ECRICOME 2009 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

PARTIE I : Étude d'un cas particulier

1. $\Phi_A(V_1) = AV_1 - V_1A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -V_2 + V_3.$

$\Phi_A(V_2) = AV_2 - V_2A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -V_1 + V_4.$

$\Phi_A(V_3) = AV_3 - V_3A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = V_1 - V_4.$

$\Phi_A(V_4) = AV_4 - V_4A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = V_2 - V_3.$

$$\boxed{\text{La matrice } T \text{ de l'endomorphisme } \Phi_A \text{ dans la base } (V_1, V_2, V_3, V_4) \text{ s'écrit : } T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

T est une matrice symétrique d'ordre 4 à coefficients réels donc :

$$\boxed{T \text{ est diagonalisable.}}$$

2. $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

$T^3 = T \times T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 4T.$

$$\boxed{T^3 = 4\,T.}$$

$T^3 - 4T = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ donc $X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de T dont les zéros dans $\mathbb{R}$ sont 2, -2 et 0.

Par conséquent le spectre de T est **contenu** dans $\{2, -2, 0\}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des valeurs propres de } T \text{ est } \textbf{contenu} \text{ dans } \{2,-2,0\}.\ \mathrm{Sp}(T) \subset \{2,-2,0\}.}$$

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$T\,X = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y+z=0 \\ -x+t=0 \\ x-t=0 \\ y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=y \\ t=x \end{cases}.$$

$\{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid y = z \text{ et } t = x\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ x \end{pmatrix} ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

$\{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\} = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Posons $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid TX = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}\} = \text{Vect}(X_3, X_4)$.

D'abord X_3 n'est pas nul et $TX_3 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ donc 0 est valeur propre de T.

Ce qui précède montre aussi que le sous-espace propre associé, que nous noterons SEP $(T, 0)$, est $\text{Vect}(X_3, X_4)$.

(X_3, X_4) est une famille génératrice de SEP $(T, 0)$. Montrons que cette famille est libre.

Soient deux réels α et β tels que $\alpha\, X_3 + \beta\, X_4 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ donc $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$. Par conséquent : $\alpha = \beta = 0$.

Ceci achève de montrer que (X_3, X_4) est une famille libre. C'est donc une base de SEP $(T, 0)$.

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } T \text{ et } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base du sous-espace propre associé.}}$$

4. $T\,X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\,X_1$.

$T\,X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\,X_2$.

$$\boxed{TX_1 = 2X_1 \text{ et } TX_2 = -2X_2.}$$

5. Rappelons que 0 est valeur propre de T et que (X_3, X_4) est une base du sous-espace propre associé.

X_1 n'est pas nul et $T\,X_1 = 2\,X_1$ donc 2 est valeur propre de T et X_1 est un vecteur propre associé.

X_2 n'est pas nul et $T\,X_2 = -2\,X_2$ donc -2 est valeur propre de T et X_2 est un vecteur propre associé.

0, 2, et -2 sont des valeurs propres de T et nous avons vu que le spectre de T est contenu dans $\{2, -2, 0\}$.

Ainsi **les** valeurs propres de T sont 2, -2 et 0. $\text{Sp}(T) = \{2, -2, 0\}$.

$\dim \text{SEP}\ (T, 2) \geqslant 1$, $\dim \text{SEP}\ (T, -2) \geqslant 1$, $\dim \text{SEP}\ (T, 0) = 2$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de T est au plus 4, nécessairement $\dim \text{SEP}\ (T, 2) = 1$ et $\dim \text{SEP}\ (T, -2) = 1$.

Notons que $\dim \text{SEP}\ (T, 2) + \dim \text{SEP}\ (T, -2) + \dim \text{SEP}\ (T, 0) = 4$; on retrouve le fait que T est diagonalisable.

(X_1) est une base de SEP $(T, 2)$, (X_2) est une base de SEP $(T, -2)$ et (X_3, X_4) est une base de SEP $(T, 0)$.

Comme $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est somme directe de ces trois sous-espaces propres, (X_1, X_2, X_3, X_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de T respectivement associés aux valeurs propres 2, -2, 0, 0.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base (X_1, X_2, X_3, X_4).

Ce qui précède indique que : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, P est inversible et $P^{-1}TP = \mathrm{Diag}(2, -2, 0, 0)$.

Notons que $D = \mathrm{Diag}(2, -2, 0, 0)$ est une matrice diagonale telle que $T = PDP^{-1}$.

Si P est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et si D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors P est inversible et $T = PDP^{-1}$.

Exercice *Montrer que* $P^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE II : Réduction de Φ_A dans le cas général.

1. • Si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AM - MA$ est encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Φ_A est donc une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soient M et N deux éléments de E et soit λ un réel.

$\Phi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda AM + AN - \lambda MA - NA = \lambda(AM - MA) + (AN - NA)$.

Donc $\Phi_A(\lambda M + N) = \lambda \Phi_A(M) + \Phi_A(M)$.

Ainsi Φ_A est linéaire.

$\boxed{\Phi_A \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

2. $\forall (M, N) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ \langle M \mid N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN) \in \mathbb{R} \quad (0)$.

• Soient M, N et P trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit λ un réel.

$\langle M \mid \lambda N + P\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^tM(\lambda N + P)\right) = \mathrm{Tr}(\lambda\, {}^tMN + {}^tMP) = \lambda\ \mathrm{Tr}({}^tMN) + \mathrm{Tr}({}^tMP) = \lambda \langle M \mid N\rangle + \langle M \mid P\rangle$.

$\forall (M, N, P) \in \Big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\Big)^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \langle M \mid \lambda N + P\rangle = \lambda \langle M \mid N\rangle + \langle M \mid P\rangle \quad (1)$.

• Soient $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle N \mid M\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} n_{i,j}\, m_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}\, n_{i,j} = \langle M \mid N\rangle$.

$\forall (M, N) \in \Big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\Big)^2,\ \langle N \mid M\rangle = \langle M \mid N\rangle \quad (2)$.

• Soit $M = (m_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle M \mid M\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}\, m_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 \geqslant 0$.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle M \mid M\rangle \geqslant 0 \quad (3)$.

• Soit $M = (m_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\langle M \mid M\rangle = 0$.

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 = 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{i,j}^2 \geqslant 0$. Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{i,j}^2 = 0$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = 0$. Donc M est la matrice nulle.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle M \,|\, M \rangle = 0 \Rightarrow M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ (4).

(0), (1), (2), (3), (4) suffisent pour dire que

$$\boxed{\text{l'application } (M,N) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2 \to \ \langle M \,|\, N \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

3. Soient M et N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\langle \Phi_A(M) \,|\, N \rangle = \operatorname{Tr}\left({}^t\Phi_A(M)N\right) = \operatorname{Tr}\left({}^t(AM - MA)N\right) = \operatorname{Tr}\left(\left({}^t(AM) - {}^t(MA)\right)N\right) = \operatorname{Tr}\left({}^t(AM)N - {}^t(MA)N\right)$.

$\langle \Phi_A(M) \,|\, N \rangle = \operatorname{Tr}\left({}^tM\,{}^tAN - {}^tA\,{}^tMN\right) = \operatorname{Tr}({}^tMAN) - \operatorname{Tr}(A\,{}^tMN)$ car A est symétrique.

Notons que $\operatorname{Tr}(A\,{}^tMN) = \operatorname{Tr}({}^tMNA)$.

