ECRICOME 2010 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

Ceci est un premier jet et a besoin encore de beaucoup de relectures pour bien tenir la route.

EXERCICE 1

1. Convergence de la suite $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\geqslant \mathbf{1}}$.

(a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit t un élément de $[0,1[$.

Comme t n'est pas égal à 1, $1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}=\dfrac{1-t^n}{1-t}\cdot$ Donc $\dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}=\dfrac{1-t}{1-t^n}\cdot$

Alors $\dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-(1-t)=\dfrac{1-t}{1-t^n}-(1-t)=(1-t)\left(\dfrac{1}{1-t^n}-1\right)=\dfrac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}\cdot$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[0,1[,\ \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-(1-t)=\frac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}\cdot}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit t un élément de $[0,1[$.

$0\leqslant t<1$ donne $t^n\leqslant t$, puis $0<1-t\leqslant 1-t^n$. On a alors $0<\dfrac{1-t}{1-t^n}\leqslant 1$ et $t^n\geqslant 0$ donc $0\leqslant\dfrac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}\leqslant t^n$.

Ainsi $0\leqslant\dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-(1-t)\leqslant t^n\quad(\bigstar)$.

Notons que pour $t=1$, t^n vaut 1 et $\dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-(1-t)$ vaut $\dfrac{1}{n}\cdot$

Comme $\dfrac{1}{n}\leqslant 1$, l'inégalité $(\bigstar)$ vaut encore pour $t=1$.

Ainsi : $\forall t\in[0,1],\ 0\leqslant\dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-(1-t)\leqslant t^n$.

Puisque $0\leqslant 1$ en intégrant entre 0 et 1 il vient : $0\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}-\int_0^1(1-t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}=u_n$, $\displaystyle\int_0^1(1-t)\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{(1-t)^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}\cdot$

Alors $0\leqslant u_n-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{n+1}\cdot$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant u_n-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{n+1}\cdot}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}$, il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1}\text{ converge vers }\frac{1}{2}\cdot}$$

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\forall t\in[0,1[,\ \dfrac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}=\dfrac{1}{n}\,\dfrac{(1-t)\,t}{1-t^n}\,n\,t^{n-1}=\dfrac{1}{n}\,\dfrac{t-t^2}{1-t^n}\,n\,t^{n-1}=\dfrac{1}{n}\,\dfrac{(t^n)^{\frac{1}{n}}-(t^n)^{\frac{2}{n}}}{1-t^n}\,n\,t^{n-1}.$

Posons alors $\forall t \in [0,1[,\ \varphi_n(t) = t^n$ et $h_n(t) = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{t^{\frac{1}{n}} - t^{\frac{2}{n}}}{1-t}\cdot$ Notons que $\forall t \in [0,1[,\ \dfrac{(1-t)\,t^n}{1-t^n} = \varphi_n'(t)\,h_n\big(\varphi_n(t)\big)$.

h_n est continue sur $[0,1[$ et il n'est pas difficile de vérifier que φ_n est une bijection de $[0,1[$ sur $[0,1[$, croissante et de classe $\mathcal{C}^1$.

Le théorème de changement de variable sur les intégrales généralisées proposé par le programme permet de dire que $\displaystyle\int_0^1 \varphi_n'(t)\,h_n\big(\varphi_n(t)\big)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 h_n(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et qu'en cas de convergence elles sont égales.

Or $\forall t \in [0,1[,\ \varphi_n'(t)\,h_n\big(\varphi_n(t)\big) = \dfrac{(1-t)\,t^n}{1-t^n} = \dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t)$.

Comme $t \to \dfrac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t)$ est continue sur $[0,1]$, $t \to \dfrac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}$ est continue sur $[0,1[$ et prolongeable par continuité en 1.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}\,\mathrm{d}t$ est convergente. Donc $\displaystyle\int_0^1 \varphi_n'(t)\,h_n\big(\varphi_n(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge.

Ceci donne alors la convergence de $\displaystyle\int_0^1 h_n(u)\,\mathrm{d}u$ et l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \varphi_n'(t)\,h_n\big(\varphi_n(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h_n(u)\,\mathrm{d}u$.

Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{n}\,\frac{u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}}}{1-u}\right)\mathrm{d}u$ convergent et sont égales.

Notons que cela donne la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}}}{1-u}\,\mathrm{d}u$ donc l'existence de v_n.

De plus $\displaystyle u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t)\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(1-t)\,t^n}{1-t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}}}{1-u}\,\mathrm{d}u = \frac{v_n}{n}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}}}{1-u}\,\mathrm{d}u \text{ converge.}}$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}\cdot}$$

2. Résultats intermédiaires.

(a) Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1$. Alors $(\ln x)^k \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^k$ et ainsi $\dfrac{(\ln x)^k}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^{k-1}$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-1)^{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases}.$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^k}{x-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases}.}$$

(b) Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons $\forall x \in]0,1[,\ \psi_k(x) = \dfrac{(\ln x)^k}{x-1}\cdot$

ψ_k est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 1 (d'après **(a)**).

On peut donc déjà dire que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \psi_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Montrons que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \psi_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\,|\psi_k(x)|\right) = \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sqrt{x}\,(\ln x)^k}{x-1}\right| = 0$ par croissance comparée. Donc :

- $|\psi_k(x)| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ au voisinage de 0.

- $|\psi_k|$ et $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sont positives sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.
- $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge ($\frac{1}{2} < 1$).

Les critères de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} |\psi_k(x)|\,\mathrm{d}x$.

Alors $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \psi_k(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente donc convergente.

Ceci achève de montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \psi_k(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 \frac{(\ln x)^k}{x-1}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$$

(c) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 2\,e^{2x}$ et $f''(x) = e^x - 4\,e^{2x}$. $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée en 0 à l'ordre 1 pour f donne :

$\forall x \in]-\infty, 0],\ |f(x) - f(0) - f'(0)\,x| \leqslant \dfrac{|x-0|^2}{2} \underset{u\in[0,x]}{\mathrm{Max}} |f''(u)|$ ou $\forall x \in]-\infty, 0],\ \left|e^x - e^{2x} + x\right| \leqslant \dfrac{x^2}{2} \underset{u\in[0,x]}{\mathrm{Max}} |e^u - 4e^{2u}|$.

Notons que $\forall u \in]-\infty, 0],\ |e^u - 4e^{2u}| = e^u\,|1 - 4e^u| \leqslant |1 - 4\,e^u|$.

Posons alors : $\forall u \in]-\infty, 0], \ell(u) = 1 - 4\,e^u$. $u \to e^u$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ donc ℓ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

De plus $\ell(0) = -3$ et $\displaystyle\lim_{u\to-\infty} \ell(u) = 1$. Alors $\forall u \in]-\infty, 0],\ -3 \leqslant \ell(u) < 1$. Ainsi $\forall u \in]-\infty, 0],\ |\ell(u)| \leqslant 3$.

Donc $\forall u \in]-\infty, 0],\ |e^u - 4e^{2u}| = e^u\,|1 - 4e^u| \leqslant |1 - 4\,e^u| \leqslant 3$.

Ainsi $\forall x \in]-\infty, 0],\ \underset{u\in[0,x]}{\mathrm{Max}} |e^u - 4e^{2u}| \leqslant 3$.

Alors $\forall x \in]-\infty, 0],\ \left|e^x - e^{2x} + x\right| \leqslant \dfrac{x^2}{2} \underset{u\in[0,x]}{\mathrm{Max}} |e^u - 4e^{2u}| \leqslant \dfrac{3\,x^2}{2}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, 0],\ \left|e^x - e^{2x} + x\right| \leqslant \frac{3\,x^2}{2}\cdot}$$

3. Application.

(a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}} - u^{\frac{2}{n}}}{1-u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\,\mathrm{d}u.$$

Soit u un élément de $]0, 1[$. $\dfrac{\ln u}{n}$ appartient à $]-\infty, 0[$.

