

EXERCICE 1

1. La fonction $f : x \rightarrow \ln(2 - e^x)$ admet pour domaine de définition l'intervalle $I =]-\infty, \ln 2[$.

De plus $f = v \circ u$ où u est la fonction $x \rightarrow 1 - e^x$ et v la fonction $x \rightarrow \ln(1 + x)$.

Rappelons qu'au voisinage de 0 :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ donc $u(x) = 1 - e^x = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, et $v(x) = \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ainsi :

- u est définie sur I et admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de partie régulière le polynôme $P = -X - \frac{1}{2}X^2$.

- v est définie sur $] -1, +\infty[$ et admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de partie régulière le polynôme $Q = X - \frac{1}{2}X^2$.

- $u(I) \subset] -1, +\infty[$ et $\boxed{u(0) = 0}$.

Alors le cours indique que $f = v \circ u$ admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 dont la partie régulière est le polynôme obtenu en ne gardant que les termes de degré au plus 2 du polynôme $Q \circ P$.

Notons que $Q \circ P = -X - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2} \left(-X - \frac{1}{2}X^2 \right)^2 = -X - X^2 - \frac{1}{2}X^3 - \frac{1}{8}X^4$.

Alors, au voisinage de 0 : $f(x) = -x - x^2 + o(x^2)$.

Au voisinage de 0 : $\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2)$.

2. a. Soit k un élément de $\mathbb{N}[2, +\infty[$. $\frac{1}{k}$ appartient alors à l'intervalle $]0, \frac{1}{2}]$, donc $e^{\frac{1}{k}}$ appartient à $]1, e^{\frac{1}{2}}]$.

$2 - e^{\frac{1}{k}}$ appartient alors à l'intervalle $]2 - e^{\frac{1}{2}}, 1[$. Observons que $e < 4$ donc $e^{\frac{1}{2}} < 2$ et ainsi $2 - e^{\frac{1}{2}} > 0$.

Alors $2 - e^{\frac{1}{k}}$ est bien dans l'intervalle $]0, 1[$.

Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $2 - e^{\frac{1}{k}} \in]0, 1[$.

b. $\forall x \in]0, 1[, \ln(x) < 0!$ Ce qui précède donne alors :

pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$ est strictement négatif.

c. Au voisinage de 0 : $\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2)$. Ainsi $\ln(2 - e^x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$. Alors $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{k}$.

Nous avons donc :

• $-\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k}$; • $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} \geq 0$; • la série de terme général $\frac{1}{k}$ est une série de Riemann divergente.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $-\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$ diverge ; il en est de même pour la série de terme général $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$.

La série de terme général $\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$ diverge.

d. La série de terme général $-\ln(2 - e^{\frac{1}{k}})$ est à termes positifs et divergente donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ (suite croissante non convergente...).

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-V_n) = +\infty$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{V_n} = 0$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. a. Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$.

$$\sum_{k=2}^n \left[\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right] = V_n - \sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = V_n - \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln k) = V_n - (\ln 1 - \ln n).$$

$$\sum_{k=2}^n \left[\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right] = V_n + \ln n = \ln(e^{V_n}) + \ln n = \ln(e^{V_n} n) = \ln(n u_n).$$

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \ln(n u_n) = \sum_{k=2}^n \left[\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right].$$

b. Au voisinage de 0 : $\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2)$ et $\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Ainsi, au voisinage de 0, $\ln(2 - e^x) - \ln(1 - x) = -x - x^2 - \left(-x - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Alors $\ln(2 - e^x) - \ln(1 - x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. Ainsi :

$$\ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2}.$$

c. Posons $\forall k \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $w_k = \ln(2 - e^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

• $-w_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k^2}$; • $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2k^2} \geq 0$; • la série de terme général $\frac{1}{2k^2}$ est une série de Riemann (ou presque...) convergente.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $-w_k$ converge ; il en est de même pour la série de terme général w_k .

Ainsi la suite de terme général $\sum_{k=2}^n w_k$ converge. Notons L sa limite. $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n w_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(n u_n))$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n u_n) = e^L$ (par continuité de la fonction $t \rightarrow e^t$ en L).

La suite de terme général $n u_n$ converge et sa limite e^L est non nulle donc : $n u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^L$.

Ceci donne encore $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^L}{n}$.

Posons $K = e^L$. K est un réel strictement positif et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n}$.

Il existe un réel strictement positif K tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n}$.

- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n}$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{K}{n} \geq 0$;
- la série de terme général $\frac{K}{n}$ diverge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n diverge.

La série de terme général u_n diverge.

4. a. $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, V_{n+1} - V_n = \ln(2 - e^{\frac{1}{n+1}}) < 0$ d'après **2. b.**. La suite $(V_n)_{n \geq 2}$ est donc strictement décroissante. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, la suite $(e^{V_n})_{n \geq 2}$ est strictement décroissante. Ainsi

La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante.

b. Soit n dans \mathbb{N}^* . $S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = -u_{2n+1} + u_{2n+2} < 0$.

$S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} u_{2n+3} = u_{2n+2} - u_{2n+3} > 0$.

Ainsi la suite $(S_{2n})_{n \geq 1}$ est décroissante et la suite $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ est croissante.