Alors $\langle \Phi_A(M) \,|\, N \rangle = \operatorname{Tr}({}^tMAN) - \operatorname{Tr}({}^tMNA) = \operatorname{Tr}\left({}^tMAN - {}^tMNA\right) = \operatorname{Tr}\left({}^tM(AN - NA)\right) =< M, \Phi_A(M) >$.

$$\boxed{\text{Pour toutes matrices } M,\ N \text{ appartenant à } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ on a} : \langle \Phi_A(M) \,|\, N \rangle = \langle M \,|\, \Phi_A(N) \rangle.}$$

Alors Φ_A est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc :

$$\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$$

4. (a) Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$$M_{X,Y} = X\,{}^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \times (y_1\, y_2\, \cdots\, y_n) = (x_i\, y_j)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}.$$

X et Y sont des vecteurs propres de A. Ce sont donc des éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi on peut trouver deux éléments i_0 et j_0 de $[\![1,n]\!]$ tels que : $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$.

Alors $x_{i_0}\, y_{j_0}$ n'est pas nul. $M_{X,Y}$ ayant un coefficient non nul, ce n'est pas la matrice nulle.

$$\boxed{M_{X,Y} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}.}$$

$AY = \mu Y$ donc ${}^t(AY) = {}^t(\mu Y)$. Alors ${}^tY\,{}^tA = \mu\,{}^tY$. Comme A est symétrique on obtient :

$$\boxed{{}^tYA = \mu\,{}^tY.}$$

(b) $\Phi_A(M_{X,Y}) = AM_{X,Y} - M_{X,Y}A = AX\,{}^tY - X\,{}^tYA = (\lambda\, X)\,{}^tY - X\,(\mu\,{}^tY) = \lambda\, X\,{}^tY - \mu\, X\,{}^tY = (\lambda - \mu)\, M_{X,Y}$.

$$\boxed{\Phi_A(M_{X,Y}) = (\lambda - \mu)\, M_{X,Y}.}$$

Comme $M_{X,Y}$ n'est pas la matrice nulle, $\lambda - \mu$ est une valeur propre de Φ_A et $M_{X,Y}$ en est un vecteur propre associé.

Ce qui précède montre que si λ et μ sont deux valeurs propres quelconques de A, alors $\lambda - \mu$ est une valeur propre de Φ_A. Comme $\Gamma = \left\{\lambda - \mu\,,\ (\lambda, \mu) \in \left(\operatorname{Sp} A\right)^2\right\}$, Γ est contenu dans le spectre de Φ_A.

$$\boxed{\Gamma \subset \operatorname{Sp} \Phi_A.}$$

5. (a) A est diagonalisable donc il existe une base $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Comme pour tout vecteur propre Z de A, $MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$: $\forall k \in [\![1, n]\!],\ MZ_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit U un élément quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ la famille de ses coordonnées dans la base $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$.

$MU = M\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \gamma_k\, Z_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\gamma_k\, MZ_k) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_k\, 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi : $\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ MU = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après ce qui précède : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ ME_j = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Cela signifie encore que pour tout élément j de $[\![1, n]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de M est nulle. Donc M est la matrice nulle.

$$\boxed{\text{Si pour } \textbf{TOUT} \text{ vecteur propre } Z \text{ de } A,\ MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \text{ alors } M \text{ est la matrice nulle de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

M est un vecteur propre de Φ_A donc M n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est alors impossible que : pour tout vecteur propre Z de A on ait $MZ = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{il existe au moins un vecteur propre } Z_0 \text{ de } A \text{ tel que } MZ_0 \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}.}$$

(b) et (c) $\Phi_A(M) = \alpha\, M$ car M est un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre α.

Ceci s'écrit encore : $AM - MA = \alpha\, M$.

Alors $\alpha\, MZ_0 = (AM - MA)Z_0 = AMZ_0 - MAZ_0$.

Or $AZ_0 = \mu\, Z_0$. Ainsi : $\alpha\, MZ_0 = AMZ_0 - M(\mu\, Z_0) = AMZ_0 - \mu\, MZ_0$. Donc $AMZ_0 = (\alpha + \mu)\, MZ_0$.

Comme MZ_0 n'est pas nul(le), $\alpha + \mu$ est une valeur propre de A et MZ_0 en est un vecteur propre associé.

$$\boxed{MZ_0 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } \alpha + \mu.}$$

Dès lors, posons : $\lambda = \alpha + \mu$. $\alpha = \lambda - \mu$ et, λ et μ sont deux valeurs propres de A. Par conséquent α est un élément de Γ.

Nous venons de montrer que toute valeur propre α de Φ_A appartient à Γ. Donc $\mathrm{Sp}\,\Phi_A \subset \Gamma$. Ceci et la question 4 permettent d'affirmer que :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,\Phi_A = \Gamma = \left\{\lambda - \mu\,,\ (\lambda, \mu) \in \left(\mathrm{Sp}\,A\right)^2\right\}.}$$

EXERCICE 2

1. Domaine de définition de f :

(a) Soit a un réel strictement positif. Posons : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_a(t) = \begin{cases} a\, e^{-a\,t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

φ_a est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre a.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1. Il en est alors de même pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_a(t)\,\mathrm{d}t$.

En remarquant que $\forall t \in [0, +\infty[,\ e^{-at} = \dfrac{1}{a}\,\varphi_a(t)$ on peut dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{1}{a}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a \text{ strictement positif, l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{1}{a}\cdot}$$

(b) Soit x un réel. Posons : $\forall t \in [0, +\infty[,\ \psi_x(t) = e^{-2t}\sqrt{1 + x^2\,e^{2t}}$. ψ_x est continue et positive sur $[0, +\infty[$.

- Supposons que x vaut 0. $\forall t \in [0, +\infty[, \psi_x(t) = \psi_0(t) = e^{-2t}$. (a) montre alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

Remarque *f est définie en* 0 *et* $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_0(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot$

- Supposons x non nul. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (x^2\,e^{2t}) = +\infty$ donc $1 =_{t\to+\infty} \mathrm{o}(x^2\,e^{2t})$. Alors $1 + x^2\,e^{2t} \underset{t\to+\infty}{\sim} x^2\,e^{2t}$.

Par conséquent : $\psi_x(t) = e^{-2t}\sqrt{1 + x^2\,e^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-2t}\sqrt{x^2\,e^{2t}} = e^{-2t}\,|x|\,e^t = |x|\,e^{-t}$.

◇ $\psi_x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} |x|\,e^{-t}$.

◇ $\forall t \in [0, +\infty[,\ |x|\,e^{-t} \geqslant 0$.

◇ D'après (a), $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |x|\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x\text{, l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2\,e^{2t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Branche infinie de la courbe représentative de f :

(a) Soit x un réel strictement positif. Soit t un réel positif ou nul.

- $x\,e^t = |x\,e^t| = \sqrt{x^2\,e^{2t}} \leqslant \sqrt{1 + x^2\,e^{2t}}$. Ainsi : $x\,e^t \leqslant \sqrt{1 + x^2\,e^{2t}}$.
- $\left(x\,e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2\,e^{2t} + 2\,x\,e^t\,\dfrac{e^{-t}}{2x} + \dfrac{e^{-2t}}{4x^2} = x^2\,e^{2t} + 1 + \dfrac{e^{-2t}}{4x^2} \geqslant 1 + x^2\,e^{2t}$.

Alors $\sqrt{1 + x^2\,e^{2t}} \leqslant \sqrt{\left(x\,e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}\right)^2} = \left|x\,e^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}\right|$.

Or $x\,e^t+\dfrac{e^{-t}}{2x}$ est un réel positif. Ainsi $\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\leqslant x\,e^t+\dfrac{e^{-t}}{2x}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif et pour tout réel } t \text{ positif ou nul} : x\,e^t\leqslant\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\leqslant x\,e^t+\dfrac{e^{-t}}{2x}\cdot}$$

(b) Soit x un réel strictement positif.

$\forall t\in[0,+\infty[,\ x\,e^t\leqslant\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\leqslant x\,e^t+\dfrac{e^{-t}}{2x}$ et $e^{-2t}\geqslant 0$.