Alors, d'après **2. (c)** on a : $\left|e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \dfrac{\ln u}{n}\right| \leqslant \dfrac{3\,(\ln u)^2}{2\,n^2}\cdot$ De plus $\dfrac{1}{1-u} \geqslant 0$.

Donc : $\left|\dfrac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\right| = \dfrac{\left|e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}\right|}{1-u} \leqslant \dfrac{1}{1-u}\,\dfrac{3\,(\ln u)^2}{2\,n^2} = \dfrac{3}{2\,n^2}\,\dfrac{(\ln u)^2}{1-u}\cdot$ Alors :

- $\forall u \in]0, 1[,\ \left|\dfrac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\right| \leqslant \dfrac{3}{2\,n^2}\,\dfrac{(\ln u)^2}{1-u}\cdot$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{x-1}\,\mathrm{d}x$ converge d'après **2. (b)** donc $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{3}{2\,n^2}\,\frac{(\ln u)^2}{1-u}\right)\mathrm{d}u$ converge également.

Les critère de comparaison concernant les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\,\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\right|\mathrm{d}u$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\,\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\,\mathrm{d}u$ est alors absolument convergente (donc convergente mais cela on le savait déjà) ce qui permet d'écrire que $\displaystyle\left|\int_0^1 \frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\,\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\,\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\right|\mathrm{d}u$.

Mieux $\displaystyle\left|v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right| = \left|\int_0^1 \frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\,\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{e^{\frac{\ln u}{n}} - e^{\frac{2\,\ln u}{n}} + \frac{\ln u}{n}}{1-u}\right|\mathrm{d}u \leqslant \frac{3}{2\,n^2}\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \left|v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{3}{2\,n^2}\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u.}$$

(b) Posons $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u$ et rappelons que $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u$.

$\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|v_n + \frac{1}{n}\,I\right| \leqslant \frac{3}{2\,n^2}\,J$. Donc $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |n\,v_n + I| \leqslant \frac{3}{2\,n}\,J$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2\,n}\,J = 0$, il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n\,v_n) = -I$.

$\displaystyle u \to \frac{\ln u}{1-u}$ est strictement négative sur $]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u$ converge. Alors $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u < 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n\,v_n) = -I$ et $-I$ n'est pas nul. Alors $n\,v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -I$. Ce qui donne encore :

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{I}{n}\cdot}$$

Rappelons que $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - \frac{1}{2} = \frac{v_n}{n}\cdot$ Alors

$$\boxed{u_n - \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{I}{n^2}\cdot}$$

EXERCICE 2

▶ **Dans tout l'exercice nous écrirons $\mathbf{f_n}$ à la place de f**

1. Étude de f_n.

(a) • Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

P est un polynôme à coefficients réels de degré au plus n. Ainsi P' est un polynôme à coefficients réels de degré au plus $n-1$ et P'' est un polynôme à coefficients réels de degré au plus $n-2$.

Alors P'' et XP' sont deux polynômes à coefficients réels de degré au plus n. Finalement $f_n(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ comme combinaison linéaire de deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

• Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et soit λ un réel.

$f_n(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)'' - 4X(\lambda P+Q)' = \lambda P'' + Q'' - 4X(\lambda P' + Q') = \lambda(P'' - 4XP') + (Q'' - 4XQ')$.

$f_n(\lambda P+Q) = \lambda f_n(P) + f_n(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ f_n(\lambda P+Q) = \lambda f_n(P) + f_n(Q)$. Finalement :

$$\boxed{f_n \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

(b) $f_n(1) = 0_{\mathbb{R}_n[X]} - 4X \times 0_{\mathbb{R}_n[X]} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ et $f_n(X) = 0_{\mathbb{R}_n[X]} - 4X \times 1 = -4X$.

$\forall k \in [\![2,n]\!], f_n(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 4X(kX^{k-1}) = -4kX^k + k(k-1)X^{k-2}$.

$$\boxed{f_n(1) = 0_{\mathbb{R}_n[X]},\ f_n(X) = -4X \text{ et } \forall k \in [\![2,n]\!], f_n(X^k) = -4kX^k + k(k-1)X^{k-2}.}$$

D'après ce qui précède, pour tout k dans $[\![0,n]\!]$, $f_n(X^k)$ est comme combinaison linéaire d'éléments de la famille $(1, X, \ldots, X^k)$. Cela suffit pour dire que :

$$\boxed{\text{la matrice } A_n \text{ de } f_n \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}_n[X] \text{ est triangulaire supérieure.}}$$

(c) A_n est triangulaire supérieure donc son spectre est l'ensemble de ses éléments diagonaux.

Alors $\mathrm{Sp}\, f_n = \mathrm{Sp}\, A_n = \{-4k\,;\ k \in [\![0,n]\!]\}$.

La suite $(-4k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ étant strictement décroissante, f_n possède $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Comme f_n est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$:

$$\boxed{f_n \text{ est diagonalisable.}}$$

Sachant que f_n possède $n+1$ sous-espaces propres de dimension nécessairement au moins un et que la somme des dimensions des sous espaces propres de f_n n'exède pas la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est $n+1$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{chacun des sous-espaces propres de } f_n \text{ est de dimension 1.}}$$

(d) Soit P un vecteur propre de f_n associé à la valeur propre λ. Soit r son degré et a_r le coefficient de son terme de plus haut degré. $r \in [\![0,n]\!]$ et $a_r \neq 0$.

$f_n(P) = \lambda P$ donc $P'' - 4XP' = \lambda P$.

Le coefficient de X^r dans $P'' - 4XP'$ est $-4(r\,a_r)$ et le coefficient de X^r dans λP est $\lambda\, a_r$.

Alors $-4(r\,a_r) = \lambda\, a_r$. Or a_r n'est pas nul donc $\lambda = -4r = -4\deg P$.

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est un vecteur propre de } f_n \text{ associé à la valeur propre } \lambda : \lambda = -4\deg P\ .}$$

• Existence de H_n.

$-4n$ est une valeur propre de f_n. Soit P_n un vecteur propre de f_n associé à la valeur propre $-4n$.

D'après ce qui précède : $-4n = -4\deg P_n$. Alors $\deg P_n = n$. Notons a_n le coefficient de X^n dans P_n et posons $H_n = \dfrac{1}{a_n} P_n$.

Par construction H_n est un polynôme unitaire. De plus, le degré de H_n est celui de P_n donc est n.

Comme $H_n = \dfrac{1}{a_n} P_n$ et que P_n est un vecteur propre de f_n associé à la valeur propre $-4n$, il est de même pour H_n.

Finalement H_n est un polynôme unitaire de degré n tel que $f_n(H_n) = -4\,n\,H_n$.

• Unicité de H_n.

Supposons que Q_n soit encore un polynôme unitaire de degré n tel que $f_n(Q_n) = -4\,n\,Q_n$.

Alors Q_n et H_n sont deux éléments non nuls du sous-espace propre de f_n associé à la valeur propre $-4\,n$ qui est de dimension 1.

Ainsi il existe un réel α (non nul) tel que $Q_n = \alpha\,H_n$.

Le coefficient de X^n de Q_n est alors le même que le coefficient de X^n dans $\alpha\,H_n$.

Comme Q_n et H_n sont unitaires et de degré $n : 1 = \alpha$.

Ainsi $Q_n = H_n$. D'où l'unicité de H_n.