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^{2n+1} u_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_{2n+1}) = 0$. Ceci achève de montrer que :

les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

c. Les suites $(S_{2n})_{n \geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$ sont alors convergentes et ont même limite. Ce qui permet de dire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente. Par conséquent :

la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente.

EXERCICE 2

1. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $C = {}^tAB = (c_{ij})$.

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{kj}. \text{ Alors } \varphi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki}.$$

$$\forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} b_{ki}.$$

Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Notons que φ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} .

- Soient A, B, C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel.

$$\varphi(A, \lambda B + C) = \text{Tr}({}^tA(\lambda B + C)) = \text{Tr}(\lambda {}^tAB + {}^tAC) = \lambda \text{Tr}({}^tAB) + \text{Tr}({}^tAC) = \lambda \varphi(A, B) + \varphi(A, C) \text{ car}$$

Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\forall (A, B, C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(A, \lambda B + C) = \lambda \varphi(A, B) + \varphi(A, C).$$

Ainsi φ est linéaire à droite.

- Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sa transposée ont même trace.

$$\text{Ainsi } \varphi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB) = \text{Tr}({}^t({}^tAB)) = \text{Tr}({}^tB {}^t({}^tA)) = \text{Tr}({}^tBA) = \varphi(B, A).$$

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \varphi(A, B) = \varphi(B, A). \text{ } \varphi \text{ est symétrique.}$$

- Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$. Ainsi $\varphi(A, A) \geq 0$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(A, A) \geq 0$. φ est positive.

- Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(A, A) = 0$.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 = 0 \text{ et } \forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ki}^2 \geq 0. \text{ Ainsi } \forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ki}^2 = 0.$$

Alors $\forall (i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ki} = 0$. Donc $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(A, A) = 0 \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. φ est définie. Ceci achève de montrer que :

φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. a. tAA est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ${}^t({}^tAA) = {}^tA({}^tA) = {}^tAA$. tAA est alors une matrice symétrique d'ordre n à coefficients réels. Ainsi :

il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$P^{-1}({}^tAA)P = {}^tP({}^tAA)P = D.$$

b. $({}^tAA)X = \lambda X$. En multipliant à gauche par tX on obtient ${}^tX({}^tAA)X = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$.

Ou ${}^tX^tAAX = \lambda \|X\|^2$. Soit encore ${}^t(AX)AX = \lambda \|X\|^2$. Finalement $\|AX\|^2 = \lambda \|X\|^2$.

X n'étant pas nul (X est un vecteur propre) sa norme ne l'est pas davantage et : $\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}$.

λ est donc un réel positif ou nul.

Si λ est une valeur propre de tAA , $\lambda \geq 0$.

c. Montrons rapidement que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont même trace.

Soit M et N deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice inversible Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = Q^{-1}NQ$.

Alors $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(Q^{-1}(NQ)) = \text{Tr}((NQ)Q^{-1})$ d'après le rappel proposé au début de l'exercice.

Ainsi $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(NQQ^{-1}) = \text{Tr}(N)$.

Notons alors que tAA et D sont semblables car $P^{-1}({}^tAA)P = {}^tP({}^tAA)P = D$.

Ainsi $[N(A)]^2 = \varphi(A, A) = \text{Tr}({}^tAA) = \text{Tr}(D)$.

De même (ou presque) B^tB et S sont semblables car $S = {}^tP(B^tB)P = P^{-1}(B^tB)P$. Donc $\text{Tr}(B^tB) = \text{Tr}(S)$.

Ainsi $[N(B)]^2 = \varphi(B, B) = \text{Tr}({}^tBB) = \text{Tr}(B^tB) = \text{Tr}(S)$.

$\text{Tr}(SD) = \text{Tr}(({}^tPB^tBP)({}^tP^tAAP)) = \text{Tr}({}^tPB^tBP^tP^tAAP) = \text{Tr}(P^{-1}B^tB^tAAP)$ car ${}^tP = P^{-1}$.

$P^{-1}B^tB^tAAP$ et B^tB^tAA étant semblables il vient :

$\text{Tr}(SD) = \text{Tr}(P^{-1}B^tB^tAAP) = \text{Tr}(B^tB^tAA)$. Or $\text{Tr}(B^tB^tAA) = \text{Tr}({}^tB^tAAB)$.

Alors : $\text{Tr}(SD) = \text{Tr}({}^tB^tAAB) = \text{Tr}({}^t(AB)AB) = \varphi(AB, AB) = [N(AB)]^2$. Ou plus simplement (!?) :

$[N(AB)]^2 = \varphi(AB, AB) = \text{Tr}({}^t(AB)AB) = \text{Tr}({}^tB^tAAB) = \text{Tr}({}^tB^tPD^tPB) = \text{Tr}({}^tPB^tBPD) = \text{Tr}(SD)$. Finalement :

$$\boxed{[N(A)]^2 = \text{Tr}(D)} \quad \boxed{[N(B)]^2 = \text{Tr}(S)} \quad \boxed{[N(AB)]^2 = \text{Tr}(SD)}$$

d. Posons $U = SD = (u_{ij})$. $\text{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^n u_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n s_{ik} d_{ki} = \sum_{i=1}^n s_{ii} d_{ii} = \sum_{i=1}^n s_{ii} \lambda_i$.

$$\boxed{\text{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii}.}$$

e. Ici i est un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\|{}^t B P E_i\|^2 = {}^t (B P E_i) {}^t B P E_i = {}^t E_i {}^t P {}^t (B) {}^t B P E_i = {}^t E_i {}^t P B {}^t B P E_i = {}^t E_i S E_i.$$

$$\boxed{{}^t E_i S E_i = \|{}^t B P E_i\|^2.}$$

Rappelons que $S E_i$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne de S . Ainsi $S E_i = \sum_{k=1}^n s_{ki} E_k$.

Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et rappelons que (E_1, E_2, \dots, E_n) est une base orthonormée de $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

$$\text{Alors } {}^t E_i S E_i = \langle E_i, S E_i \rangle = \langle E_i, \sum_{k=1}^n s_{ki} E_k \rangle = s_{ii}.$$

$$\boxed{{}^t E_i S E_i = s_{ii}.}$$

$$s_{ii} = {}^t E_i S E_i = \|{}^t B P E_i\|^2 \geq 0.$$

$$\boxed{s_{ii} \geq 0.}$$

$$\text{f. } \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n s_{ii} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{k=1}^n s_{kk} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \sum_{k=1}^n s_{kk} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i s_{ii} + \lambda_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n s_{kk} \right).$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n s_{ii} \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} + \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n s_{kk} \right).$$

$$\text{Or } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_{kk} \geq 0 \text{ donc } \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n s_{kk} \right) \geq 0.$$

$$\text{Ainsi } \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n s_{ii} \right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii}.$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n s_{ii} \right).}$$

$$\text{Donc } [N(AB)]^2 = \text{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^n s_{ii} \right) = \text{Tr}(D) \text{Tr}(S) = [N(A)]^2 [N(B)]^2.$$

$$\text{Alors : } [N(AB)]^2 \leq [N(A)]^2 [N(B)]^2.$$

Comme $N(AB)$, $N(A)$, $N(B)$ sont des réels positifs ou nuls il vient alors :

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

PROBLÈME

Préliminaire

Nous supposons que l'existence de l'espérance de XY résulte de l'existence de la variance de X et de Y ...

$(X - E(X))(Y - E(Y)) = XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)$ donc $(X - E(X))(Y - E(Y))$ est combinaison linéaire de quatre variables aléatoires qui possèdent une espérance ; ainsi $(X - E(X))(Y - E(Y))$ possède alors une espérance. Par conséquent $\text{cov}(X, Y)$ existe.

Mieux, par linéarité de l'espérance :

$$\text{cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y).$$

$$\text{Ainsi } \text{cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. Ici les variables aléatoires n'étant pas discrètes nous n'utiliserons pas la formule standard de la variance d'une somme... Nous redémontrons en utilisant uniquement la linéarité de l'espérance (qui est au programme...)

Soit λ un réel. X et Y possèdent une espérance donc $\lambda X + Y$ possède une espérance qui vaut $\lambda E(X) + E(Y)$.

$$((\lambda X + Y) - E(\lambda X + Y))^2 = (\lambda(X - E(X)) + (Y - E(Y)))^2.$$

$$((\lambda X + Y) - E(\lambda X + Y))^2 = \lambda^2 (X - E(X))^2 + 2\lambda (X - E(X))(Y - E(Y)) + (Y - E(Y))^2.$$

Or les variables aléatoires $(X - E(X))^2$, $(X - E(X))(Y - E(Y))$ et $(Y - E(Y))^2$ possèdent une espérance donc $((\lambda X + Y) - E(\lambda X + Y))^2$ possède une espérance. De plus :

$$E\left([(\lambda X + Y) - E(\lambda X + Y)]^2\right) = \lambda^2 E\left((X - E(X))^2\right) + 2\lambda E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) + E\left((Y - E(Y))^2\right).$$

$$E\left([(\lambda X + Y) - E(\lambda X + Y)]^2\right) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + V(Y).$$

Ainsi $V(\lambda X + Y)$ existe et vaut $\lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + V(Y)$.

$$\text{Pour tout réel } \lambda, \lambda X + Y \text{ possède une variance et } V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + V(Y).$$

2. a. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = V(\lambda X + Y)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \operatorname{cov}(X, Y) + V(Y), \forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = V(\lambda X + Y) \geq 0$ et $V(X) > 0$.

P est donc un polynôme du second degré à coefficients réels qui ne prend que des valeurs positives ou nulles.

Ainsi P ne peut avoir deux racines réelles distinctes. Par conséquent son discriminant est négatif ou nul.

Donc $(2 \operatorname{cov}(X, Y))^2 - 4V(X)V(Y) \leq 0$. Ainsi $(\operatorname{cov}(X, Y))^2 - V(X)V(Y) \leq 0$. Finalement :

$$\boxed{(\operatorname{cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y).}$$

b. Reprenons les notations de **a.**

• Supposons $(\operatorname{cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$ alors le discriminant de P est nul. Ainsi P admet une racine réelle d'ordre 2 que nous noterons λ_0 . Alors $V(\lambda_0 X + Y) = 0$.

• Réciproquement supposons qu'il existe λ_0 dans \mathbb{R} tel que $V(\lambda_0 X + Y) = 0$. Alors P admet au moins une racine réelle. Son discriminant, qui est négatif ou nul ne peut être strictement négatif ; il est donc nul. Alors $(2 \operatorname{cov}(X, Y))^2 - 4V(X)V(Y) = 0$ donc $(\operatorname{cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$.