Alors $\forall t\in[0,+\infty[,\ x\,e^t\,e^{-2t}\leqslant e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\leqslant x\,e^t\,e^{-2t}+\dfrac{e^{-t}}{2x}\,e^{-2t}$.

Ou : $\forall t\in[0,+\infty[,\ x\,e^{-t}\leqslant\psi_x(t)\leqslant x\,e^{-t}+\dfrac{1}{2x}\,e^{-3t}\quad(\triangle)$.

D'après la première question $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-3t}\,\mathrm{d}t$ convergent et valent respectivement 1 et $\dfrac{1}{3}\cdot$

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(x\,e^{-t}+\frac{1}{2x}e^{-3t}\right)\mathrm{d}t$ convergent et valent respectivement x et $x+\dfrac{1}{2x}\times\dfrac{1}{3}\cdot$

Rappelons que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge également.

Alors l'inégalité $(\triangle)$ et la croissance de l'intégrale $(0\leqslant+\infty)$ donnent $x\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t\leqslant x+\frac{1}{6x}$ ou $x\leqslant f(x)\leqslant x+\dfrac{1}{6x}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif} : x\leqslant f(x)\leqslant x+\dfrac{1}{6x}\cdot}$$

(c) $\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ x\leqslant f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ donnent :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.}$$

$\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ 0\leqslant f(x)-x\leqslant\dfrac{1}{6x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6x}=0$ donnent par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=0$. Alors

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ admet pour asymptote en } +\infty \text{ la droite d'équation } y=x.}$$

Remarques 1. *$\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\ f(x)-x=\dfrac{1}{6x}\geqslant 0$. Notons encore que $f(0)-0=f(0)=\dfrac{1}{2}\cdot$*

Alors $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x)-x\geqslant 0$.

Mieux encore : $\forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)\geqslant 0\geqslant x$ donc $\forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)-x\geqslant 0$. Finalement : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)-x\geqslant 0$.

Ainsi la courbe représentative de f est au-dessus de la droite d'équation $y=x$.

2. *Par parité, la droite d'équation $y=-x$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et se trouve au-dessous de cette courbe.*

3. Dérivabilité et monotonie de f :

(a) Soit x un réel strictement positif.

Version 1. La fonction $t\to x\,e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ ce qui justifie le changement de variable $u=x\,e^t$ dans ce qui suit.

$\forall A\in[0,+\infty[,\ \displaystyle\int_0^A e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\,\mathrm{d}t=x^2\int_0^A\frac{\sqrt{1+(x\,e^t)^2}}{(x\,e^t)^3}\,x\,e^t\,\mathrm{d}t=x^2\int_x^{x\,e^A}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.$

Comme $\lim_{A\to+\infty}(x\,e^{A})=+\infty$ et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\,\mathrm{d}t=x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.$

Version 2. Ramons pour utiliser avec précision le théorème du programme (qui en particulier "fonctionne" sur des intervalles ouverts ! !).

Posons $\forall t\in]0,+\infty[,\ \ell(t)=x\,e^t$ et $\forall u\in]x,+\infty[,\ g(u)=x^2\,\dfrac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\cdot$

ℓ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\forall t\in]0,+\infty[,\ \ell'(t)=x\,e^t>0.$

ℓ est donc continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle définit alors une bijection de $]0,+\infty[$ sur

$]\lim_{t\to0}\ell(t),\lim_{t\to+\infty}\ell(t)[$ c'est à dire sur $]x,+\infty[$. Ainsi :

- $\diamond$ g est continue sur $]x,+\infty[$.
- $\diamond$ ℓ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]x,+\infty[$, croissante et de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\big(\ell(t)\big)\,\ell'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence elles sont égales.

Notons que $\forall t\in]0,+\infty[,\ g\big(\ell(t)\big)\,\ell'(t)=x^2\,\dfrac{\sqrt{1+(x\,e^t)^2}}{(x\,e^t)^3}\,x\,e^t=e^{-2t}\,\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}=\psi_x(t).$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\big(\ell(t)\big)\,\ell'(t)\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à $f(x)$. Ainsi $\displaystyle\int_x^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} g\big(\ell(t)\big)\,\ell'(t)\,\mathrm{d}t$ donc $f(x)$.

Finalement $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} g(u)\,\mathrm{d}u=x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u \text{ converge et } f(x)=x^2\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.}$$

(b) Notons que : $\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=x^2\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u=x^2\left(\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u-\int_1^{x}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u\right).$

Posons $\forall u\in]0,+\infty[,\ h(u)=\dfrac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\cdot$ h est continue sur $]0,+\infty[$. La primitive H de h sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1 est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Notons que $\forall x\in]0,+\infty[,\ H(x)=\displaystyle\int_1^{x}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.$

Alors $\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=x^2\left(\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u-H(x)\right).$

$x\to x^2$ et $x\to\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u-H(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ ($\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$ est une constante...).

Par produit :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

De plus $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=2\,x\left(\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u-H(x)\right)-x^2\,h(x).$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = 2\,x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u - x^2\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} = \frac{1}{x}\left(2\,x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u - \sqrt{1+x^2}\right).$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2\,f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{2\,f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.}$$

(c) Nous allons montrer le résultat en utilisant une intégration par parties.

Soit x un réel strictement positif. Soit A un réel strictement supérieur à x.

Posons $\forall u \in [x,+\infty[,\ v(u) = \sqrt{1+u^2}$ et $w(u) = -\dfrac{1}{2\,u^2}$.

v et w sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,+\infty[$. De plus $\forall u \in [x,+\infty[,\ v'(u) = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ et $w'(u) = \dfrac{1}{u^3}$.

En intégrant par parties on obtient alors :

$$\int_x^A \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{2\,u^2}\,\sqrt{1+u^2}\right]_x^A - \int_x^A \left(-\frac{1}{2\,u^2}\right)\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2\,x^2} - \frac{\sqrt{1+A^2}}{2\,A^2} + \frac{1}{2}\int_x^A \frac{\mathrm{d}u}{u\,\sqrt{1+u^2}}.$$

$\diamond$ $\dfrac{\sqrt{1+A^2}}{2\,A^2} \underset{A\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{2\,A^2} = \dfrac{1}{2\,A}$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2\,A} = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\sqrt{1+A^2}}{2\,A^2} = 0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{2\,x^2} - \frac{\sqrt{1+A^2}}{2\,A^2}\right) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2\,x^2}$.

$\diamond$ $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$ converge.

Dans ces conditions $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,\sqrt{1+u^2}}$ converge et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2\,x^2} + \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,\sqrt{1+u^2}}$.

Alors $2\,f(x) = 2\,x^2 \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,\sqrt{1+u^2}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,\sqrt{1+u^2}} \text{ converge et } 2\,f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,\sqrt{1+u^2}}.}$$

Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x} = x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,\sqrt{1+u^2}}$.

Soit x un réel strictement positif. $u \to \dfrac{1}{u\,\sqrt{1+u^2}}$ est strictement positive sur $[x,+\infty[$, $x < +\infty$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,\sqrt{1+u^2}}$ converge. Alors $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,\sqrt{1+u^2}} > 0$. Donc $x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,\sqrt{1+u^2}} > 0$.

Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) > 0$.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$$

4. Etude locale de f et f′ en 0 :

(a) Nous allons montrer le résultat en utilisant une intégration par parties.

Soit x un réel strictement positif. Soit A un réel strictement supérieur à x.

Posons $\forall u \in [x,+\infty[,\ z(u)=\ln u$ et $t(u)=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot$ Notons que $\forall u \in [x,+\infty[,\ t(u)=(1+u^2)^{-\frac{1}{2}}$.

z et t sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,+\infty[$.