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme unitaire } H_n \text{ de degré } n \text{ tel que } f_n(H_n) = -4\,n\,H_n.}$$

Ou encore :

$$\boxed{\text{Il existe un unique polynôme unitaire } H_n \text{ de degré } n \text{ tel que } H_n'' - 4\,X\,H_n' = -4\,n\,H_n.}$$

2. Étude de la suite $(\mathbf{H_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*}$.

(a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $f_n(H_n) = -4\,n\,H_n$ donc $H_n'' - 4\,X\,H_n' = -4\,n\,H_n$.

En dérivant il vient $H_n''' - 4\,H_n' - 4\,X\,H_n'' = -4\,n\,H_n'$ ou $H_n''' - 4\,X\,H_n'' = -4\,(n-1)\,H_n'$.

Ainsi $(H_n')'' - 4\,X\,(H_n')' = -4\,(n-1)\,H_n'$. Comme H_n' appartient à $\mathbb{R}_n[X] : f_n(H_n') = -4\,(n-1)\,H_n'$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(H_n') = -4\,(n-1)\,H_n'.\ \text{Je préfère} : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (H_n')'' - 4\,X\,(H_n')' = -4\,(n-1)\,H_n'.}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

H_n est unitaire et de degré n. Alors H_n' est un polynôme de degré $n-1$ et le coefficient de X^{n-1} dans H_n' est n.

Posons $T_n = \dfrac{1}{n}\,H_n'$. Alors T_n est un polynôme unitaire de degré $n-1$.

Comme $f_n(H_n') = -4\,(n-1)\,H_n' : f_n(T_n) = -4\,(n-1)\,T_n'$ car $T_n = \dfrac{1}{n}\,H_n'$.

Ainsi T_n est un polynôme unitaire de degré $n-1$ tel que $T_n'' - 4\,X\,T_n' = -4\,(n-1)\,T_n$.

D'après **1. (d)** H_{n-1} est l'unique polynôme unitaire de degré $n-1$ tel que $H_{n-1}'' - 4\,X\,H_{n-1}' = -4\,(n-1)\,H_{n-1}$.

Ainsi $T_n = H_{n-1}$ donc $\dfrac{1}{n}\,H_n' = H_{n-1}$. $H_n' = n\,H_{n-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ H_n' = n\,H_{n-1}.}$$

Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

$H_n' = n\,H_{n-1}$ et $H_{n-1}' = (n-1)\,H_{n-2}$ donc $H_n'' = n\,H_{n-1}' = n\,(n-1)\,H_{n-2}$.

Alors $-4\,n\,H_n = H_n'' - 4\,X\,H_n' = n\,(n-1)\,H_{n-2} - 4\,X\,(n\,H_{n-1})$. $-4\,n\,H_n = n\,(n-1)\,H_{n-2} - 4\,X\,(n\,H_{n-1})$.

En divisant par $-4\,n$ qui n'est pas nul on obtient : $H_n = -\dfrac{n-1}{4}\,H_{n-2} + X\,H_{n-1}$.

Donc $H_n - X\,H_{n-1} + \dfrac{n-1}{4}\,H_{n-2} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } [\![2,+\infty[\![,\ H_n - X\,H_{n-1} + \frac{(n-1)}{4}\,H_{n-2} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.}}$$

(b) 1 est un polynôme unitaire de degré 0 qui vérifie $(1)'' - 4\,X\,(1)' = -(4 \times 0)\,1$ donc $1 = H_0$.

X est un polynôme unitaire de degré 1 qui vérifie $(X)'' - 4\,X\,(X)' = -(4 \times 1)\,1$ donc $X = H_1$.

$$\boxed{H_0 = 1 \text{ et } H_1 = X.}$$

$0_{\mathbb{R}_2[X]} = H_2 - X\,H_1 + \dfrac{2-1}{4}\,H_0 = H_2 - X^2 + \dfrac{1}{4}\cdot$ Alors $H_2 = X^2 - \dfrac{1}{4}\cdot$

$0_{\mathbb{R}_3[X]} = H_3 - X\,H_2 + \dfrac{3-1}{4}\,H_1 = H_3 - X\left(X^2 - \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\,X = H_3 - X^3 + \dfrac{3}{4}\,X.$ Alors $H_3 = X^3 - \dfrac{3}{4}\,X.$

$$\boxed{H_2 = X^2 - \frac{1}{4} \text{ et } H_3 = X^3 - \frac{3}{4}\,X.}$$

(c) Rappelons que $u_0 = 1,\ u_1 = 1$; et $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ u_n = u_{n-1} - \dfrac{(n-1)\,u_{n-2}}{4}\cdot$

```

program Ecricome2010_Ex2;

var n:integer;u,v,w:real;

begin

u:=1;v:=1;

for n:=2 to 2010 do
   begin
   w:=v-(n-1)*u/4;
   u:=v; v:=w;
   end;

writeln('u_2010 vaut : ',v);

end.


```

3. Application aux points critiques d'une fonction de trois variables.

(a) Montrons que V est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

$(x,y,z) \to x^2 + y^2 + z^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme fonction polynôme.

$(x,y,z) \to x - y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme fonction polynôme et ne s'annule pas sur U. Comme $t \to \ln|t|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, par composition $(x,y,z) \to \ln|x-y|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

De même $(x,y,z) \to \ln|y-z|$ et $(x,y,z) \to \ln|z-x|$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

V est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme combinaison linéaire de quatre fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

$\forall (x,y,z) \in U,\ \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) = 2x - \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{(-1)}{z-x} = 2x - \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x-z} = \dfrac{2x(x-y)(x-z) - (x-z) - (x-y)}{(x-y)(x-z)}\cdot$

$\forall (x,y,z) \in U,\ \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{2x(x-y)(x-z) - (2x-y-z)}{(x-y)(x-z)}$.

De même : $\forall (x,y,z) \in U,\ \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{2y(y-x)(y-z) - (2y-x-z)}{(y-x)(y-z)}$.

On a encore : $\forall (x,y,z) \in U,\ \dfrac{\partial V}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{2z(z-x)(z-y) - (2z-x-y)}{(z-x)(z-y)}$.

Soit (α,β,γ) un élément de U.

$\nabla V(\alpha,\beta,\gamma) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \dfrac{\partial V}{\partial x}(\alpha,\beta,\gamma) = \dfrac{\partial V}{\partial y}(\alpha,\beta,\gamma) = \dfrac{\partial V}{\partial z}(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$

$$\nabla V(\alpha,\beta,\gamma) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} \dfrac{2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) - (2\alpha-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = 0 \\ \dfrac{2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) - (2\beta-\alpha-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} = 0 \\ \dfrac{2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) - (2\gamma-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) - (2\alpha-\beta-\gamma) = 0 \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) - (2\beta-\alpha-\gamma) = 0 \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) - (2\gamma-\alpha-\beta) = 0 \end{cases}.$$

$$\nabla V(\alpha,\beta,\gamma) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 2\alpha-\beta-\gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta-\alpha-\gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma-\alpha-\beta \end{cases}.$$

Un point (α,β,γ) de U est un point critique de V si et seulement si : $\begin{cases} 2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma) = 2\alpha-\beta-\gamma \\ 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta-\alpha-\gamma \\ 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma-\alpha-\beta \end{cases}$ $(\mathcal{S})$.

(b) $Q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ donc $Q' = (X-\beta)(X-\gamma) + (X-\alpha)(X-\gamma) + (X-\alpha)(X-\beta)$.

$Q'' = (X-\gamma) + (X-\beta) + (X-\gamma) + (X-\alpha) + (X-\beta) + (X-\alpha) = 2\big(3X - (\alpha+\beta+\gamma)\big)$.

Soit (α,β,γ) un élément de U.