Finalement $(\operatorname{cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$ si et seulement si il existe un réel λ_0 tel que $V(\lambda_0 X + Y) = 0$.

$$\boxed{(\operatorname{cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y) \text{ si et seulement si il existe un réel } \lambda_0 \text{ tel que } V(\lambda_0 X + Y) = 0.}$$

Soit λ_0 un réel. $V(\lambda_0 X + Y) = 0$ si et seulement si $\lambda_0 X + Y$ est presque sûrement constante. Ainsi :

$V(\lambda_0 X + Y) = 0$ si et seulement si il existe un réel b tel que $P(\lambda_0 X + Y = b) = 1$ ou $P(Y = -\lambda_0 X + b) = 1$.

Alors :

$$\boxed{(\operatorname{cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y) \text{ si et seulement si il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que } P(Y = aX + b) = 1.}$$

Partie I : Etude d'une fonction de deux variables

1. Nous supposons ici que A est strictement positif.

Notons que $]0, A[\times]0, +\infty[$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 comme produit de deux ouverts de \mathbb{R} .

$(a, b) \rightarrow \frac{1}{b^n}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, A[\times]0, +\infty[$ comme fonction rationnelle.

$(a, b) \rightarrow -\frac{1}{b}(-na + S)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, A[\times]0, +\infty[$ comme fonction rationnelle et $t \rightarrow e^t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ; par composition $(a, b) \rightarrow e^{-\frac{1}{b}(-na+S)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, A[\times]0, +\infty[$.

Alors par produit $(a, b) \rightarrow \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-na+S)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, A[\times]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est strictement positif, } L_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur l'ouvert }]0, A[\times]0, +\infty[.}$$

Supposons alors que L_n admette un extremum en un point (a, b) de l'ouvert $]0, A[\times]0, +\infty[$. Alors (a, b) est un point critique de L_n .

En particulier $\frac{\partial L_n}{\partial a}(a, b) = 0$. Donc $\frac{1}{b^n} \frac{n}{b} e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} = 0$ ce qui est impossible.

Si A est strictement positif, L_n n'admet pas d'extremum sur l'ouvert $]0, A[\times]0, +\infty[$.

2. Nous supposons dans la première partie de la question que A est strictement positif.

Soit a un élément de $]0, A[$ et b un élément de $]0, +\infty[$.

n étant strictement positif : $-na + b > -nA + b$.

$-\frac{1}{b}$ étant strictement négatif : $-\frac{1}{b}(-na + S) < -\frac{1}{b}(-nA + S)$.

$t \rightarrow e^t$ étant strictement croissante sur \mathbb{R} : $e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} < e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}$.

Alors : $\frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} < \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}$ car $\frac{1}{b^n}$ est strictement positif. Finalement :

si A est strictement positif, $\forall a \in]0, A[$, $\forall b \in]0, +\infty[$, $L_n(a, b) < L_n(A, b)$.

Ici A est simplement positif ou nul.

$\forall a \in]A, +\infty[$, $\forall b \in]0, +\infty[$, $L_n(a, b) = 0 < \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)} = L_n(A, b)$. Ainsi :

$\forall a \in]A, +\infty[$, $\forall b \in]0, +\infty[$, $L_n(a, b) < L_n(A, b)$.

Finalement :

$\forall a \in]0, +\infty[- \{A\}$, $\forall b \in]0, +\infty[$, $L_n(a, b) < L_n(A, b)$.

3. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall b \in]0, +\infty[$, $g'(b) = \frac{-n}{b^{n+1}} e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)} + \frac{1}{b^n} \frac{-nA+S}{b^2} e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}$.

$\forall b \in]0, +\infty[$, $g'(b) = \frac{1}{b^{n+2}} (-nb - nA + S) e^{-\frac{1}{b}(-nA+S)}$.

$\forall b \in]0, +\infty[$, $g'(b) > 0 \iff -nb - nA + S > 0 \iff b < \frac{S - nA}{n}$.

$\forall b \in]0, +\infty[$, $g'(b) < 0 \iff -nb - nA + S < 0 \iff b > \frac{S - nA}{n}$.

Posons $b_0 = \frac{S - nA}{n} = \frac{S}{n} - A$ et remarquons que b_0 appartient à $]0, +\infty[$ car $n > 0$ et $S > nA$.

On peut alors dire que g est strictement croissante sur $]0, b_0]$ et strictement décroissante sur $[b_0, +\infty[$.

Ainsi g admet un maximum absolu sur $]0, +\infty[$ réalisé en le seul point b_0 .

g admet un maximum absolu sur $]0, +\infty[$ réalisé en un point b_0 et un seul. De plus $b_0 = \frac{S - nA}{n}$.

4. Posons $a_0 = A$ et rappelons que $b_0 = \frac{S - nA}{n}$. Soit (a, b) un point de $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ distinct de (a_0, b_0) .

• Supposons $a \neq a_0$. Alors $a \neq A$ donc $L_n(a, b) < L_n(A, b) = g(b) \leq g(b_0) = L_n(a_0, b_0)$ d'après **1** et **3**.

Donc $L_n(a, b) < L_n(a_0, b_0)$.

