]^2, x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)$.

g est croissante sur $[0, +\infty[$.

b. Fixons t dans $[0, +\infty[$ et posons : $\forall x \in [0, +\infty[, \ell_t(x) = f(x, t)$.

f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω qui contient $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$, on peut affirmer que ℓ_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$.

De plus $\forall x \in [0, +\infty[, \ell'_t(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ et $\ell''_t(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 1 à ℓ_t permet d'écrire que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, |\ell_t(x) - \ell_t(x_0) - (x - x_0) \ell'_t(x_0)| \leq \frac{|x - x_0|^2}{2} \max_{u \in [\min(x_0, x), \max(x_0, x)]} |\ell''_t(u)|.$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in [0, +\infty[, \left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| \leq \frac{|x - x_0|^2}{2} \max_{u \in [\min(x_0, x), \max(x_0, x)]} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, t) \right|.$$

La majoration de **1. c.** donne : $\forall u \in [0, +\infty[, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, t) \right| \leq \frac{t^2}{4} e^{-t^2}$.

Ainsi $\forall x \in [0, +\infty[, \max_{u \in [\min(x_0, x), \max(x_0, x)]} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, t) \right| \leq \frac{t^2}{4} e^{-t^2}$. Par conséquent :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| \leq \frac{|x - x_0|^2}{2} \frac{t^2}{4} e^{-t^2} = \frac{t^2}{8} e^{-t^2} |x - x_0|^2.$$

$$\boxed{\text{Si } x_0 \in [0, +\infty[, \forall (x, t) \in [0, +\infty[^2, \left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| \leq \frac{t^2}{8} e^{-t^2} |x - x_0|^2.}}$$

c. Soit x_0 un élément de $[0, +\infty[$. Soit x un élément de $[0, +\infty[$.

$\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| \leq \frac{t^2}{8} e^{-t^2} |x - x_0|^2$ et $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{8} e^{-t^2} |x - x_0|^2 dt$ converge d'après la question 2.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence

de $\int_0^{+\infty} \left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| dt$. De plus :

$$\int_0^{+\infty} \left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{8} e^{-t^2} |x - x_0|^2 dt = \frac{|x - x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} \left(f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right) dt$ est absolument convergente (donc convergente) et l'on peut écrire :

$$\left| \int_0^{+\infty} \left(f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right| dt.$$

Finalement :

$$\left| \int_0^{+\infty} \left(f(x, t) - f(x_0, t) - (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) \right) dt \right| \leq \frac{|x - x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

$$\text{Alors } \left| \int_0^{+\infty} f(x, t) dt - \int_0^{+\infty} f(x_0, t) dt - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \leq \frac{|x - x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \text{ car}$$

toutes les intégrales convergent.

$$\text{Ainsi } \left| g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \leq \frac{|x - x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

$$\boxed{\forall x_0 \in [0, +\infty[, \forall x \in [0, +\infty[, \left| g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \leq \frac{|x - x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.}}$$

d. Soit x_0 un élément de $[0, +\infty[$. Soit x un élément de $[0, +\infty[$ distinct de x_0 .

$$\left| g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \leq \frac{|x - x_0|^2}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt. \text{ En divisant par } |x - x_0| \text{ il vient :}$$

$$0 \leq \left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \leq \frac{|x - x_0|}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{|x - x_0|}{8} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \right) = 0.$$

$$\text{Alors, par encadrement, on obtient : } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt.$$

$$\text{Ainsi } g \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } g'(x_0) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt.$$

$$g \text{ est dérivable sur } [0, +\infty[\text{ et } \forall x \in [0, +\infty[, g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{2} e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{1+xt}} \geq 0, \text{ donc } \forall x \in [0, +\infty[, g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \geq 0.$$

On retrouve ainsi la croissance de g sur $[0, +\infty[$.

PROBLÈME

Partie I : Etude des longueurs des séries.

1. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\{L_1 = n\}$ se réalise si et seulement si les n premiers lancers donnent Pile et le $(n+1)^{\text{ème}}$ Face ou les n premiers lancers donnent Face et le $(n+1)^{\text{ème}}$ Pile. Ainsi :

$$\boxed{\{L_1 = n\} = (P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1}).}$$

Par incompatibilité $P(L_1 = n) = P(P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n \cap F_{n+1}) + P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1})$.