Notons que : $Q''(\alpha) - 4\,\alpha\,Q'(\alpha) = 2\big(3\,\alpha - (\alpha+\beta+\gamma)\big) - 4\,\alpha\,\big((\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)+0+0\big) = 2\,\big((2\,\alpha-\beta-\gamma) - 2\alpha\,(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\big)$.

Alors $Q''(\alpha) - 4\,\alpha\,Q'(\alpha) = 0 \iff 2\,\big((2\,\alpha-\beta-\gamma) - 2\alpha\,(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)\big) = 0 \iff 2\,\alpha-\beta-\gamma = 2\alpha\,(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma)$.

Finalement : $Q''(\alpha) - 4\,\alpha\,Q'(\alpha) = 0 \iff 2\alpha\,(\alpha-\beta)\,(\alpha-\gamma) = 2\,\alpha-\beta-\gamma$.

De même $Q''(\beta) - 4\,\beta\,Q'(\beta) = 0 \iff 2\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma) = 2\beta-\alpha-\gamma$.

On a encore $Q''(\gamma) - 4\,\gamma\,Q'(\gamma) = 0 \iff 2\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 2\gamma-\alpha-\beta$.

(α,β,γ) est un élément de U et $Q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. (α,β,γ) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $Q'' - 4\,X\,Q'$ admet pour racines α, β, γ.

(c) Soit (α,β,γ) un point critique de V. (α,β,γ) est un élément de U. Alors α, β, γ sont distincts deux à deux.

Posons $Q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. α, β, γ sont alors trois racines distinctes de $Q'' - 4XQ'$.

Ainsi Q divise $Q'' - 4XQ'$. Il existe un élément T de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q'' - 4XQ' = T\,Q$.

Q est de degré 3 donc Q' est de degré 2 et Q'' est de degré 1. Ainsi $Q'' - 4XQ'$ est de degré 3.

Alors nécessairement T est un polynôme constant.

Finalement il existe un réel c tel que $Q'' - 4XQ' = c\,Q$.

Le coefficient de X^3 dans Q est c et c'est -4×3 dans $Q'' - 4XQ'$. Ainsi $c = -12$ donc $Q'' - 4XQ' = -12\,Q$.

$$\boxed{Q'' - 4XQ' = -12\,Q.}$$

Q est donc un polynôme unitaire de degré 3 qui vérifie $Q'' - 4XQ' = -4\,(3)\,Q$ donc d'après **1. (d)**, $Q = H_3$.

$$\boxed{\text{Si } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ est un point critique de } V \text{ et si } Q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) \text{ alors } Q = H_3.}$$

En bref :

$$\boxed{\text{Si } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ est un point critique de } V : H_3 = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma).}$$

• Soit (α, β, γ) un point critique de V. Alors $H_3 = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ donc α, β, γ sont trois racines distinctes (car (α, β, γ) est dans U) de H_3.

Or $H_3 = X^3 - \dfrac{3}{4}\,X$ donc H_3 a exactement trois racines 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi (α, β, γ) appartient à l'ensemble

$\mathcal{H} = \left\{ \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \right\}$.

• Réciproquement soit (α, β, γ) un élément de l'ensemble $\mathcal{H}$.

α, β, γ sont deux à deux distincts dons (α, β, γ) est un élément de U.

Posons $Q = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. $Q = H_3$! !

Alors $Q'' - 4\,X\,Q' = -12Q = -12\,(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. Donc α, β, γ sont des racines de $Q'' - 4\,X\,Q'$. Alors (α, β, γ) est solution de $(\mathcal{S})$ et ainsi (α, β, γ) est un point critique de V.

$$\boxed{\text{Les points critiques de } V \text{ sont } \left(0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(0, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \text{ et } \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).}$$

PROBLÈME

PARTIE I : Résultats préliminaires.

1. Étude d'une suite

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n.$

```
Program ECRICOME2010_Pb;

var n,i:integer;s:real;

begin

write('Donner la valeur de n. n=');readln(n);

s:=1; for i:=2 to n do s:=s+1/i; writeln('u_',n,'=',s-ln(n));

end.
```

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} + \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$

$\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2\,n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

$\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$ donc $\dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Ainsi $u_n - u_{n+1} = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2\,n^2} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{2\,n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Par conséquent :

$$\boxed{u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,n^2}.}$$

$u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n^2}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{2\,n^2}$ converge et est à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ converge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n - u_{n+1} \text{ converge.}}$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1})$. D'après qui précède la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ u_n = u_1 - (u_1 - u_n) = u_1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = u_1 - S_{n-1}$. Comme la suite de terme général S_n converge, la suite de terme général $u_1 - S_{n-1}$ converge également. Finalement :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$$

(c) La série de terme général $\dfrac{1}{i^2}$ converge car $2 > 1$. Alors la suite de terme général $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ est convergente.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$$

2. Loi de Gumbel.

(a) F_Z est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité si et seulement si :

- F_Z est croissante ;
- $\lim\limits_{t\to-\infty} F_Z(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} F_Z(t) = 1$;
- F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

Rappelons que $x \to e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Alors $t \to e^{-t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $t \to -e^{-t}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $t \to e^{-e^{-t}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. F_Z est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{t\to-\infty} (-e^{-t}) = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to-\infty} F_Z(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} e^{-e^{-t}} = 0$. $\lim\limits_{t\to+\infty} (-e^{-t}) = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} F_Z(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-e^{-t}} = 1$.

Rappelons que $x \to e^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Alors $t \to e^{-t}$ est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc $t \to e^{-e^{-t}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En particulier F_Z est continue sur $\mathbb{R}$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{F_Z \text{ est bien (sic) la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.}}$$

Notons que F'_Z est une densité de Z et que $\forall t \in \mathbb{R},\ F'_Z(t) = e^{-t}\, e^{-e^{-t}}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_Z \text{ définie par} : \forall t \in \mathbb{R},\ f_Z(t) = e^{-t}\, e^{-e^{-t}} \text{ est une densité de } Z.}$$

(b) Notons F_W la fonction de répartition de W.

W prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$ donc $\forall x \in]-\infty, 0],\ F_W(x) = 0$.

Soit x un élément de $]0, +\infty[$.

$F_W(x) = P(W \leqslant x) = P(e^{-Z} \leqslant x) = P(-Z \leqslant \ln x) = P(Z \geqslant -\ln x) = 1 - P(Z < -\ln x) = 1 - P(Z \leqslant -\ln x)$.

$F_W(x) = 1 - F_Z(-\ln x) = 1 - e^{-e^{-(-\ln x)}} = 1 - e^{-e^{\ln x}} = 1 - e^{-x}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Plus de doute :

$$\boxed{W = e^{-Z} \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}}$$

(c) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Posons : $\forall x \in]0, +\infty[,\ h_k(x) = |(-\ln x)^k\, e^{-x}|$.

Notons que : $\forall x \in]0, +\infty[,\ h_k(x) = |\ln x|^k\, e^{-x}$.

h_k est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2\, h_k(x)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{|\ln x|^k}{x}\, \dfrac{x^3}{e^x} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left| \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{k}}} \right|^k \dfrac{x^3}{e^x} \right) = 0 \times 0 = 0$ par croissance comparée. Alors :

- $h_k(x) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.
- h_k et $x \to \dfrac{1}{x^2}$ sont positives sur $[1, +\infty[$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.

Les critères de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x}\, h_k(x)\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\sqrt{x}\, |\ln x|^k\, e^{-x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(|x^{\frac{1}{2k}}\ \ln x|^k\, e^{-x} \right) = 0 \times 1 = 0$ par croissance comparée.

- $h_k(x) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ au voisinage de 0.
- h_k et $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sont positives sur $]0, 1]$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ converge.