• Supposons $a = a_0$. Alors $a = A$ et $b \neq b_0$. Ainsi $L_n(a, b) = L_n(A, b) = g(b) < g(b_0) = L_n(a_0, b_0)$ d'après **3**.

On a encore $L_n(a, b) < L_n(a_0, b_0)$.

Finalement $\forall (a, b) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[- \{(a_0, b_0)\}$, $L_n(a, b) < L_n(a_0, b_0)$. Ainsi :

L_n admet un maximum absolu sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ réalisé en un point (a_0, b_0) et un seul.

De plus $(a_0, b_0) = \left(A, \frac{S - nA}{n} \right)$.

Partie II : Etude d'une loi

1. • $x \rightarrow \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}}$ est continue sur \mathbb{R} donc $f_{a,b}$ est continue SUR $[a, +\infty[$. De plus $f_{a,b}$ est nulle sur $] -\infty, a[$ donc $f_{a,b}$ est continue SUR cet intervalle.

Ceci suffit pour dire que $f_{a,b}$ est au moins continue sur $\mathbb{R} - \{a\}$ donc sur \mathbb{R} privé d'un nombre fini de points.

• $\forall x \in [a, +\infty[$, $f_{a,b}(x) = \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} \geq 0$. Comme $f_{a,b}$ est nulle sur $] -\infty, a[$ on peut donc affirmer que $f_{a,b}$ est positive sur \mathbb{R} .

• $f_{a,b}$ est nulle sur $] -\infty, a[$ donc $\int_{-\infty}^a f_{a,b}(t) dt$ existe et vaut 0.

Rappelons que $f_{a,b}$ est continue sur $[a, +\infty[$.

$$\forall x \in [a, +\infty[, \int_a^x f_{a,b}(t) dt = \int_a^x \frac{1}{b} e^{-\frac{t-a}{b}} dt = \left[-e^{-\frac{t-a}{b}} \right]_a^x = 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - e^{-\frac{x-a}{b}} \right) = 1$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x-a}{b} \right) = -\infty$ puisque b est strictement positif.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f_{a,b}(t) dt = 1$. Alors $\int_a^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ existe et vaut 1.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ existe et vaut 1. Ce qui achève de montrer que :

$f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

2. Notons $F_{a,b}$ la fonction de répartition de X . $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{a,b}(x) = \int_{-\infty}^x f_{a,b}(t) dt$.

$f_{a,b}$ est nulle sur $] -\infty, a[$ donc $\forall x \in] -\infty, a[$, $F_{a,b}(x) = \int_{-\infty}^x f_{a,b}(t) dt = 0$.

De plus $\forall x \in [a, +\infty[$, $F_{a,b}(x) = \int_{-\infty}^x f_{a,b}(t) dt = \int_a^x f_{a,b}(t) dt = 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}$ d'après le calcul fait plus haut.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x-a}{b}} & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

La fonction de répartition $F_{a,b}$ de X est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x-a}{b}} & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. Soit $G_{a,b}$ la fonction de répartition de Y . $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_{a,b}(x) = P(Y \leq x) = P(X \leq x + a) = F_{a,b}(x + a)$.

Alors si $x \in]-\infty, 0[$ on a : $x + a \in]-\infty, a[$ et $G_{a,b}(x) = F_{a,b}(x + a) = 0$.

Si $x \in [0, +\infty[$ on a : $x + a \in [a, +\infty[$ et $G_{a,b}(x) = F_{a,b}(x + a) = 1 - e^{-\frac{x+a-a}{b}} = 1 - e^{-\frac{x}{b}}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{b}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On reconnaît alors la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$.

$Y = X - a$ suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$.

Le cours indique que Y possède une espérance qui vaut b et une variance qui vaut b^2 .

Comme $X = Y + a$, X possède une espérance qui vaut $E(Y) + a$, c'est à dire $b + a$, et une variance qui vaut $V(Y)$, c'est à dire b^2 .

$E(X)$ existe et vaut $a + b$. $V(X)$ existe et vaut b^2 .

4. Soit p un élément de \mathbb{N} . $E(X^p)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^p f_{a,b}(t) dt$ converge.

Or $t \rightarrow t^p f_{a,b}(t)$ est nulle sur $] -\infty, a[$ et continue sur $[a, +\infty[$. Ainsi $E(X^p)$ existe si et seulement si $\int_a^{+\infty} t^p f_{a,b}(t) dt$ converge et en cas d'existence $E(X^p) = \int_a^{+\infty} t^p f_{a,b}(t) dt$.

Montrons alors par récurrence que pour tout élément p de \mathbb{N} , $\int_a^{+\infty} t^p f_{a,b}(t) dt$ converge.

- La propriété est vraie pour $p = 0$ car $\int_a^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ converge et vaut 1.

- Soit p un élément de \mathbb{N}^* . Supposons que la propriété est vraie pour $p - 1$ et montrons la pour p .

Posons $\forall t \in [a, +\infty[$, $u(t) = t^p$ et $v(t) = -e^{-\frac{t-a}{b}}$.

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ et $\forall t \in [a, +\infty[$, $u'(t) = p t^{p-1}$ et $v'(t) = f_{a,b}(t)$.

Dès lors en intégrant par parties il vient : $\forall x \in [a, +\infty[$, $\int_a^x t^p f_{a,b}(t) dt = \left[-t^p e^{-\frac{t-a}{b}} \right]_a^x + p \int_a^x t^{p-1} e^{-\frac{t-a}{b}} dt$.