De plus $\forall u \in [x,+\infty[,\ z'(u)=\dfrac{1}{u}$ et $t'(u)=-\dfrac{1}{2}\,(2\,u)\,(1+u^2)^{-\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot$

En intégrant par parties on obtient alors :

$$\int_x^A \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}=\left[\frac{\ln u}{\sqrt{1+u^2}}\right]_x^A-\int_x^A(\ln u)\left(-\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{d}u=\frac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}}-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+\int_x^A\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u\cdot$$

◇ $\dfrac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}}\underset{A\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ln A}{A}$ et par croissance comparée, $\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{\ln A}{A}=0$. Donc $\lim\limits_{A\to+\infty}\dfrac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}}=0$.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\dfrac{\ln A}{\sqrt{1+A^2}}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$

◇ $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$ converge.

Dans ces conditions $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ converge et $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}=-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+\int_x^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u\cdot$

Pour tout réel x dans $\mathbb{R}^{+*}$: $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u \text{ converge et } \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}=-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+\int_x^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u\cdot}$

Nous venons de voir que pour tout réel x strictement positif, $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ converge.

En particulier $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ converge. Ne reste plus qu'à montrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ converge.

$\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}=0$ car $\lim\limits_{u\to0^+}(u\,\ln u)=0$ et $\lim\limits_{u\to0^+}(1+u^2)^{\frac{3}{2}}=1$.

Alors $u\to\dfrac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^1\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ converge. Finalement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u \text{ converge.}}$$

(b) $\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{2\,f(x)-\sqrt{1+x^2}=}{x}=x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}=-\frac{x\,\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+x\int_x^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u.$

$\forall x\in]0,1[,\ f'(x)=-\dfrac{x\,\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ et $-x\,\ln x\neq0$.

Alors $\forall x\in]0,1[,\ \dfrac{f'(x)}{-x\,\ln x}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{1}{\ln x}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ (car $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ converge).

Alors $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(x)}{-x\,\ln x}=1$. Ainsi :

$$\boxed{f'x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\,\ln x.}$$

Soit x un réel de l'intervalle $]0,1[$.

$2\,f(x)-\sqrt{1+x^2}=x\,f'(x)$. $2\left(f(x)-\dfrac{1}{2}\right)=2\,f(x)-1=x\,f'(x)+\sqrt{1+x^2}-1=x\,f'(x)+\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

$2\left(f(x)-\dfrac{1}{2}\right)=x\,f'(x)+\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

En divisant par $-x^2\,\ln x$ qui n'est pas nul on obtient : $2\,\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{-x^2\,\ln x}=\dfrac{f'(x)}{-x\,\ln x}-\dfrac{1}{\ln x}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

Or $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{-x\,\ln x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{\ln x}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\,\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{-x^2\,\ln x}\right)=1$.

Alors $2\left(f(x)-\dfrac{1}{2}\right)\underset{x\to 0^+}{\sim}-x^2\,\ln x$ et :

$$\boxed{f(x)-\frac{1}{2}\underset{x\to 0^+}{\sim}-\frac{x^2\,\ln x}{2}.}$$

(c) Nous avons déjà vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

∇ Version 1 $\quad f(x)-\dfrac{1}{2}\underset{x\to 0^+}{\sim}-\dfrac{x^2\,\ln x}{2}$ et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{x^2\,\ln x}{2}\right)=0$. Alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}\right)=0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\dfrac{1}{2}=f(0)$. Par conséquent f est continue à droite en 0. Ainsi f est continue SUR $[0,+\infty[$.

$f'(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}-x\,\ln x$ et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x\,\ln x)=0$. Alors $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$.

Résumons : f est continue sur $[0,+\infty[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et f' admet une limite finie à droite en 0. Ceci suffit pour dire que :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[.}$$

∇ Version 2 $\quad$ Retrouvons rapidement ce résultat en utilisant très strictement le programme.

Soit $\tilde{f}$ la restriction de f à $]0,+\infty[$.

$\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 0}(\tilde{f})'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$ donc $(\tilde{f})'$ admet une limite finie en 0.

Le cours indique alors que $\tilde{f}$ se prolonge en une fonction $\widehat{\tilde{f}}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

$\widehat{\tilde{f}}$ et f coïncide sur $]0,+\infty[$.

De plus par continuité : $\widehat{\tilde{f}}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\widehat{\tilde{f}}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\widehat{\tilde{f}}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\tilde{f}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

Ainsi $\widehat{\tilde{f}}$ et f coïncide sur $[0,+\infty[$. f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Remarque $\quad$ *Ceci montre que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0)=0$. Notons que nous ne pouvons pas encore parler de $f'(0)$ car nous n'avons pas montré que f est dérivable en 0.*

Par parité $\forall x\in]-\infty,0],\ f(x)=f(-x)$.

$x\to -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$, $\forall x\in]-\infty,0],\ -x\in[0,+\infty[$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Par composition f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0]$.

Alors f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = f(-x)$ et f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -f'(-x)$.

Donc : $f'_g(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \big(- f'(-x)\big) = - \lim\limits_{x \to 0^-} f'(-x) = - \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -f'_d(0)$.

$f'_g(0) = -f'_d(0)$ or $f'_d(0) = 0$. Ainsi $f'_g(0) = 0 = f'_d(0)$. Cela suffit pour dire que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.}$$

PROBLÈME

PARTIE I

1. • Supposons que le nombre de tirages nécessaire pour obtenir une première boule blanche soit k. $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que k est supérieur ou égal à 2. Alors les k-1 premier(s) tirage(s) ont donné une boule noire qui à chaque fois a été remplacée par une boule blanche. Le nombre de boules noires étant au départ b, $k-1 \leqslant b$. Donc $k \leqslant b+1$.

Ce qui vaut encore si k est égal à 1.

Ainsi k appartient à $[\![1, b+1]\!]$. Alors $Y(\Omega) \subset [\![1, b+1]\!]$.

• Réciproquement soit k un élément de $[\![1, b+1]\!]$.

Si k vaut 1, l'obtention d'une boule blanche au premier tirage réalise l'événement $\{Y = k\}$.

Supposons que k est supérieur ou égal à 2. $k-1 \leqslant b$ donc on peut obtenir des boules noires au cours des $k-1$ premiers tirages et une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage et ainsi réaliser l'événement $\{Y = k\}$.

On a donc $[\![1, b+1]\!] \subset Y(\Omega)$. Finalement :

$$\boxed{Y(\Omega) = [\![1, b+1]\!].}$$

2. Pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, notons B_i (resp. N_i) l'événement le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche (resp. noire). Soit k un élément de $[\![1, b+1]\!]$.

Supposons que k est supérieur ou égal à 3. $P(Y = k) = P(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k)$. La formule des probabilités composées donne alors :

$P(Y = k) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \cdots P_{N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-2}}(N_{k-1})P_{N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1}}(B_k)$.

Ce que l'on peut encore écrire $P(Y = k) = P(N_1) \left(\displaystyle\prod_{i=2}^{k-1} P_{N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{i-1}}(N_i) \right) P_{N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1}}(B_k)$.

- $P(N_1) = \dfrac{b}{a+b}\cdot$
- Soit i un élément de $[\![2, k-1]\!]$. Supposons l'événement $N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{i-1}$ réalisé.

Avant le $i^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient alors $b-(i-1)$ boules noires et $a+(i-1)$ boules blanches.

La probabilité pour que le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire est alors $\dfrac{b-(i-1)}{a+b}\cdot$

Ainsi : $P_{N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{i-1}}(N_i) = \dfrac{b-(i-1)}{a+b}\cdot$

- Supposons l'événement $N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1}$ réalisé.

Avant le $k^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient alors $b-(k-1)$ boules noires et $a+(k-1)$ boules blanches.