Les critères de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^1 h_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge et ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} (-\ln x)^k\, e^{-x}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} (-\ln x)^k\, e^{-x}\,\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente.}}$$

(d) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Rappelons que $\forall t \in \mathbb{R},\ f_Z(t) = e^{-t}\, e^{-e^{-t}}$.

Notons que Z possède un moment d'ordre k dès que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\, f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et pas plus...).

$t \to t^k\, f_Z(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit A un réel. La fonction $t \to e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Cela justifie le changement de variable $u = e^{-t}$ dans ce qui suit.

$$\int_0^A t^k\, f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A t^k\, e^{-e^{-t}}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{e^{-A}} (-\ln u)^k\, e^{-u}(-1)\,\mathrm{d}u = \int_{e^{-A}}^1 (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Donc $\displaystyle\int_0^A t^k\, f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_{e^{-A}}^1 (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_A^0 t^k\, f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{e^{-A}} (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u$.

- $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-A} = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u$ converge ; alors la première égalité donne :

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A t^k\, f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u$. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^1 (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u$.

- $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} e^{-A} = +\infty$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u$ converge ; alors la seconde égalité donne :

$\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 t^k\, f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u$. Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t^k\, f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_1^{+\infty} (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u$.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\, f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_1^{+\infty} (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u + \int_0^1 (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u$ ou $\displaystyle\int_0^{+\infty} (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ Z \text{ possède un moment d'ordre } k \text{ qui vaut } \int_0^{+\infty} (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u.}$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ Z^k \text{ possède une espérance qui vaut } \int_0^{+\infty} (-\ln u)^k\, e^{-u}\,\mathrm{d}u.}$$

PARTIE II : Étude de la variable X_r.

1. Étude du cas r = 3.

(a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. L'événement $\{Y_2 > n\}$ se réalise si et seulement si les n premières pioches n'ont pas amené 2 boules portant des numéros distincts. Autrement dit l'événement $\{Y_2 > n\}$ se réalise si et seulement si les n premières pioches fournissent des boules portant toutes le même numéro. Ainsi :

$$\boxed{\text{les événements } \{Y_2 > n\} \text{ et } C_n \text{ sont égaux.}}$$

Dans la suite, si i est dans $\mathbb{N}^*$ et si j est dans $[\![1, r]\!]$, nous noterons B_i^j l'événement la $i^{\text{ème}}$ pioche donne la boule portant le numéro j.

$P(C_n) = P\Big((B_1^1 \cap B_2^1 \cap \cdots \cap B_n^1) \cup (B_1^2 \cap B_2^2 \cap \cdots \cap B_n^2) \cup (B_1^3 \cap B_2^3 \cap \cdots \cap B_n^3)\Big)$. Par incompatibilité on obtient :

$P(C_n) = P(B_1^1 \cap B_2^1 \cap \cdots \cap B_n^1) + P(B_1^2 \cap B_2^2 \cap \cdots \cap B_n^2) + P(B_1^3 \cap B_2^3 \cap \cdots \cap B_n^3)$. Par indépendance il vient :

$$P(C_n) = P(B_1^1)\, P(B_2^1) \cdots P(B_n^1) + P(B_1^2)\, P(B_2^2) \cdots P(B_n^2) + P(B_1^3)\, P(B_2^3) \cdots P(B_n^3) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ P(Y_2 > n) = P(C_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.}$$

Disons pour simplifier que $Y_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$...

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ P(Y_2=n)=P(Y_2>n-1)-P(Y_2>n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ P(Y_2=n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}.}$$

Remarque $Y_2-1=Y_2-Y_1$ *suit la loi géométrique de paramètre* $\dfrac{2}{3}$ *ce qui n'est pas franchement une surprise.*

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\big(\{Y_2=k\}\big)_{k\in[\![2,+\infty[\![}$ est un système quasi-complet d'événements. Ainsi :

$P(Y_2-Y_2=n)=\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(\{Y_3-Y_2=n\}\cap\{Y_2=k\})=\sum_{k=2}^{+\infty} P(\{Y_3-k=n\}\cap\{Y_2=k\}).$

$P(Y_2-Y_2=n)=\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(\{Y_3=n+k\}\cap\{Y_2=k\}).$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ P(Y_2-Y_2=n)=\sum_{k=2}^{+\infty} P(\{Y_3=n+k\}\cap\{Y_2=k\}).}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et k un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Rappelons que $P(Y_2=k)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-2}$. En particulier cette probabilité n'est pas nulle.

Ainsi $P(\{Y_3=n+k\}\cap\{Y_2=k\})=P(Y_2=k)\,P_{\{Y_2=k\}}(Y_3=n+k)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-2} P_{\{Y_2=k\}}(Y_3=n+k).$

Supposons que l'événement $\{Y_2=k\}$ soit réalisé. L'événement $\{Y_3=n+k\}$ se réalise si et seulement si les pioches $k+1,\ k+2,\ k+n-1$ (à un abus près : $n=1$...) donnent une des deux boules déjà obtenues et la pioche $n+k$ donne la boule qui n'a pas encore été tirée.

Ainsi $P_{\{Y_2=k\}}(Y_3=n+k)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{3}\right).$

Alors $P(\{Y_3=n+k\}\cap\{Y_2=k\})=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-2} P_{\{Y_2=k\}}(Y_3=n+k)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3^{k-1}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}.$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ P(\{Y_3=n+k\}\cap\{Y_2=k\})=\frac{1}{3^{k-1}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}.}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$P(Y_2-Y_2=n)=\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(\{Y_3=n+k\}\cap\{Y_2=k\})=\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^{k-1}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.$

$P(Y_2-Y_2=n)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{i}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_2-Y_2=n)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$. Ainsi :

$$\boxed{Y_3-Y_2 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{2}{3}.}$$

2. Loi de $\mathbf{Y_{i+1}-Y_i}$, pour $\mathbf{i\in\{0,1,2,\dots,i-1\}}$.

Dans toute cette question nous supposerons que i est un élément de $[\![1, r-1]\!]$.

(a) $Y_1(\Omega) = \{1\}$. Supposons que $i \in [\![2, r-1]\!]$

Il est clair que pour obtenir i boules distinctes il est nécessaire de faire au moins i pioches.

Réciproquement supposons que k soit dans $[\![i, +\infty[\![$. Si les $k-i$ premières pioches donnent 1 et que les i suivantes donnent dans l'ordre 1, 2,..., i alors l'événement $\{Y_i = k\}$ se réalise.

Nous pouvons alors sans doute dire que $Y_i(\Omega) = [\![i, +\infty[\![$...

$$\boxed{Y_1(\Omega) = \{1\} \text{ et si } i \in [\![2, r-1]\!],\ Y_i(\Omega) = [\![i, +\infty[\![.}$$

$Y_{i+1} - Y_i$ représente le nombre de pioches nécessaires pour obtenir $i+1$ boules distinctes sachant que l'on a déjà obtenu i boules distinctes. On a probablement $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N}^*$!

$$\boxed{(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

(b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit k un élément de $[\![i, +\infty[\![$ tel que $P(Y_i = k) \neq 0$.

Supposons que l'événement $\{Y_i = k\}$ soit réalisé. L'événement $\{Y_{i+1} - Y_i = n\}$ se réalise si et seulement si les pioches $k+1$, $k+2$, $k+n-1$ (à un abus près : $n = 1$...) donnent une des i boules déjà obtenues et la pioche $n+k$ donne la boule qui n'a pas encore été tirée.