Ainsi : $\forall x \in [a, +\infty[$, $\int_a^x t^p f_{a,b}(t) dt = a^p - x^p e^{-\frac{x-a}{b}} + bp \int_a^x t^{p-1} f_{a,b}(t) dt$.

Or, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a^p - x^p e^{-\frac{x-a}{b}} \right) = a^p$ donc $\int_a^{+\infty} t^p f_{a,b}(t) dt$ est de même nature que : $\int_a^{+\infty} t^{p-1} f_{a,b}(t) dt$ car bp n'est pas nul...

Par hypothèse de récurrence $\int_a^{+\infty} t^{p-1} f_{a,b}(t) dt$ converge, donc $\int_a^{+\infty} t^p f_{a,b}(t) dt$ converge et la récurrence s'achève.

Notons encore que l'existence de $\int_a^{+\infty} t^{p-1} f_{a,b}(t) dt$ donne non seulement l'existence de $\int_a^{+\infty} t^p f_{a,b}(t) dt$ mais donne également l'égalité : $\int_a^{+\infty} t^p f_{a,b}(t) dt = a^p + bp \int_a^{+\infty} t^{p-1} f_{a,b}(t) dt$.

Ce qui précède montre que, pour tout élément p de \mathbb{N} , $\int_a^{+\infty} t^p f_{a,b}(t) dt$ converge, donc pour tout élément p de \mathbb{N} , $E(X^p)$ existe.

De plus $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $E(X^p) = \int_a^{+\infty} t^p f_{a,b}(t) dt = a^p + bp \int_a^{+\infty} t^{p-1} f_{a,b}(t) dt = a^p + bp E(X^{p-1})$.

Pour tout élément p de \mathbb{N} , $E(X^p)$ existe.

Pour tout élément p de \mathbb{N}^* , $E(X^p) = a^p + bp E(X^{p-1})$.

Exercice Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $E(X^p) = b^p p! \sum_{k=0}^p \frac{a^k}{b^k k!}$.

5. a. Posons $Z = -b \ln(1 - U) + a$. Notons F_Z la fonction de répartition de cette variable aléatoire (dixit le texte...).

Notons F_U la fonction de répartition de U . $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(-b \ln(1 - U) + a \leq x) = P\left(\ln(1 - U) \geq -\frac{x-a}{b}\right)$ car b est strictement positif.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = P\left(1 - U \geq e^{-\frac{x-a}{b}}\right) = P\left(U \leq 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}\right) = F_U\left(1 - e^{-\frac{x-a}{b}}\right)$.

Si x est un réel de l'intervalle $] -\infty, a[$, $1 - e^{-\frac{x-a}{b}}$ est strictement négatif et : $F_Z(x) = F_U\left(1 - e^{-\frac{x-a}{b}}\right) = 0$.

Si x est un réel de l'intervalle $[a, +\infty[$, $1 - e^{-\frac{x-a}{b}}$ appartient à $[0, 1[$ et : $F_Z(x) = F_U\left(1 - e^{-\frac{x-a}{b}}\right) = 1 - e^{-\frac{x-a}{b}}$.

La fonction de répartition de $Z = -b \ln(1 - U) + a$ est la même que celle de X . Par conséquent :

$-b \ln(1 - U) + a$ suit la loi $\mathcal{E}(a, b)$.

b. Tout est dit dans a.!

```

1 function tirage(a,b:real):real;
2 begin
3   tirage:=-b*ln(1-random)+a;
4 end;
```

Partie III : Estimation des paramètres a et b

1. Voici la totalité d'un programme qui simule $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et $Y_n = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

```

1 programme Ecricome2007;
2
3 function tirage(a,b:real):real;
4 begin
5   tirage:=-b*ln(1-random)+a;
6 end;
7
8 var i,n:integer;a,b,X,S,Y:real;
9
10 begin
11   randomize;
12   write('Donner a. a=');readln(a);
13   write('Donner b. b=');readln(b);
14   write('Donner n. n=');readln(n);
15
16   S:=tirage(a,b);Y:=S;
17
18   for i:=2 to n do
19     begin
20       X:=tirage(a,b);
21       S:=S+X;
22       if X<Y then Y:=X;
23     end;
24
25   writeln('S_',n,' a pris la valeur : ',S);
26   writeln('Y_',n,' a pris la valeur : ',Y);
27 end.
```

2. Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$. X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires qui possèdent une espérance qui vaut $a + b$ donc $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ possède une espérance qui vaut $E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$ c'est à dire $n(a + b)$.

X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires **indépendantes** qui possèdent une variance qui vaut b^2 donc $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ possède une variance qui vaut $V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$ c'est à dire nb^2 .

Pour tout n dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$, S_n possède une espérance qui vaut $n(a + b)$ et une variance qui vaut nb^2 .

3. Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty[$. X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{E}(a, b)$ donc $X_1 - a, X_2 - a, \dots, X_n - a$ sont n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{b}$.

Le cours montre alors que :

$(X_1 - a) + (X_2 - a) + \dots + (X_n - a)$ suit la loi gamma de paramètres b et n , ceci pour tout n dans $\llbracket 2, +\infty[$.