La probabilité pour que le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire est alors $\dfrac{a+(k-1)}{a+b}\cdot$

Ainsi $P_{N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1}}(B_k) = \dfrac{a+k-1}{a+b}\cdot$

Donc $P(Y = k) = \dfrac{b}{a+b} \times \dfrac{b-1}{a+b} \times \cdots \times \dfrac{b-(k-2)}{a+b} \times \dfrac{a+k-1}{a+b}$ ou $P(Y = k) = \dfrac{b}{a+b} \left(\displaystyle\prod_{i=2}^{k-1} \dfrac{b-(i-1)}{a+b} \right) \dfrac{a+k-1}{a+b}\cdot$

$P(Y=k)=\dfrac{(a+k-1)}{(a+b)^k}\times b\,(b-1)\cdots(b-(k-2))=\dfrac{(a+k-1)}{(a+b)^k}\times\dfrac{b!}{\big(b-(k-1)\big)!}=\dfrac{(a+k-1)\,b!}{(b-k+1)!\,(a+b)^k}\cdot$

Donc si $k\in[\![3,b+1]\!]:P(Y=k)=\dfrac{(a+k-1)\,b!}{(b-k+1)!\,N^k}\quad(\star)$.

Si $k=1$, $P(Y=k)=P(B_1)=\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{a}{N}=\dfrac{a\,b!}{b!\,N}=\dfrac{(a+1-1)\,b!}{(b-1+1)!\,N^1}\cdot$ $(\star)$ vaut encore pour $k=1$.

Si $k=2$, $P(Y=k)=P(N_1\cap B_2)=P(N_1)\,P_{N_1}(B_2)=\dfrac{b}{a+b}\,\dfrac{a+1}{a+b}=\dfrac{b\,(a+1)}{N^2}=\dfrac{(a+1)\,b!}{(b-1)!\,N^2}=\dfrac{(a+2-1)\,b!}{(b-2+1)!\,N^2}\cdot$

$(\star)$ vaut encore pour $k=2$. Finalement :

$$\boxed{\forall k\in[\![1,b+1]\!],\ P(Y=k)=\dfrac{(a+k-1)\,b!}{(b-k+1)!\,N^k}\cdot}$$

Remarque Il n'aura échappé à personne que pour appliquer la formule des probabilités composées au niveau de $P(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k)$ *il eut fallu montrer que* $P(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-1})$ *n'est pas nul.*

Le faire le jour du concours sur ce texte serait presque une faute ! ! C'est pour cela que je ne l'ai pas fait.

Je suggère donc une nouvelle approche de la question. On montre dans une première étape par récurrence que pour tout élément k *de* $[\![1,b]\!]$, $P(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_k)=\dfrac{b!}{(b-k)!\,N^k}\cdot$

Dans une seconde étape, pour k *dans* $[\![2,b+1]\!]$ *on écrit :*

$P(Y=k)=P(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k)=P(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-1})\,P_{N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-1}}(B_k)$ *; ce qui est licite car* $P(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-1})$ *n'est pas nul. La suite est claire. Ne reste plus qu' à traiter le cas* $k=1$.

C'est de cette manière que j'ai traité le calcul de $p_{n,n}$ *dans II 1.*

3. Ainsi $P(Y=b+1)=\dfrac{(a+b+1-1)\,b!}{(b-(b+1)+1)!\,N^{b+1}}=\dfrac{N\,b!}{0!\,N^{b+1}}=\dfrac{b!}{N^b}\cdot$

$$\boxed{P(Y=b+1)=\dfrac{b!}{N^b}\cdot}$$

Soit k un élément de $[\![1,b]\!]$.

$P(Y=k)=\dfrac{(a+k-1)\,b!}{(b-k+1)!\,N^k}=\dfrac{(a+b)\,b!+(-b+k-1)\,b!}{(b-k+1)!\,N^k}=\dfrac{N\,b!}{(b-k+1)!\,N^k}-\dfrac{(b-k+1)\,b!}{(b-k+1)!\,N^k}\cdot$

$P(Y=k)=\dfrac{b!}{\big(b-(k-1)\big)!\,N^{k-1}}-\dfrac{b!}{(b-k)!\,N^k}\cdot$

$$\boxed{\forall k\in[\![1,b]\!],\ P(Y=k)=\dfrac{b!}{\big(b-(k-1)\big)!\,N^{k-1}}-\dfrac{b!}{(b-k)!\,N^k}\cdot}$$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{M}k(a_{k-1}-a_k)=\sum_{k=1}^{M}\Big(a_{k-1}+(k-1)\,a_{k-1}-k\,a_k\Big)=\sum_{k=1}^{M}a_{k-1}+\sum_{k=1}^{M}\Big((k-1)\ a_{k-1}-k\,a_k\Big).$

Par télescopage et changement d'indice il vient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{M}k(a_k-a_{k-1})=\sum_{k=0}^{M-1}a_k+0\times a_0-M\,a_M=\sum_{k=0}^{M-1}a_k-M\,a_M.$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{M}k(a_k-a_{k-1})=\sum_{k=0}^{M-1}a_k-M\,a_M.}$$

5. Y prenant un nombre fini de valeurs elle possède donc une espérance.

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{b+1} k\, P(Y=k) = \sum_{k=1}^{b} \left(k \left(\frac{b!}{(b-(k-1))!\, N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!\, N^k} \right) \right) + (b+1)\, \frac{b!}{N^b}.$$

Posons $M = b$ et pour tout élément k de $[\![0, M]\!]$, $a_k = \dfrac{b!}{(b-k)!\, N^k}$.

Alors $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1} - a_k) + \frac{(b+1)!}{N^b}$.

En appliquant le rśultat de la question 4 il vient : $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{M-1} a_k - M\, a_M + \frac{(b+1)!}{N^b}$.

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!\, N^k} - b\, \frac{b!}{(0)!\, N^b} + \frac{(b+1)!}{N^b} = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!\, N^k} + \frac{b!\,(b+1-b)}{N^b} = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{b!}{(b-k)!\, N^k} + \frac{b!}{N^b}.$$

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!\, N^k}.$$

$$\boxed{E(Y) = \sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!\, N^k}.}$$

PARTIE II

1. • $p_{0,0} = 1$. Notons que $p_{0,0} = \left(\dfrac{a}{N}\right)^0$.

Montrons par récurrence que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $p_{n,0} = \left(\dfrac{a}{N}\right)^n$.

La propriété est vrai pour $n = 1$ car $p_{1,0} = P(B_1) = \dfrac{a}{N}$.

Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$p_{n+1,0} = P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n+1})$. Par hypothèse de récurrence $p_{n,0} = \left(\dfrac{a}{N}\right)^n$ donc $P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = \left(\dfrac{a}{N}\right)^n$.

Alors $p_{n+1,0} = P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{n+1}) = P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n)\, P_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n}(B_{n+1})$ car $P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n)$ n'est pas nul(le).

$p_{n+1,0} = \left(\dfrac{a}{N}\right)^n P_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n}(B_{n+1})$.

Si $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$ est réalisé, avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient a boules blanches et b noires ; B_{n+1} se réalise alors avec la probabilité $\dfrac{a}{N}$.

Ainsi $p_{n+1,0} = \left(\dfrac{a}{N}\right)^n P_{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n}(B_{n+1}) = \left(\dfrac{a}{N}\right)^n \dfrac{a}{N} = \left(\dfrac{a}{N}\right)^{n+1}$. Ce qui achève la récurrence.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $p_{n,0} = \left(\dfrac{a}{N}\right)^n$. Mieux, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $p_{n,0} = \left(\dfrac{a}{N}\right)^n$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ p_{n,0} = \left(\frac{a}{N}\right)^n.}$$

• $p_{0,0} = 1$.

Si n est strictement supérieur à b, $p_{n,n} = 0$ car les boules noires ne sont pas remises dans l'urne une fois tirées et l'urne contient au départ b boules noires.