Par indépendance : $P(L_1 = n) = P(P_1) P(P_2) \dots P(P_n) P(F_{n+1}) + P(F_1) P(F_2) \dots P(F_n) P(P_{n+1})$.

Ainsi $P(L_1 = n) = p^n q + q^n p$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P(L_1 = n) = p^n q + q^n p.}$$

$|p| < 1$ et $|q| < 1$ donc les séries de termes généraux p^n et q^n sont convergentes. Alors la série de terme général $P(L_1 = n)$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes (ce qui est une évidence puisque les événements de la suite $(\{L_1 = n\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles) et surtout :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = q \sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p \sum_{n=1}^{+\infty} q^n. \text{ Un changement d'indice simple donne :}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = q \sum_{i=0}^{+\infty} p^{i+1} + p \sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+1} = qp \sum_{i=0}^{+\infty} p^i + pq \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = qp \frac{1}{1-p} + pq \frac{1}{1-q} = qp \frac{1}{q} + pq \frac{1}{p}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = p + q = 1.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1.}$$

▲ Exercice Montrer que L_1 possède une espérance qui vaut $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$. ▲

2. a. Soit n et k deux éléments de $\mathbb{N}^*$.

$\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\}$ se réalise si et seulement si les n premiers lancers donnent Pile, les k suivants Face et le $(n+k+1)^{\text{ème}}$ Pile ou les n premiers lancers donnent Face, les k suivants Pile et le $(n+k+1)^{\text{ème}}$ Face.

Ainsi :

$$\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\} = (P_1 \cap \dots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \dots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \dots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}).$$

Si k et n sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$:

$$\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\} = (P_1 \cap \dots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \dots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \cup (F_1 \cap \dots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \dots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}).$$

$$\text{ou } \{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\} = \left(\left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=n+1}^{n+k} F_i \right) \cap P_{n+k+1} \right) \cup \left(\left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=n+1}^{n+k} P_i \right) \cap F_{n+k+1} \right).$$

Soient n et k deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Par incompatibilité on obtient :

$$P(\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\}) = P \left(\left(\bigcap_{i=1}^n P_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=n+1}^{n+k} F_i \right) \cap P_{n+k+1} \right) + P \left(\left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=n+1}^{n+k} P_i \right) \cap F_{n+k+1} \right)$$

Par indépendance $P(\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\})$ vaut encore :

$$\left(\prod_{i=1}^n P(P_i) \right) \left(\prod_{i=n+1}^{n+k} P(F_i) \right) P(P_{n+k+1}) + \left(\prod_{i=1}^n P(F_i) \right) \left(\prod_{i=n+1}^{n+k} P(P_i) \right) P(F_{n+k+1}).$$

$$\text{Ainsi } P(\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\}) = p^n q^k p + q^n p^k q = p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, P(\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\}) = p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k.$$

b. $(\{L_1 = n\})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$$P(L_2 = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\}). \text{ Ainsi } P(L_2 = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} (p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k).$$

Alors $P(L_2 = k) = q^k \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} + p^k \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n+1}$ car les séries de termes généraux p^{n+1} et q^{n+1} convergent puisque $|p| < 1$ et $|q| < 1$.

$$\text{Un petit changement d'indice donne alors : } P(L_2 = k) = q^k \sum_{i=0}^{+\infty} p^{i+2} + p^k \sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+2}.$$

$$\text{Donc } P(L_2 = k) = q^k p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} p^i + p^k q^2 \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = q^k p^2 \frac{1}{1-p} + p^k q^2 \frac{1}{1-q} = q^k p^2 \frac{1}{q} + p^k q^2 \frac{1}{p}.$$

$$\text{Finalement } P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$

▲ *Remarque* Les séries de termes généraux q^{k-1} et p^{k-1} convergent donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} p^{k-1} = p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} q^j + q^2 \sum_{j=0}^{+\infty} p^j = p^2 \frac{1}{1-q} + q^2 \frac{1}{1-p} = p^2 \frac{1}{p} + q^2 \frac{1}{q}.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = p + q = 1. \quad \blacktriangledown$$