Ainsi $P_{\{Y_i = k\}}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\dfrac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \dfrac{i}{r}\right)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![i, +\infty[\![,\ P(Y_i = k) \neq 0 \Rightarrow P_{\{Y_i = k\}}(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right).}$$

(c) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\big(\{Y_i = k\}\big)_{k \in [\![i, +\infty[\![}$ est un système quasi-complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$$P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \sum_{k=i}^{+\infty} P\big(\{Y_{i+1} - Y_i = n\} \cap \{Y_i = k\}\big).$$

Soit k dans $[\![i, +\infty[\![$.

Si $P(Y_i = k) \neq 0$: $P\big(\{Y_{i+1} - Y_i = n\} \cap \{Y_i = k\}\big) = P(Y_i = k)\, P_{\{Y_i = k\}}(Y_{i+1} - Y_i = n) = P(Y_i = k) \times \left(\dfrac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \dfrac{i}{r}\right)$.

Donc si $P(Y_i = k) \neq 0$: $P\big(\{Y_{i+1} - Y_i = n\} \cap \{Y_i = k\}\big) = P(Y_i = k) \times \left(\dfrac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \dfrac{i}{r}\right)$.

Supposons $P(Y_i = k) = 0$. $0 \leqslant P\big(\{Y_{i+1} - Y_i = n\} \cap \{Y_i = k\}\big) \leqslant P(Y_i = k) = 0$ car $\{Y_{i+1} - Y_i = n\} \cap \{Y_i = k\}$ est contenu dans $\{Y_i = k\}$.

Donc $P\big(\{Y_{i+1} - Y_i = n\} \cap \{Y_i = k\}\big) = P(Y_i = k) = 0$.

On a donc encore $P\big(\{Y_{i+1} - Y_i = n\} \cap \{Y_i = k\}\big) = P(Y_i = k) \times \left(\dfrac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \dfrac{i}{r}\right)$.

Alors $P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} P\big(\{Y_{i+1} - Y_i = n\} \cap \{Y_i = k\}\big) = \sum_{k=i}^{+\infty} \left(P(Y_i = k) \times \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right)\right)$.

$P(Y_{i+1} - Y_i = n) = \left(\dfrac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \dfrac{i}{r}\right) \displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} P(Y_i = k) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right)$ car $\displaystyle\sum_{k=i}^{+\infty} P(Y_i = k) = 1$.

$$P(Y_{i+1}-Y_i=n)=\left(\frac{i}{r}\right)^{n-1}\left(1-\frac{i}{r}\right).$$

$$\boxed{Y_{i+1}-Y_i \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 1-\frac{i}{r}\cdot}$$

Alors $E(Y_{i+1}-Y_i)=\dfrac{1}{1-\frac{i}{r}}=\dfrac{r}{r-i}\cdot$

Le cours donne également : $V(Y_{i+1}-Y_i)=\dfrac{\frac{i}{r}}{\left(1-\frac{i}{r}\right)^2}=\dfrac{r\,i}{(r-i)^2}\cdot$

$$\boxed{E(Y_{i+1}-Y_i)=\frac{r}{r-i} \text{ et } V(Y_{i+1}-Y_i)=\frac{r\,i}{(r-i)^2}\cdot}$$

3. Espérance et variance de $\mathbf{X_r}$.

(a) $1+\displaystyle\sum_{i=1}^{r-1}(Y_{r-i+1}-Y_{r-i})=Y_1+\sum_{i=1}^{r-1}Y_{r-i+1}-\sum_{i=1}^{r-1}Y_{r-i}=Y_1+\sum_{i=2}^{r}Y_i-\sum_{i=1}^{r-1}Y_i=Y_1+Y_r-Y_1=Y_r=X_r.$

$$\boxed{X_r=1+\sum_{i=1}^{r-1}(Y_{r-i+1}-Y_{r-i}).}$$

D'après **2. (c)**, pour tout i dans $[\![1,r-1]\!]$, $Y_{r-i+1}-Y_{r-i}$ possède une espérance qui vaut $\dfrac{r}{i}$ et une variance qui vaut $\dfrac{r\,(r-i)}{i^2}\cdot$

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{r-1}(Y_{r-i+1}-Y_{r-i})$ possède une espérance et une variance. Donc X_r possède une espérance et une variance.

Par linéraité de l'espérance : $E(X_r)=1+\displaystyle\sum_{i=1}^{r-1}E(Y_{r-i+1}-Y_{r-i+1})=1+\sum_{i=1}^{r-1}\frac{r}{i}=\sum_{i=1}^{r}\frac{r}{i}=r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i}\cdot$

$$V(X_r)=V\left(1+\sum_{i=1}^{r-1}(Y_{r-i+1}-Y_{r-i})\right)=V\left(\sum_{i=1}^{r-1}(Y_{r-i+1}-Y_{r-i})\right).$$

Or les variables Y_2-Y_1, Y_3-Y_2, ..., Y_r-Y_{r-1} sont indépendantes et possèdent une variance donc :

$$V(X_r)=\sum_{i=1}^{r-1}V(Y_{r-i+1}-Y_{r-i})=\sum_{i=1}^{r-1}\frac{r\,(r-i)}{i^2}=\sum_{i=1}^{r}\frac{r\,(r-i)}{i^2}=r^2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2}-r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i}\cdot$$

$$\boxed{\boxed{E(X_r)=r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i}} \text{ et } \boxed{V(X_r)=r^2\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2}-r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i}\cdot}}$$

(b) Notons α la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

$$E(X_r)=r\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i}=r\,(u_r+\ln r)=r\,u_r+r\,\ln r=r\,\ln r+\alpha\,r+r\,(u_r-\alpha).$$

Comme $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}(u_r-\alpha)=0$: $E(X_r)=r\,\ln r+\alpha\,r+\mathrm{o}(r)$ au voisinage de $+\infty$.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \alpha \text{ tel que : } E(X_r)=r\,\ln r+\alpha\,r+\mathrm{o}(r) \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

La suite de terme général $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2}$ converge d'après **I 1. (c)**. Notons β sa limite. Notons que β est un réel strictement positif (comme limite d'une suite strictement croissante de réels positifs).

$$\frac{V(Y_r)}{r^2}=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2}-\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2}-\frac{u_r+\ln r}{r}=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2}-\frac{1}{r}\,u_r-\frac{\ln r}{r}\cdot$$

$$\lim_{r\to+\infty}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{i^2}=\beta,\ \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\,u_r=0\times\alpha=0,\ \lim_{r\to+\infty}\frac{\ln r}{r}=0.$$

Alors $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{V(X_r)}{r^2}=\beta$.

Comme $\beta\neq 0$: $\displaystyle\frac{V(X_r)}{r^2}\underset{r\to+\infty}{\sim}\beta$. Donc $V(X_r)\underset{r\to+\infty}{\sim}\beta\,r^2$.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \beta \text{ tel que : } V(X_r)\underset{r\to+\infty}{\sim}\beta\,r^2.}$$

PARTIE III : Loi de X_r et de sa déviation asymptotique par rapport à sa moyenne.

1. Loi de X_r.

(a) Soit m un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit k un élément de $[\![1,r]\!]$.

$P(A_{k,m})=P(\overline{B_1^k}\cap\overline{B_2^k}\cap\cdots\cap\overline{B_m^k})$. Par indépendance il vient : $P(A_{k,m})=P(\overline{B_1^k})\,P(\overline{B_2^k})\cdots P(\overline{B_m^k})$.

Or $\forall i\in\mathbb{N}^*, P(\overline{B_1^k})=1-P(B_1^k)=1-\dfrac{1}{r}=\dfrac{r-1}{r}\cdot$ Donc $P(A_{k,m})=\left(\dfrac{r-1}{r}\right)^m$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } m \text{ de } \mathbb{N}^*, \text{ pour tout élément } k \text{ de } [\![1,r]\!],\ P(A_{k,m})=\left(\frac{r-1}{r}\right)^m.}$$

Clairement (? !) il s'agit de donner la probabilité de l'événement, "k numéros DONNÉS n'ont pas été piochés au cours des m premières pioches".