Posons $T_n = (X_1 - a) + (X_2 - a) + \dots + (X_n - a)$. $T_n \hookrightarrow \Gamma(b, n)$.

Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_{T_n}(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{t}{b}} t^{n-1}}{b^n \Gamma(n)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_{T_n} est une densité de T_n .

Comme $S_n = T_n + na$, S_n est une variable aléatoire à densité admettant pour densité $f_{S_n} : t \rightarrow f_{T_n}(t - na)$.

Notons que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{t-na}{b}} (t-na)^{n-1}}{b^n \Gamma(n)} & \text{si } t \in]na, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et rappelons que $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Pour tout n dans $\llbracket 2, +\infty[$, S_n est une variable aléatoire réelle à densité admettant pour densité la fonction f_{S_n} définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{t-na}{b}} (t-na)^{n-1}}{b^n (n-1)!} & \text{si } t \in]na, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty[$. Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de $Y_n = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et observons que Y_n prend ses valeurs dans $[a, +\infty[$.

$\forall x \in]-\infty, a[$, $F_{Y_n}(x) = 0$. Soit x un élément de $[a, +\infty[$.

$F_{Y_n}(x) = P(\text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x) = 1 - P(\text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n) > x)$.

$F_{Y_n}(x) = 1 - P(\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\} \cap \dots \cap \{X_n > x\}) = 1 - P(X_1 > x) P(X_2 > x) \dots P(X_n > x)$ car X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes.

Notons que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(X_i > x) = 1 - P(X_i \leq x) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{x-a}{b}}\right) = e^{-\frac{x-a}{b}}$ car x appartient à $[a, +\infty[$.

Ainsi $F_{Y_n}(x) = 1 - \left(e^{-\frac{x-a}{b}}\right)^n = 1 - e^{-\frac{x-a}{(b/n)}}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, a[\\ 1 - e^{-\frac{x-a}{(b/n)}} & \text{si } x \in [a, +\infty[\end{cases}$. Comme b/n est strictement positif on peut

dire que Y_n suit la loi $\mathcal{E}\left(a, \frac{b}{n}\right)$.

En particulier $E(Y_n)$ existe et vaut $a + \frac{b}{n}$, $V(Y_n)$ existe et vaut $\left(\frac{b}{n}\right)^2$.

Pour tout élément n de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$, Y_n suit la loi $\mathcal{E}\left(a, \frac{b}{n}\right)$, $E(Y_n) = a + \frac{b}{n}$ et $V(Y_n) = \left(\frac{b}{n}\right)^2$.

5. a. Soit n dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$. Notons que Y_n possède un moment d'ordre 2 donc on peut parler du biais (resp. du risque quadratique) de Y_n en tant qu'estimateur de a .

Nous noterons $b_{Y_n}(a)$ ce biais et $r_{Y_n}(a)$ ce risque quadratique.

$$b_{Y_n}(a) = E(Y_n) - a = a + \frac{b}{n} - a = \frac{b}{n}.$$

Pour tout n dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$, le biais de $Y_n = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ en tant qu'estimateur de a est : $\frac{b}{n}$.

$$r_{Y_n}(a) = E((Y_n - a)^2). \quad r_{Y_n}(a) \text{ vaut encore } V(Y_n) + (b_{Y_n}(a))^2.$$

$$\text{Ainsi } r_{Y_n}(a) = \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2 = 2\left(\frac{b}{n}\right)^2.$$

Pour tout n dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$, le risque quadratique de $Y_n = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ en tant qu'estimateur de a est : $2\left(\frac{b}{n}\right)^2$.

b. Rappelons l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

Si W est une variable aléatoire réelle discrète ou à densité qui possède un moment d'ordre 2 :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \quad P(|W| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(W^2)}{\varepsilon^2}.$$

Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$. Soit ε un élément de \mathbb{R}^{+*} .

$$Y_n - a \text{ possède un moment d'ordre 2 qui vaut } r_{Y_n}(a) = 2\left(\frac{b}{n}\right)^2.$$

$$\text{Le rappel permet d'écrire : } 0 \leq P(|Y_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{E((Y_n - a)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{r_{Y_n}(a)}{\varepsilon^2} = \frac{2b^2}{\varepsilon^2 n^2}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2b^2}{\varepsilon^2 n^2} = 0$ donc par encadrement on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - a| \geq \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout réel ε strictement positif. Alors la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à a .

$$\text{De plus } \lim_{n \rightarrow +\infty} E(Y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) = a.$$

Les deux points précédents montrent alors que :

(Y_n) est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais, convergente.

6. a. Soit n dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$. S_n et Y_n possèdent une espérance donc $Z_n = \frac{S_n}{n} - Y_n$ possède une espérance.

Nous pouvons ainsi parler du biais de Z_n en tant qu'estimateur de b . Nous le noterons $b_{Z_n}(b)$.

$$b_{Z_n}(b) = E(Z_n) - b = \frac{1}{n} E(S_n) - E(Y_n) - b = \frac{1}{n} (n(a+b)) - \left(a + \frac{b}{n}\right) - b = -\frac{b}{n}.$$

Pour tout n dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$, le biais de $Z_n = \frac{S_n}{n} - Y_n$ en tant qu'estimateur de b est : $-\frac{b}{n}$.