c. Montrer que L_2 possède une espérance consiste à montrer que la série de terme général $k P(L_2 = k)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs il suffit d'établir sa convergence pour pouvoir dire qu'elle est absolument convergente.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, k P(L_2 = k) = p^2 k q^{k-1} + q^2 k p^{k-1}$. Comme $|q| < 1$ et $|p| < 1$ le cours indique que les séries de termes généraux $k q^{k-1}$ et $k p^{k-1}$ convergent.

La série de terme général $k P(L_2 = k)$ est convergente comme combinaison linéaire de deux séries convergentes. D'après ce qui a été dit plus haut, ceci achève de montrer que L_2 possède une espérance.

$$\text{De plus } E(L_2) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k p^{k-1} = p^2 \frac{1}{(1-q)^2} + q^2 \frac{1}{(1-p)^2} = p^2 \frac{1}{p^2} + q^2 \frac{1}{q^2} = 2.$$

$$\boxed{L_2 \text{ possède une espérance qui vaut } 2.}$$

▲ Exercices Etudier les variables aléatoires L_{2r-1} et L_{2r} pour tout r dans $\mathbb{N}^*$ (ou dans $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$) ! ▲

Partie II : Etude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

1. • N_1 est la variable certaine égale à 1.

$$\boxed{N_1(\Omega) = \{1\}, P(N_1 = 1) = 1 \text{ et } E(N_1) = 1.}$$

• $N_2(\Omega) = \llbracket 1, 2 \rrbracket$. $\{N_2 = 1\} = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$. Par incompatibilité et indépendance on obtient :

$$P(N_2 = 1) = P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) = P(P_1) P(P_2) + P(F_1) P(F_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Alors } P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$E(N_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{N_2(\Omega) = \llbracket 1, 2 \rrbracket, P(N_2 = 1) = P(N_2 = 2) = \frac{1}{2} \text{ et } E(N_2) = \frac{3}{2}.}$$

▲ Remarque $E(N_2^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ et $V(N_2) = E(N_2^2) - (E(N_2))^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. ▼

• $N_3(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$. $\{N_3 = 1\} = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)$.

Par incompatibilité et indépendance on obtient :

$$P(N_3 = 1) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(P_1) P(P_2) P(P_3) + P(F_1) P(F_2) P(F_3).$$

$$P(N_3 = 1) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$\{N_3 = 3\} = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$. Par incompatibilité et indépendance on obtient :

$$P(N_3 = 3) = P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3) = P(P_1)P(F_2)P(P_3) + P(F_1)P(P_2)P(F_3).$$

$$P(N_3 = 3) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Alors } P(N_3 = 2) = 1 - P(N_3 = 1) - P(N_3 = 3) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

▲ *Remarque* On retrouve sans difficulté ce dernier résultat en remarquant que :

$$\{N_3 = 2\} = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3). \quad \blacktriangledown$$

$$E(N_3) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2.$$

$N_3(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket, P(N_3 = 1) = \frac{1}{4}, P(N_3 = 2) = \frac{1}{2}, P(N_3 = 3) = \frac{1}{4} \text{ et } E(N_3) = 2.$
--

▲ *Remarque* $E(N_3^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{2}$. $V(N_3) = E(N_3^2) - (E(N_3))^2 = \frac{9}{2} - 2^2 = \frac{1}{2}$. $\blacktriangledown$

▲ *Exercice* Reprendre cette étude dans le cas où la pièce donne Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité q . $\blacktriangledown$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Il semble clair que $N_n(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$.

Si k est un élément pair de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et si l'événement $P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \dots \cap P_{k-1} \cap F_k \cap F_{k+1} \cap \dots \cap F_n$ se réalise alors l'événement $\{N_n = k\}$ se réalise.