Soient i_1, i_2, ..., i_k k éléments distincts de $[\![1,r]\!]$.

La probabilité pour qu'une pioche ne donne aucun de ces k numéros est $1-\dfrac{k}{r}$.

Comme les pioches sont indépendantes, la probabilité pour que ces k numéros n'aient pas été obtenus au cours des m premières pioches est $\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^m$.

La probabilité de l'événement, "k numéros DONNÉS n'ont pas été piochés au cours des m premières pioches" est : $\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^m$.

(b) Soit m un élément de $\mathbb{N}^*$. L'événement $\{X_r>m\}$ se réalise si et seulement si au moins un des r numéros n'est pas obtenu au cours des m premières pioches.

Ainsi l'événement $\{X_r>m\}$ se réalise si et seulement si au moins un des r événement $A_{1,m}$, $A_{2,m}$, ..., $A_{r,m}$ se réalise. Ainsi :

$$\boxed{\{X_r>m\}=A_{1,m}\cup A_{2,m}\cup\cdots\cup A_{r,m} \text{ et ceci pour tout } m \text{ dans } \mathbb{N}^*.}$$

La formule du crible donne :

$$P(X_r>m)=P(A_{1,m}\cup A_{2,m}\cup\cdots\cup A_{r,m})=\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant r}P(A_{i_1,m}\cap A_{i_2,m}\cap\cdots\cap A_{i_k,m}).$$

Si i_1, i_2, ..., i_k sont des entiers tels que : $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant r$, $A_{i_1,m} \cap A_{i_2,m} \cap \cdots \cap A_{i_k,m}$ est l'événement "les k numéros i_1, i_2, ..., i_k n'ont pas été tirés au cours des m premières pioches et a donc pour probabilités $\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^m$.

Donc :

$$P(X_r > m) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant r} \left(1-\frac{k}{r}\right)^m.$$

Si k est un élément de $[\![1, r]\!]$, il existe $\dbinom{r}{k}$ k-uplets $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ d'entiers tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant r$.

Alors $P(X_r > m) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1-\frac{k}{r}\right)^m$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } m \text{ de } \mathbb{N}^*,\ P(X_r > m) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1-\frac{k}{r}\right)^m.}$$

Soit m un élément de $[\![r, +\infty[\![$. Notons que $m-1$ appartient à $\mathbb{N}^*$.

$$P(X_r = m) = P(X_r > m-1) - P(X_r > m) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1-\frac{k}{r}\right)^{m-1} - \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1-\frac{k}{r}\right)^m.$$

$$P(X_r = m) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1-\frac{k}{r}\right)^{m-1} \left(1-\left(1-\frac{k}{r}\right)\right) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \frac{k}{r} \left(1-\frac{k}{r}\right)^{m-1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } m \text{ de } [\![r, +\infty[\![,\ P(X_r = m) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \frac{k}{r} \left(1-\frac{k}{r}\right)^{m-1}.}$$

2. Comportement de X_r au delà de sa moyenne.

(a) • La propriété est de toute évidence vraie pour $m = 1$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément m de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $m+1$.

Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_{m+1})$ une famille dévénements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \cup A_{m+1}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) + P(A_{m+1}) - P\big((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \cap A_{m+1}\big)$.

Or $P\big((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \cap A_{m+1}\big)$ est un réel positif donc $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \cup A_{m+1}) \leqslant P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) + P(A_{m+1})$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence il vient : $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \cup A_{m+1}) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m) + P(A_{m+1})$ ce qui achève la récurrence.

Pour tout élément m de $\mathbb{N}^*$ et pour toute famille $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ d'événements on a :

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m).}$$

(b) La fonction exp est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp''(x) = \exp(x) > 0$.

La fonction exponentielle est donc convexe sur $\mathbb{R}$. Sa courbe repésentative est au dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0.

La tangente à la courbe représentative de la fonction exp au point d'abscisse 0 a pour équation

$y = \exp'(0)\,(x-0) + \exp(0)$ ou $y = x+1$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ x+1 \leqslant \exp(x) = e^x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x.}$$

Soit m un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit k un élément de $[\![1,r]\!]$. $P(A_{k,m}) = \left(1 - \dfrac{1}{r}\right)^m$.

D'après ce qui précède : $1 - \dfrac{1}{r} \leqslant e^{-\frac{1}{r}}$. Mieux : $0 \leqslant 1 - \dfrac{1}{r} \leqslant e^{-\frac{1}{r}}$.

Alors $P(A_{k,m}) = \left(1 - \dfrac{1}{r}\right)^m \leqslant \left(e^{-\frac{1}{r}}\right)^m = e^{-\frac{m}{r}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } m \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ et pour tout élément } k \text{ de } [\![1,r]\!],\ P(A_{k,m}) \leqslant e^{-\frac{m}{r}}.}$$

(c) Soit ω un élément de Ω.

• Supposons que $X_r(\omega) > M_r$. Alors $X_r(\omega) \geqslant M_r + 1$ car $X_r(\omega)$ est un entier.

Donc $X_r(\omega) > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r$ car $(1+\varepsilon)\, r\, \ln r < M_r + 1$.

• Réciproquement supposons que $X_r(\omega) > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r$. Alors $X_r(\omega) > M_r$ car $M_r \leqslant (1+\varepsilon)\, r\, \ln r$.

Finalement $X_r(\omega) > M_r$ si et seulement si $X_r(\omega) > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r$. Ce qui permet de dire que :

$$\boxed{\text{les événements } \{X_r > M_r\} \text{ et } \{X_r > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r\} \text{ sont égaux.}}$$

Observons que $(1+\varepsilon)\, r\, \ln r \geqslant 1 \times 2 \times \ln 2 = \ln 4 \geqslant \ln e = 1$. Donc M_r qui est la partie entière de $(1+\varepsilon)\, r\, \ln r$ est un élément de $\mathbb{N}^*$.

$P(X_r > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r) = P(X_r > M_r) = P(A_{1,M_r} \cup A_{2,M_r} \cup \cdots \cup A_{r,M_r})$ d'après **III Q1. (b)**.

Alors $P(X_r > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r) \leqslant P(A_{1,M_r}) + P(A_{2,M_r}) + \cdots + P(A_{r,M_r}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} P(A_{k,M_r})$ d'après **III Q2. (a)**.

En appliquant **III 2. (b)** on obtient : $P(X_r > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{r} e^{-\frac{M_r}{r}} = r\, e^{-\frac{M_r}{r}}$.

$M_r > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r - 1$ donc $-\dfrac{M_r}{r} < -\dfrac{(1+\varepsilon)\, r\, \ln r - 1}{r} = -(1+\varepsilon)\, \ln r + \dfrac{1}{r}\cdot$

Alors : $P(X_r > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r) \leqslant r\, e^{-(1+\varepsilon)\, \ln r + \frac{1}{r}} = r\, r^{-(1+\varepsilon)}\, e^{\frac{1}{r}} = \dfrac{e^{\frac{1}{r}}}{r^{\varepsilon}} \leqslant \dfrac{e}{r^{\varepsilon}}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \varepsilon \text{ strictement positif, } P(X_r > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r) \leqslant \dfrac{e}{r^{\varepsilon}}\cdot}$$

Soit ε un réel strictement positif. $0 \leqslant P(X_r > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r) \leqslant \dfrac{e}{r^{\varepsilon}}$ et ceci pour tout élément r de $[\![2,+\infty[\![$.