Montrons alors par récurrence que pour tout élément n de $[\![1, b]\!]$, $p_{n,n} = \dfrac{b!}{(b-n)!\, N^n}$.

$p_{1,1} = P(N_1) = \dfrac{b}{N} = \dfrac{b!}{(b-1)!\, N^1}$. La propriété est vraie pour $n = 1$.

Supposons la propriété vraie pour un élément n de $[\![1,b-1]\!]$ et montrons la pour $n+1$.

$p_{n+1,n+1}=P(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{n+1})$.

Par hypothèse de récurrence $p_{n,n}=\dfrac{b!}{(b-n)!\,N^n}$ donc $P(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_n)=\dfrac{b!}{(b-n)!\,N^n}\cdot$

Alors $p_{n+1,n+1}=P(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{n+1})=P(N_1\cap B_2\cap\cdots\cap N_n)\,P_{N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_n}(N_{n+1})$ car $P(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_n)$ n'est pas nul(le).

$p_{n+1,n+1}=p_{n,n}\,P_{N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_n}(N_{n+1})=\dfrac{b!}{(b-n)!\,N^n}\,P_{N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_n}(N_{n+1})$.

Si $N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_n$ est réalisé, avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient $a+n$ boules blanches et $b-n$ noires ; N_{n+1} se réalise alors avec la probabilité $\dfrac{b-n}{N}\cdot$

Ainsi $p_{n+1,n+1}=\dfrac{b!}{(b-n)!\,N^n}\,P_{N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_n}(N_{n+1})=\dfrac{b!}{(b-n)!\,N^n}\,\dfrac{b-n}{N}=\dfrac{b!}{(b-n-1)!\,N^{n+1}}=\dfrac{b!}{\big(b-(n+1)\big)!\,N^{n+1}}\cdot$

Ceci achève la récurrence. Notons pour finir que $p_{0,0}=1=\dfrac{b!}{(b-0)!\,N^0}\cdot$ Alors :

$$\boxed{\text{Pour tout élémenr } n \text{ de } \mathbb{N},\ p_{n,n}=\begin{cases}\dfrac{b!}{(b-n)!\,N^n} & \text{si } n\leqslant b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.}$$

• X_n prend ses valeurs dans $[\![0,\mathrm{Min}(n,b)]\!]$ donc $X_n(\Omega)$ est contenu dans $[\![0,n]\!]$. Alors $(\{X_n=k\})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

Par conséquent : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X_n=k)=1$. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}=1$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}=1.}$$

2. Soient n et k deux éléments de $\mathbb{N}^*$.

Notons que l'événement $\{X_n=k\}$ est contenu dans la réunion des événements $\{X_{n-1}=k-1\}$ et $\{X_{n-1}=k\}$.

Donc $\{X_n=k\}=\Big(\{X_{n-1}=k-1\}\cap\{X_n=k\}\Big)\cup\Big(\{X_{n-1}=k\}\cap\{X_n=k\}\Big)$. Par incompatibilité on obtient :

$P(X_n=k)=P(\{X_{n-1}=k-1\}\cap\{X_n=k\})+P(\{X_{n-1}=k\}\cap\{X_n=k\})$.

• Posons $\alpha_k=P(\{X_{n-1}=k-1\}\cap\{X_n=k\})$ et calculons cette probabilité.

⋄ Supposons la probabilité de l'événement $\{X_{n-1}=k-1\}$ non nulle.

$P(\{X_{n-1}=k-1\}\cap\{X_n=k\})=P(X_{n-1}=k-1)\,P_{\{X_{n-1}=k-1\}}(X_n=k)=p_{n-1,k-1}\,P_{\{X_{n-1}=k-1\}}(X_n=k)$.

Supposons que l'événement $\{X_{n-1}=k-1\}$ est réalisé. Avant le $n^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient $a+k-1$ boules blanches et $b-(k-1)$ boules noires. $\{X_n=k\}$ se réalise alors si et seulement si le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire, ce qui se produit avec la probabilité $\dfrac{b-(k-1)}{N}\cdot$

Ainsi $\alpha_k=p_{n-1,k-1}\,P_{\{X_{n-1}=k-1\}}(X_n=k)=p_{n-1,k-1}\,\dfrac{b-(k-1)}{N}=\dfrac{b-k+1}{N}\,p_{n-1,k-1}$.

⋄ Supposons la probabilité de l'événement $\{X_{n-1}=k-1\}$ nulle.

Comme l'événement $\{X_{n-1}=k-1\}\cap\{X_n=k\}$ est contenu dans l'événement $\{X_{n-1}=k-1\}$, par croissance de la probabilité : $P(\{X_{n-1}=k-1\}\cap\{X_n=k\})=0$.

Ainsi $\alpha_k = 0 = \dfrac{b-k+1}{N} \times 0 = \dfrac{b-k+1}{N}\, P(X_{n-1} = k-1) = \dfrac{b-k+1}{N}\, p_{n-1,k-1}$.

Finalement dans les deux cas $\alpha_k = \dfrac{b-k+1}{N}\, p_{n-1,k-1}$.

- Posons $\beta_k = P(\{X_{n-1} = k\} \cap \{X_n = k\})$ et calculons cette probabilité.

  ◇ Supposons la probabilité de l'événement $\{X_{n-1} = k\}$ non nulle.

$P(\{X_{n-1} = k\} \cap \{X_n = k\}) = P(X_{n-1} = k)\, P_{\{X_{n-1}=k\}}(X_n = k) = p_{n-1,k}\, P_{\{X_{n-1}=k\}}(X_n = k)$.

Supposons que l'événement $\{X_{n-1} = k\}$ est réalisé. Avant le $n^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient $a+k$ boules blanches et $b-k$ boules noires. $\{X_n = k\}$ se réalise alors si et seulement si le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche, ce qui se produit avec la probabilité $\dfrac{a+k}{N}$.

Ainsi $\beta_k = p_{n-1,k}\, P_{\{X_{n-1}=k\}}(X_n = k) = p_{n-1,k}\, \dfrac{a+k}{N} = \dfrac{a+k}{N}\, p_{n-1,k}$.

  ◇ Supposons la probabilité de l'événement $\{X_{n-1} = k\}$ nulle.

Comme l'événement $\{X_{n-1} = k\} \cap \{X_n = k\}$ est contenu dans l'événement $\{X_{n-1} = k\}$, par croissance de la probabilité : $P(\{X_{n-1} = k\} \cap \{X_n = k\}) = 0$.

Ainsi $\beta_k = 0 = \dfrac{a+k}{N} \times 0 = \dfrac{a+k}{N}\, P(X_{n-1} = k) = \dfrac{a+k}{N}\, p_{n-1,k}$.

Finalement dans les deux cas $\beta_k = \dfrac{a+k}{N}\, p_{n-1,k}$.

Alors $p_{n,k} = \alpha_k + \beta_k = \dfrac{b-k+1}{N}\, p_{n-1,k-1} + \dfrac{a+k}{N}\, p_{n-1,k} = \dfrac{a+k}{N}\, p_{n-1,k} + \dfrac{b+1-k}{N}\, p_{n-1,k-1}$.

Donc $N\, p_{n,k} = (a+k)\, p_{n-1,k} + (b+1-k)\, p_{n-1,k-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tous les entiers naturels non nuls } n \text{ et } k : N\, p_{n,k} = (a+k)\, p_{n-1,k} + (b+1-k)\, p_{n-1,k-1}.}$$

3. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Rappelons que $X_n(\Omega)$ est contenu dans $[\![0, n]\!]$.