Si k est un élément impair de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et si l'événement $P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \dots \cap P_{k-2} \cap F_{k-1} \cap P_k \cap P_{k+1} \cap \dots \cap P_n$ se réalise alors l'événement $\{N_n = k\}$ se réalise. Ainsi :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, N_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket.$

$\{N_n = 1\} = (P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n)$. Par indépendance et incompatibilité on obtient :

$$P(N_n = 1) = P(P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n) + P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) = P(P_1)P(P_2) \dots P(P_n) + P(F_1)P(F_2) \dots P(F_n).$$

$$\text{Ainsi } P(N_n = 1) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Supposons n pair.

$$\{N_n = n\} = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \dots \cap P_{n-1} \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n).$$

$$\text{Ici encore par indépendance et incompatibilité on obtient : } P(N_n = n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Supposons n impair.

$$\{N_n = n\} = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \dots \cap P_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap \dots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n).$$

$$\text{Toujours par indépendance et incompatibilité on obtient : } P(N_n = n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est un élément de } \mathbb{N}^*, P(N_n = 1) = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ et } P(N_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

▲ *Exercice* Montrer que $T_n = N_n - 1$ suit la loi binômiale de paramètres $n - 1$ et $\frac{1}{2}$ (on pourra remarquer que N_n est 1 plus le nombre de fois où l'on obtient un résultat différent du précédent).

En déduire que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(N_n = k) = \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}}$, $E(N_n) = \frac{n+1}{2}$ et $V(N_n) = \frac{n-1}{4}$.

Le problème est ainsi terminé... ▼

3. Le programme ne pose aucun problème dès lors que l'on remarque que le nombre de séries augmente d'une unité à chaque fois que l'on obtient un résultat différent du précédent.

```

1 program simulation;
2
3 const nmax=100;
4 Type suite=array[1..nmax] of integer;
5
6 Var X,N :suite;i,m:integer;
7
8 Begin
9
10 write('Donnez la valeur de m. m='); readln(m);
11 randomize;
12 X[1]:=random(2);N[1]:=1;
13 For i:=2 to m do
14   begin
15     X[i]:=random(2);
16     if X[i]=X[i-1] then N[i]:=N[i-1]
17                       else N[i]:=N[i-1]+1;
18   end;
19 end.
```

4. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit s un élément de $[0, 1]$.

Le théorème de transfert montre que $E(s^{N_n}) = \sum_{k=1}^n s^k P(N_n = k)$. Ainsi $E(s^{N_n}) = G_n(s)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall s \in [0, 1], E(s^{N_n}) = G_n(s).}$$

b. G_n est dérivable sur $[0, 1]$, comme fonction polynôme et $\forall s \in [0, 1]$, $G'_n(s) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) k s^{k-1}$.

Alors $G'_n(1) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) k 1^{k-1} = \sum_{k=1}^n k P(N_n = k) = E(N_n)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, G'_n(1) = E(N_n).}$$

c. Soient n un élément de $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$ et k un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(P_{n-1}, F_{n-1}) est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$P(\{N_n = k\} \cap P_n) = P(\{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n-1}) + P(\{N_n = k\} \cap P_n \cap F_{n-1})$. Observons alors que :

$$\{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n-1} = \{N_{n-1} = k\} \cap P_n \cap P_{n-1} \text{ et } \{N_n = k\} \cap P_n \cap F_{n-1} = \{N_{n-1} = k-1\} \cap P_n \cap F_{n-1}.$$

Ainsi : $P(\{N_n = k\} \cap P_n) = P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_n \cap P_{n-1}) + P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap P_n \cap F_{n-1})$.

Par indépendance des lancers on a :

$$P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_n \cap P_{n-1}) = P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_{n-1}) P(P_n) = \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_{n-1}).$$

$$\text{De même : } P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap P_n \cap F_{n-1}) = P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap F_{n-1}) P(P_n) = \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap F_{n-1}).$$

$$\text{Alors : } P(\{N_n = k\} \cap P_n) = \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap F_{n-1}).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{[2, +\infty[}, \forall k \in \mathbb{[1, n]}, P(\{N_n = k\} \cap P_n) = \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap F_{n-1}).}$$

De même :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{[2, +\infty[}, \forall k \in \mathbb{[1, n]}, P(\{N_n = k\} \cap F_n) = \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k\} \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap P_{n-1}).}$$

Soient n un élément de $\mathbb{[2, +\infty[}$ et k un élément de $\mathbb{[1, n]}$.