En remarquant que $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{e}{r^{\varepsilon}} = 0$ il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} P(X_r > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \varepsilon \text{ strictement positif, } \lim_{r\to+\infty} P(X_r > (1+\varepsilon)\, r\, \ln r) = 0.}$$

3. Distribution de X_r autour de sa moyenne.

(a) $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} (r\, \ln r + r\, t) = \lim_{r\to+\infty} \big(r\, (\ln r + t)\big) = +\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} (r\, \ln r + r\, t - 1) = +\infty$.

Or $\forall r \in [\![2,+\infty[\![,\ r\, \ln r + r\, t - 1 < m_r$ donc $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} m_r = +\infty$.

Alors il existe un élément $r_0(t)$ de $[\![2,+\infty[\![$ tel que : $\forall r \in [\![r_0(t),+\infty[\![,\ m_r \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t, \text{ il existe un élément } r_0(t) \text{ de } [\![2,+\infty[\![\text{ tel que} : \forall r \in [\![r_0(t),+\infty[\![,\ m_r \geqslant 1.}$$

Soit r un élément de $\llbracket r_0(t), +\infty\llbracket$. $\{Z_r > t\} = \left\{\dfrac{X_r - r\,\ln r}{r} > t\right\} = \{X_r > r\,\ln r + r\,t\}$.

En remarquant que X_r ne prend que des valeurs entières on obtient :

$\{Z_r > t\} = \{X_r > r\,\ln r + r\,t\} = \{X_r \geqslant \text{Ent}\,(r\,\ln r + r\,t) + 1\} = \{X_r > \text{Ent}\,(r\,\ln r + r\,t)\} = \{X_r > m_r\}$.

$$\boxed{\forall r \in \llbracket r_0(t), +\infty\llbracket,\ P(Z_r > t) = P(X_r > m_r).}$$

(b) Nous supposerons que k est un élément de $\mathbb{N}$. Soit r_1 un élément strictement supérieur à 1 et k.

Posons $\forall r \in \llbracket 2, +\infty\llbracket,\ \gamma_r = r\,\ln r + r\,t - m_r$. Notons que $\forall r \in \llbracket 2, +\infty\llbracket,\ \gamma_r \in [0, 1[$.

Retenons que $\forall r \in \llbracket 2, +\infty\llbracket,\ m_r = r\,\ln r + r\,t - \gamma_r$ et que la suite $(\gamma_r)_{r\geqslant 2}$ est bornée.

$\ln\left(1 - \dfrac{k}{r}\right) = -\dfrac{k}{r} - \dfrac{k}{2\,r^2} + \text{o}\left(\dfrac{1}{r^2}\right)$ au voisinage de 0.

Donc il existe une suite $(\delta_r)_{r\geqslant r_1}$ qui converge vers 0 et telle que : $\forall r \in \llbracket r_1, +\infty\llbracket,\ \ln\left(1 - \dfrac{k}{r}\right) = -\dfrac{k}{r} - \dfrac{k}{2\,r^2} + \dfrac{\delta_r}{r^2}$.

Soit r un élément de $\llbracket r_1, +\infty\llbracket$.

$m_r\,\ln\left(1 - \dfrac{k}{r}\right) = \big(r\,\ln r + r\,t - \gamma_r\big)\left(-\dfrac{k}{r} - \dfrac{k}{2\,r^2} + \dfrac{\delta_r}{r^2}\right) = \left(\ln r + t - \dfrac{\gamma_r}{r}\right)\left(-k - \dfrac{k}{2\,r} + \dfrac{\delta_r}{r}\right)$.

$m_r\,\ln\left(1 - \dfrac{k}{r}\right) = -k\,\ln r - k\,t + k\,\dfrac{\gamma_r}{r} + \left(\ln r + t - \dfrac{\gamma_r}{r}\right)\left(-\dfrac{k}{2\,r} + \dfrac{\delta_r}{r}\right)$.

$m_r\,\ln\left(1 - \dfrac{k}{r}\right) = -k\,\ln r - k\,t + k\,\dfrac{\gamma_r}{r} + \left(\dfrac{\ln r}{r} + \dfrac{t}{r} - \dfrac{\gamma_r}{r^2}\right)\left(-\dfrac{k}{2} + \delta_r\right)$.

$\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{\gamma_r}{r} = 0$ et $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{\gamma_r}{r^2} = 0$ car la suite $(\gamma_r)_{r\geqslant r_1}$ est bornée.

De plus $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \delta_r = 0$ et $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln r}{r} = 0$ par croissance comparée.

Alors $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\left(k\,\frac{\gamma_r}{r} + \left(\frac{\ln r}{r} + \frac{t}{r} - \frac{\gamma_r}{r^2}\right)\left(-\frac{k}{2} + \delta_r\right)\right) = k \times 0 + (0 + 0 - 0)\left(-\frac{k}{2} + 0\right) = 0$.

Ainsi $m_r\,\ln\left(1 - \dfrac{k}{r}\right) = -k\,\ln r - k\,t + \text{o}(1)$ au voisinage de $+\infty$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ m_r\,\ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) = -k\,\ln r - k\,t + \text{o}(1) \text{ au voisinage de } +\infty.}$$

(c) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrons que $\dbinom{r}{k} \underset{r\to+\infty}{\sim} \dfrac{r^k}{k!}$.

C'est clair pour $k = 0$ car $\dbinom{r}{0} = 1$ et $\dfrac{r^0}{0!} = 1$. Supposons que k n'est pas nul.

$$\binom{r}{k} = \frac{r\,(r-1)\,\dots\,(r-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(r-i) \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(r) = \frac{r^k}{k!}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ \binom{r}{k} \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}.}$$

Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$m_r\,\ln\left(1 - \dfrac{k}{r}\right) = -k\,\ln r - k\,t + \text{o}(1)$ au voisinage de $+\infty$. Donc :

$\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{m_r} = e^{m_r \ln\left(1-\frac{k}{r}\right)} = e^{-k \ln r - k\,t + \mathrm{o}(1)} = e^{-k \ln r}\, e^{-k\,t}\, e^{\mathrm{o}(1)} = \dfrac{e^{-k\,t}}{r^k}\, e^{\mathrm{o}(1)}$ au voisinage de $+\infty$.

Or $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ donc $\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{m_r} \underset{r\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-k\,t}}{r^k}$. Comme $\dbinom{r}{k} \underset{r\to+\infty}{\sim} \dfrac{r^k}{k!}$ il vient par produit :

$\dbinom{r}{k}\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{m_r} \underset{r\to+\infty}{\sim} \dfrac{r^k}{k!}\,\dfrac{e^{-kt}}{r^k} = \dfrac{e^{-kt}}{k!}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ \dbinom{r}{k}\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{m_r} \underset{r\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-kt}}{k!}.}$$

(d) $P(Z_r \leqslant t) = 1 - P(Z_r > t) = 1 - P(X_r > m_r) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{k-1}\dbinom{r}{k}\left(1-\dfrac{k}{r}\right)$.

$\lim\limits_{r\to+\infty} P(Z_r \leqslant t) = \lim\limits_{r\to+\infty}\left(1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{k-1}\dbinom{r}{k}\left(1-\dfrac{k}{r}\right)\right) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\dfrac{e^{-k\,t}}{k!} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-e^{-t})^k}{k!}$.

$\lim\limits_{r\to+\infty} P(Z_r \leqslant t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-e^{-t})^k}{k!} = e^{-e^{-t}} = F_Z(t)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } t,\ \lim_{r\to+\infty} P(Z_r \leqslant t) = F_Z(t).}$$

$$\boxed{\text{La suite } (Z_r)_{r\geqslant 2} \text{ converge en loi vers } Z.}$$