Ainsi X_n possède une espérance qui vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, P(X_n = k)$.

$$N\, E(X_n) = N \sum_{k=0}^{n} k\, P(X_n = k) = N \sum_{k=1}^{n} k\, P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k\, N\, p_{n,k}.$$

$$N\, E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \Big(k\, \big[(a+k)\, p_{n-1,k} + (b+1-k)\, p_{n-1,k-1}\big] \Big) = \sum_{k=1}^{n} \left(k\, (a+k)\, p_{n-1,k}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(k\, (b+1-k)\, p_{n-1,k-1}\right).$$

En remarquant que $k\,(a+k)\, p_{n-1,k}$ vaut 0 pour $k = 0$ et $k = n$ et en faisant un petit changement d'indice dans la seconde somme il vient :

$$N\, E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(k\, (a+k)\, p_{n-1,k}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left((k+1)\, (b-k)\, p_{n-1,k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\big[k\, (a+k) + (k+1)\, (b-k)\big] p_{n-1,k} \Big).$$

$$N\, E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\big[k\, a + k^2 + k\, b - k^2 + b - k\big] p_{n-1,k} \Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\big[b + k\, (a+b-1)\big]\, p_{n-1,k} \Big).$$

$$N\, E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\big[b + k\, (N-1)\big]\, p_{n-1,k} \Big).$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ N\, E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\big[b + k\, (N-1)\big]\, p_{n-1,k} \Big).}$$

$$N\,E(X_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\big[b+k\,(N-1)\big]\,p_{n-1,k}\Big)=b\sum_{k=0}^{N-1}p_{n-1,k}+(N-1)\sum_{k=0}^{N-1}k\,p_{n-1,k}=b\times 1+(N-1)\,E(X_{n-1}).$$

Alors : $E(X_n)=\dfrac{b}{N}+\dfrac{N-1}{N}\,E(X_{n-1})=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\,E(X_{n-1})+\dfrac{b}{N}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ E(X_n)=\left(1-\frac{1}{N}\right)\,E(X_{n-1})+\frac{b}{N}\cdot}$$

(b) Donnons une version un peu plus générale permettant de calculer $E(X_n)$ à partir de a, b et n.

```
Function Esperance(a,b,n:integer):real;

Var i:integer;u,v,w:real;

begin

u:=1-1/(a+b);v:=b/(a+b);w:=0;

For i:=1 to n do w:=u*w+v;

Esperance:=w;

end;

```

Remarque *Pour* $b=10$ *et* $N=100$, *la machine donne* $E(X_{2009})=9.999\,999\,982\,742\,5$.

(c) $\big(\big(E(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmético-géométrique. L'équation $x\in\mathbb{R}$ et $x=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\,x+\dfrac{b}{N}$ admet pour unique solution b.

Alors $\big(\big(E(X_n)-b\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1-\dfrac{1}{N}$ et de premier terme $E(X_0)-b$ ou $-b$ car $E(X_0)$ vaut 0.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N},\ E(X_n)-b=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n(-b)$. Donc $E(X_n)=\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n(-b)+b=b\left[1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n\right]$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ E(X_n)=b\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right].}$$

4. (a) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Comme nous l'avons déjà vu, $(\{X_n=k\})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

La formule des probabilités totales donne alors : $q_{n+1}=P(N_{n+1})=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(\{X_n=k\}\cap N_{n+1})$.

Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$. Calculons $P(\{X_n=k\}\cap N_{n+1})$ en envisageant deux cas.

◇ Supposons la probabilité de l'événement $\{X_n=k\}$ non nulle.

$P(\{X_n=k\}\cap N_{n+1})=P(X_n=k)\,P_{\{X_n=k\}}(N_{n+1})=p_{n,k}\,P_{\{X_n=k\}}(N_{n+1})$.

Supposons l'événement $\{X_n=k\}$ réalisé.

Avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage l'urne contient $a+k$ boules blanches et $b-k$ boules noires.

Alors N_{n+1} se réalise avec la probabilité $\dfrac{b-k}{N}\cdot$ Ainsi $P_{\{X_n=k\}}(N_{n+1})=\dfrac{b-k}{N}\cdot$

$P(\{X_n=k\}\cap N_{n+1})=p_{n,k}\,P_{\{X_n=k\}}(N_{n+1})=\dfrac{b-k}{N}\,p_{n,k}$.

$\diamond$ Supposons la probabilité de l'événement $\{X_n = k\}$ nulle.

Comme $\{X_n = k\} \cap N_{n+1}$ est contenu dans $\{X_n = k\}$, par croissance de la probabilité : $P(\{X_n = k\} \cap N_{n+1})) = 0$.

Alors $P(\{X_n = k\} \cap N_{n+1})) = 0 = \dfrac{b-k}{N} \times 0 = \dfrac{b-k}{N}\, P(X_n = k) = \dfrac{b-k}{N}\, p_{n,k}$.

Ainsi, dans les deux cas : $P(\{X_n = k\} \cap N_{n+1})) = \dfrac{b-k}{N}\, p_{n,k}$.

Alors $q_{n+1} = P(N_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(\{X_n = k\} \cap N_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b-k}{N}\, p_{n,k}\right)$.

Donc $N\, q_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \big((b-k)\, p_{n,k}\big)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ N\, q_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \big((b-k)\, p_{n,k}\big).}$$

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$N\, q_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big((b-k)\, p_{n,k}\big) = b \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} - \sum_{k=0}^{n} k\, p_{n,k} = b \times 1 - E(X_n) = b - E(X_n)$. $q_{n+1} = \dfrac{b}{N} - \dfrac{1}{N}\, E(X_n)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} = \frac{b}{N} - \frac{1}{N}\, E(X_n).}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} = \dfrac{b}{N} - \dfrac{1}{N}\, E(X_n) = \dfrac{b}{N} - \dfrac{1}{N} \left(b \left[1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^{n}\right]\right) = \dfrac{b}{N} \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^{n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+1} = \frac{b}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n}.}$$

5. **(a)** Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $X_n\,(X_n - 1)$ prend un nombre fini de valeurs donc possède une espérance.

Le théorème de transfert permet d'écrire :

$u_n = E\big(X_n(X_n - 1)\big) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k(k-1)\, P(X_n = k)) = \sum_{k=0}^{n} (k(k-1)\, p_{n,k}) = \sum_{k=1}^{n} (k(k-1)\, p_{n,k})$.

$N\, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k(k-1)\, N\, p_{n,k})$. En appliquant **II.2.** il vient :

$N\, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(k(k-1)\, \big[(a+k)\, p_{n-1,k} + (b+1-k)\, p_{n-1,k-1}\big]\Big)$.

$N\, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(k(k-1)\, (a+k)\, p_{n-1,k}\Big) + \sum_{k=1}^{n} \Big(k(k-1)\, (b+1-k)\, p_{n-1,k-1}\Big)$.

En remarquant que $k(k-1)\,(a+k)\, p_{n-1,k}$ vaut 0 si $k = 0$ ou si $k = n$ et en faisant un changement d'indice sur la seconde somme il vient :

$N\, u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \Big(k(k-1)\, (a+k)\, p_{n-1,k}\Big) + \sum_{k=0}^{n-1} \Big((k+1)k\, (b-k)\, p_{n-1,k}\Big)$.

$N\, u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \Big(k\, \big[(k-1)\,(a+k) + (k+1)\,(b-k)\big]\, p_{n-1,k}\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(k\, [k\, a + k^2 - a - k + k\, b - k^2 + b - k]\, p_{n-1,k}\Big)$.

$N\, u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \Big(k\, \big[k\,(a+b-2) + b - a\big]\, p_{n-1,k}\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(k\, \big[k\,(N-2) + b - a\big]\, p_{n-1,k}\Big)$.

Soit k un élément de $[\![0, n-1]\!]$.

$k\,(N-2)+b-a=(k-1)\,(N-2)+N-2+b-a=(k-1)\,(N-2)+a+b-2+b-a=(k-1)\,(N-2)+2\,(b-1)$.