(F_n, P_n) est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$P(N_n = k) = P(\{N_n = k\} \cap P_n) + P(\{N_n = k\} \cap F_n)$. Alors :

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k\} \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap P_{n-1}).$$

Or (P_{n-1}, F_{n-1}) est un système complet d'événements donc :

$$\frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k\} \cap F_{n-1}) = \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k).$$

$$\text{De même : } \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap P_{n-1}) = \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1).$$

$$\text{Par conséquent : } P(N_n = k) = \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{[2, +\infty[}, \forall k \in \mathbb{[1, n]}, P(N_n = k) = \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1).}$$

d. Soit n un élément de $\mathbb{[2, +\infty[}$ et soit s un élément de $[0, 1]$.

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^n P(N_n = k) s^k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1) \right) s^k.$$

$$G_n(s) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k) s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(N_{n-1} = k-1) s^k.$$

$$G_n(s) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\boxed{n-1}} P(N_{n-1} = k) s^k + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} P(N_{n-1} = i) s^{i+1}.$$

$$G_n(s) = \frac{1}{2} G_{n-1}(s) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=\boxed{1}}^{n-1} P(N_{n-1} = i) s^i \right) s = \frac{1}{2} G_{n-1}(s) + \frac{s}{2} G_{n-1}(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s).$$

$$\boxed{\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \forall s \in [0, 1], G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s).}$$

$$\forall s \in [0, 1], G_1(s) = \sum_{k=1}^1 P(N_1 = k) s^k = P(N_1 = 1) s = s.$$

$$\boxed{\forall s \in [0, 1], G_1(s) = s.}$$

Soit s un élément de $[0, 1]$. $(G_n(s))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$ et de premier terme s .

$$\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*, G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1} s.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall s \in [0, 1], G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1} s.}$$

▲ *Remarque* Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\forall s \in [0, 1], \sum_{k=1}^n P(N_n = k) s^k = G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1} s = s \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1-k} \left(\frac{s}{2} \right)^k.$$

$$\forall s \in [0, 1], \sum_{k=1}^n P(N_n = k) s^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} s^{k+1}.$$

Un petit changement d'indice dans la seconde somme fournit :

$$\forall s \in [0, 1], \sum_{k=1}^n P(N_n = k) s^k = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} s^k.$$

$$\text{Alors } \forall s \in [0, 1], \sum_{k=1}^n \left(P(N_n = k) - \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) s^k = 0.$$

Le polynôme $\sum_{k=1}^n \left(P(N_n = k) - \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) X^k$ admet donc une infinité de racines ; c'est donc le polynôme nul.

$$\text{Ainsi } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(N_n = k) - \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 0 \text{ ou } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(N_n = k) = \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

$N_n - 1$ suit donc la loi binômiale de paramètres $n-1$ et $\frac{1}{2}$.

On retrouve ainsi le résultat proposé dans l'exercice de la question 2. ▼

e. Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

$$\forall s \in [0, 1], G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s \text{ donc } \forall s \in [0, 1], G'_n(s) = (n-1) \frac{1}{2} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} s + \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Alors } E(N_n) = G'_n(1) = (n-1) \frac{1}{2} \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-2} \times 1 + \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-1} = (n-1) \frac{1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}.$$

Ainsi $E(N_n) = \frac{n+1}{2}$. Notons que ceci vaut encore pour $n = 1$ car $E(N_1) = 1$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, E(N_n) = \frac{n+1}{2}.}$$

▲ Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser G''_n pour montrer que $V(N_n) = \frac{n-1}{4}$. ▼

Partie III : Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Piles consécutifs.

1. $\varphi : x \rightarrow e^{-x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) = e^{-x} \geq 0$. Ainsi φ est convexe sur $\mathbb{R}$.