Notons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{Z_n}(b) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n) = b$.

b. Soit n dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$. S_n et Y_n possèdent une variance donc $Z_n = \frac{S_n}{n} - Y_n$ possède une variance.

Ainsi Z_n possède un moment d'ordre 2 et nous pouvons parler du risque quadratique de Z_n en tant qu'estimateur de b . Nous le noterons $r_{Z_n}(b)$.

$$\text{Notons que } V(Z_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(S_n) - \frac{2}{n} \text{cov}(S_n, Y_n) + V(Y_n) = \frac{nb^2}{n^2} - \frac{2}{n} \text{cov}(S_n, Y_n) + \left(\frac{b}{n}\right)^2.$$

$$\text{Donc } V(Z_n) = \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n} \text{cov}(S_n, Y_n) + \frac{b^2}{n^2}.$$

$$r_{Z_n}(b) = V(Z_n) + (b_{Z_n}(b))^2 = \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n} \text{cov}(S_n, Y_n) + \frac{b^2}{n^2} + \left(-\frac{b}{n}\right)^2 = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n} \text{cov}(S_n, Y_n).$$

Pour tout n dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$, le risque quadratique de $Z_n = \frac{S_n}{n} - Y_n$ en tant qu'estimateur de b est :

$$\frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n} \text{cov}(S_n, Y_n).$$

c. Soit ε un élément de \mathbb{R}^{+*} . Soit n dans $\llbracket 2, +\infty \llbracket$.

Z_n possédant un moment d'ordre 2, nous pouvons écrire comme dans **5. b** :

$$0 \leq P(|Z_n - b| \geq \varepsilon) \leq \frac{E((Z_n - b)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{r_{Z_n}(b)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n} \text{cov}(S_n, Y_n) \right).$$

$$\text{Or } -\frac{2}{n} \text{cov}(S_n, Y_n) \leq \frac{2}{n} |\text{cov}(S_n, Y_n)| \leq \frac{2}{n} \sqrt{V(S_n)V(Y_n)} \text{ d'après le préliminaire.}$$

$$\text{Ainsi } -\frac{2}{n} \text{cov}(S_n, Y_n) \leq \frac{2}{n} \sqrt{V(S_n)V(Y_n)} = \frac{2}{n} \sqrt{nb^2 \frac{b^2}{n^2}} = \frac{2b^2}{n\sqrt{n}}.$$

$$\text{Alors } 0 \leq P(|Z_n - b| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} + \frac{2b^2}{n\sqrt{n}} \right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} + \frac{2b^2}{n\sqrt{n}} \right) \right) = 0$, il vient par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - b| \geq \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout réel ε strictement positif.

La suite (Z_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à b .

Rappelons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n) = b$. Ainsi :

(Z_n) est une suite d'estimateurs de b asymptotiquement sans biais, convergente.

7. Nous supposons dans la suite que x_1, x_2, \dots, x_n sont des réels positifs ou nuls.

a. Soit (a, b) un élément de $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

• Supposons que $\text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ n'appartient pas à $[a, +\infty[$; c'est à dire que $a > \text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Alors il existe un élément i_0 de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que x_{i_0} appartiennent à $] -\infty, a[$ donc tel que $f_{a,b}(x_{i_0}) = 0$ ce qui donne $L(a, b) = 0$.

• Supposons que $\text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ appartient à $[a, +\infty[$; c'est à dire que $a \leq \text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i \in [a, +\infty[$ donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_{a,b}(x_i) = \frac{1}{b} e^{-\frac{x_i-a}{b}}$. Donc :

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{b} e^{-\frac{x_i-a}{b}} \right) = \frac{1}{b^n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i-a}{b}} = \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b} \left(\sum_{i=1}^n x_i - na \right)} = \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b} \left(-na + \sum_{i=1}^n x_i \right)}.$$

Concluons. Pour cela posons $S = \sum_{i=1}^n x_i$ et $A = \text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Nous venons de prouver que $\forall (a, b) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, L(a, b) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} & \text{si } 0 \leq a \leq A \\ 0 & \text{si } a > A \end{cases}$.

Observons que n appartient à \mathbb{N}^* et que A et S sont deux réels positifs ou nuls. Montrons que $S > nA$.

$$S = \sum_{i=1}^n x_i \geq \sum_{i=1}^n \text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = nA \text{ donc } S \geq nA.$$

Notons que si $S = nA$ alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Donc $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ et alors $\text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \text{Max}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ce qui contredit l'hypothèse.

Ceci achève de montrer que :

L est la fonction L_n de **I** avec $A = \text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $S = \sum_{i=1}^n x_i$.

b. L'estimation de a obtenue sur l'échantillon (x_1, x_2, \dots, x_n) à partir de $Y_n = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est :

$\text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ c'est à dire A donc a_0 .

L'estimation de b obtenue sur l'échantillon (x_1, x_2, \dots, x_n) à partir de $Z_n = \frac{S_n}{n} - Y_n$ est

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ c'est à dire } \frac{S}{n} - A \text{ donc } b_0.$$

Les estimations de a et b obtenues sur l'échantillon (x_1, x_2, \dots, x_n) à partir de Y_n et Z_n sont les valeurs a_0 et b_0 obtenues dans la parties I.

Les spécialistes diront que les estimateurs Y_n et Z_n de a et b ont été obtenus en utilisant le maximum de vraisemblance...