Donc $N\,u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\Big(k\,\big[(k-1)\,(N-2)+2\,(b-1)\big]\,p_{n-1,k}\Big)=\sum_{k=0}^{n-1}\Big([k\,(k-1)\,(N-2)+2\,(b-1)\,k]\,p_{n-1,k}\Big)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } N^*,\ N\,u_n=\sum_{k=0}^{n-1}\Big([k\,(k-1)\,(N-2)+2\,(b-1)\,k]\,p_{n-1,k}\Big).}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } N^*,\ N\,u_n=\sum_{k=0}^{n-1}\Big([k\,(k-1)\,(a+b-2)+2\,(b-1)\,k]\,p_{n-1,k}\Big).}$$

Remarque *Pour faire plaisir au concepteur on peut aussi dire que*

$$N\,u_n=\sum_{k=1}^{n-1}\Big([k\,(k-1)\,(a+b-2)+2\,(b-1)\,k]\,p_{n-1,k}\Big)$$

pourvu que n soit élément de $[\![2,+\infty[\![$...

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$N\,u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\Big([k\,(k-1)\,(N-2)+2\,(b-1)\,k]\,p_{n-1,k}\Big)=(N-2)\sum_{k=0}^{n-1}\Big(k\,(k-1)\,p_{n-1,k}\Big)+2\,(b-1)\sum_{k=0}^{n-1}k\,p_{n-1,k}$.

$N\,u_n=(N-2)\,E\big(X_{n-1}(X_{n-1}-1)\big)+2\,(b-1)\,E(X_{n-1})=(N-2)\,u_{n-1}+2\,(b-1)\,\left(b\left[1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}\right]\right)$.

En divisant par N il vient : $u_n=\left(1-\dfrac{2}{N}\right)\,u_{n-1}+\dfrac{2\,b\,(b-1)}{N}\,\left[1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}\right]$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ u_n=\left(1-\frac{2}{N}\right)\,u_{n-1}+\frac{2\,b\,(b-1)}{N}\,\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].}$$

(c) Montrons par rćurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $u_n=b\,(b-1)\,\left[1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^n-2\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n\right]$.

• X_0 est la variable certaine égale à 0. $X_0(X_0-1)$ également donc $u_0=E\big(X_0(X_0-1)\big)=0$.

Or $0=b\,(b-1)[1+1-2]=b\,(b-1)\,\left[1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^0-2\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^0\right]$.

Donc $u_0=b\,(b-1)\,\left[1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^0-2\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^0\right]$ et l'égalité est vraie pour $n=0$.

• Supposons l'égalité vraie pour $n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour n.

L'hypothèse de récurrence donne $u_{n-1}=b\,(b-1)\,\left[1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^{n-1}-2\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}\right]$.

Or d'après (b) : $u_n=\left(1-\dfrac{2}{N}\right)\,u_{n-1}+\dfrac{2\,b\,(b-1)}{N}\,\left[1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}\right]$. Ainsi :

$$u_n=\left(1-\frac{2}{N}\right)\,b\,(b-1)\,\left[1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}-2\,\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right]+\frac{2\,b\,(b-1)}{N}\,\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].$$

$u_n = b\,(b-1)\left[1-\dfrac{2}{N}+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^n-2\,\left(1-\dfrac{2}{N}\right)\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{N}-\dfrac{2}{N}\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}\right].$

$u_n = b\,(b-1)\left[1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^n-2\,\left(1-\dfrac{2}{N}+\dfrac{1}{N}\right)\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}\right].$

$u_n = b\,(b-1)\left[1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^n-2\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}\right]=b\,(b-1)\left[1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^n-2\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n}\right].$

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_n = b\,(b-1)\left[1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^n-2\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^{n}\right].}$$

Remarque *Donnons quelques éléments pour trouver la valeur de u_n sans avoir le résultat.*

Le cas $N=2$ ne pose pas de problème (on a alors $a=b=1$)... Nous supposerons donc $N\geqslant 3$.

Posons $\alpha = 1-\dfrac{2}{N}$, $\beta=\dfrac{2\,b\,(b-1)}{N}$ et $\gamma=1-\dfrac{1}{N}\cdot$ Notons que α n'est pas nul car N est différent de 2.

Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. $u_k=\alpha\,u_{k-1}+\beta-\beta\,\gamma^{k-1}$ d'après (b). Alors $\dfrac{u_k}{\alpha^k}=\dfrac{u_{k-1}}{\alpha^{k-1}}+\dfrac{\beta}{\alpha^k}-\dfrac{\beta}{\alpha}\,\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^{k-1}$ et

$\dfrac{u_k}{\alpha^k}-\dfrac{u_{k-1}}{\alpha^{k-1}}=\dfrac{\beta}{\alpha^k}-\dfrac{\beta}{\alpha}\,\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^{k-1}.$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\dfrac{u_n}{\alpha^n}-\dfrac{u_0}{\alpha^0}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{u_k}{\alpha^k}-\dfrac{u_{k-1}}{\alpha^{k-1}}\right)=\beta\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\alpha^k}-\dfrac{\beta}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^{k-1}.$

Notons que $u_0=0$, $\dfrac{1}{\alpha}\neq 1$ et $\dfrac{\gamma}{\alpha}\neq 1$.

Alors $\dfrac{u_n}{\alpha^n}=\beta\,\dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{1-(1/\alpha)^n}{1-(1/\alpha)}-\beta\,\dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{1-(\gamma/\alpha)^n}{1-(\gamma/\alpha)}=\beta\,\dfrac{1}{\alpha^n}\,\dfrac{\alpha^n-1}{\alpha-1}-\beta\,\dfrac{1}{\alpha^n}\,\dfrac{\alpha^n-\gamma^n}{\alpha-\gamma}\cdot$

Alors $u_n=\beta\,\dfrac{\alpha^n-1}{\alpha-1}-\beta\,\dfrac{\alpha^n-\gamma^n}{\alpha-\gamma}$*. Notons que* $\alpha-1=-\dfrac{2}{N}$ *et* $\alpha-\gamma=-\dfrac{1}{N}\cdot$ *Alors :*

$u_n=\beta\,N\left[\alpha^n-\gamma^n-\dfrac{1}{2}\,(\alpha^n-1)\right]=\dfrac{\beta\,N}{2}\,\left[1+\alpha^n-2\,\gamma^n\right]\cdot$ *Rappelons que* $\alpha=1-\dfrac{2}{N}$, $\beta=\dfrac{2\,b\,(b-1)}{N}$ *et* $\gamma=1-\dfrac{1}{N}\cdot$

Alors : $u_n=b\,(b-1)\,\left[1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^n-2\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n\right].$

(d) Soit n un élément $\mathbb{N}$. X_n possède une variance car X_n prend un nombre fini de valeurs.

$V(X_n)=E(X_n^2)-\big(E(X_n)\big)^2=E\big(X_n(X_n-1)+X_n\big)-\big(E(X_n)\big)^2=E\big(X_n(X_n-1)\big)+E(X_n)-\big(E(X_n)\big)^2$. Alors :

$$\boxed{V(X_n)=b\,(b-1)\,\left[1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^n-2\,\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n\right]+b\left[1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n\right]-\left(b\left[1-\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n\right]\right)^2.}$$

$\left|1-\dfrac{2}{N}\right|<1$ et $\left|1-\dfrac{1}{N}\right|<1$. Alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^n=0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n=0.$

Par conséquent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}V(X_n)=b\,(b-1)\,[1+0-2\times 0]+b\,[1-0]-\big(b\,[1-0]\big)^2=b\,(b-1)+b-b^2=0.$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}V(X_n)=0.}$$

Remarque *Notons au passage que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}E(X_n)=b$.*

Exercice *Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à b.*