La courbe représentative de φ est au-dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geq \varphi'(0)(x-0) + \varphi(0)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \geq (-1) \times x + 1 = 1 - x$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x \geq e^{-x}.}$$

2. a. La série de terme général $P(A_i)$ est à termes positifs et divergente donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^n P(A_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{k-1} P(A_i) \right) = +\infty$ (à un petit abus près au niveau de l'avant dernière égalité).

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^n P(A_i) = +\infty.}$$

b. Soit n un élément de $\llbracket k, +\infty \rrbracket$. $P(C_n) = 1 - P(\overline{C_n}) = 1 - P\left(\bigcup_{i=k}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=k}^n \overline{A_i}\right)$.

Comme $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements indépendants, $(\overline{A_i})_{i \in \mathbb{N}^*}$ est encore une suite d'événements indépendants.

Ceci permet d'écrire que : $P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^n P(\overline{A_i})$.

$$\boxed{\forall n \in \llbracket k, +\infty \rrbracket, P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^n P(\overline{A_i}).}$$

Soit n un élément de $\llbracket k, +\infty \rrbracket$. $\forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, 0 \leq P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) \leq \exp(-P(A_i))$ d'après 1.

Par produit : $\prod_{i=k}^n P(\overline{A_i}) \leq \prod_{i=k}^n \exp(-P(A_i)) = \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right)$.

Alors $P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^n P(\overline{A_i}) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right)$.

$$\forall n \in \llbracket k, +\infty \llbracket, P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right).$$

$\forall n \in \llbracket k, +\infty \llbracket, 1 \geq P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right)$.

Le **a.** nous a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^n P(A_i) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right) = 0$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right)\right) = 1$ et par encadrement on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = 1.$$

c. $\forall n \in \llbracket k, +\infty \llbracket, C_n = \bigcup_{i=k}^n A_i \subset \bigcup_{i=k}^{n+1} A_i = C_{n+1}$.

$$\forall n \in \llbracket k, +\infty \llbracket, C_n \subset C_{n+1}. \text{ La suite } (C_n)_{n \geq k} \text{ est croissante.}$$

Le théorème de la limite monotone montre alors que $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = 1$. Ainsi :

$$P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = 1.$$

d. • Soit i un élément de $\llbracket k, +\infty \llbracket$. $A_i \subset \bigcup_{j=k}^i A_j = C_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

Ainsi $\forall i \in \llbracket k, +\infty \llbracket, A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Donc $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

• Soit ω un élément de $\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Alors il existe r dans $\llbracket k, +\infty \llbracket$ tel que $\omega \in C_r$.

Or $C_r = \bigcup_{i=k}^r A_i$; ainsi il existe un élément i_0 de $\llbracket k, r \rrbracket$, donc de $\llbracket k, +\infty \llbracket$, tel que $\omega \in A_{i_0}$.

Par conséquent $\omega \in \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$. Ceci achève de montrer que $\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$. Finalement : $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n.$$

Il résulte alors du c) que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.$$

▲ *Remarque* Notons que $\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements.

Alors $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right)\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$. Donc $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right)\right) = 1$. Ceci ne signifie-t-il pas qu'il est presque sûr qu'un nombre infini d'événements de la suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ se réalisent ? ▼

▲ *Exercice 1* Justifier le dernier résultat de la remarque. ▼

▲ *Exercice 2* En supposant simplement que la série de terme général $P(A_n)$ converge (sans hypothèse d'indépendance) montrer qu'il est presque sûr que seul un nombre fini d'événements de la suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ se réalisent. ▼

3. L'indépendance des lancers donne l'indépendance des événements de la suite $(P_{2n} \cap P_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ donc de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(A_n) = P(P_{2n} \cap P_{2n+1}) = P(P_{2n})P(P_{2n+1}) = p^2$. Donc la série de terme général $P(A_n)$ diverge car la suite de terme général $P(A_n)$ ne converge pas vers zéro..

Alors, d'après la question précédente : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$.

Cela signifie que la probabilité d'obtenir deux Piles consécutifs à partir du $(2k)^{\text{ème}}$ lancer vaut 1 pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$. Alors nécessairement :

la probabilité d'avoir deux Piles consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.