

EXERCICE 1

1. (a) Pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, P_k est un polynôme de degré k donc (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille d'éléments de $E = \mathbb{R}_n[X]$. Mieux c'est une famille de polynômes non nuls de E de degrés échelonnés.

Ainsi (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille libre de E de cardinal $n + 1$ et E est de dimension $n + 1$. C'est donc une base de E .

La famille (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de E .

(b) • $P_1(X) = X$ donc $P'_1(X) = 1$. Alors $P'_1(X + 1) = 1 = P_0(X) = P_{1-1}(X)$.

• Soit k un élément de $\llbracket 2, n \rrbracket$. $P_k(X) = \frac{1}{k!} X (X - k)^{k-1}$ donc $P'_k(X) = \frac{1}{k!} (X - k)^{k-1} + \frac{1}{k!} X (k - 1)(X - k)^{k-2}$.

$$P'_k(X) = \frac{1}{k!} (X - k)^{k-2} (X - k + (k - 1)X) = \frac{1}{k!} (X - k)^{k-2} (kX - k) = \frac{k}{k!} (X - 1)(X - k)^{k-2}.$$

$$P'_k(X) = \frac{1}{(k-1)!} (X - 1)(X - k)^{k-2}.$$

Alors $P'_k(X + 1) = \frac{1}{(k-1)!} X (X + 1 - k)^{k-2} = \frac{1}{(k-1)!} X (X - (k-1))^{k-2} = P_{k-1}(X)$. Finalement :

pour tout entier k appartenant à $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $P'_k(X + 1) = P_{k-1}(X)$.

Soit k un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Montrons que $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X - j)$. C'est plus que ce que demande le texte mais c'est utile pour le (c) et pour Q3 b)...

La propriété est vraie pour $j = 0$ car $P_k^{(0)}(X) = P_k(X) = P_{k-0}(X - 0)$.

Supposons la propriété vraie pour un élément j de $\llbracket 0, k - 1 \rrbracket$ et montrons la pour $j + 1$.

L'hypothèse de récurrence donne $P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X - j)$. En dérivant on obtient : $P_k^{(j+1)}(X) = P'_{k-j}(X - j)$.

$$P_k^{(j+1)}(X) = P'_{k-j}(X - j) = P'_{k-j}(X - (j + 1) + 1) = P_{(k-j)-1}(X - (j + 1)) \text{ car } k - j \geq 1.$$

Ainsi $P_k^{(j+1)}(X) = P_{k-(j+1)}(X - (j + 1))$. La propriété est donc vraie pour $j + 1$ ce qui achève la récurrence.

Pour tous les entiers k et j vérifiant $0 \leq j \leq k \leq n$ on a : $P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X - j)$.

Remarque Soit k un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$. $\deg P_k = k$ donc $\forall j \in \llbracket k + 1, +\infty \rrbracket$, $P_k^{(j)} = 0_E$.

(c) Soit P un élément de E . (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base de E donc il existe un unique $(n + 1)$ -uplet (a_0, a_1, \dots, a_n)

de réels tel que $P = \sum_{k=0}^n a_k P_k$.

Soit j un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$. $P = \sum_{k=0}^n a_k P_k$ donc $P^{(j)} = \sum_{k=0}^n a_k P_k^{(j)} = \sum_{k=j}^n a_k P_k^{(j)}$ (d'après la remarque).

Le dernier résultat du (b) donne alors $P^{(j)}(X) = \sum_{k=j}^n a_k P_{k-j}(X - j)$.

- Supposons que $j < n$. $P^{(j)}(X) = a_j P_0(X - j) + \sum_{k=j+1}^n a_k P_{k-j}(X - j)$.

$$\text{Ainsi } P^{(j)}(j) = a_j P_0(j - j) + \sum_{k=j+1}^n a_k P_{k-j}(j - j) = a_j P_0(0) + \sum_{k=j+1}^n a_k P_{k-j}(0) = a_j + \sum_{k=j+1}^n a_k P_{k-j}(0).$$

Or P_1, P_2, \dots, P_n admettent 0 pour racine. Donc pour tout k dans $\llbracket j+1, n \rrbracket$, $P_{k-j}(0) = 0$. Alors $P^{(j)}(j) = a_j$.

- Supposons maintenant que $j = n$. $P^{(n)}(X) = a_n P_0(X - n) = a_n \times 1 = a_n$ donc $P^{(n)}(n) = a_n$.

Soit P un élément de E . Il existe un $(n+1)$ -uplet de réels (a_0, a_1, \dots, a_n) tel que $P = \sum_{k=0}^n a_k P_k$.

$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P_j^{(j)} = a_j$ et $P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P_k$.

2. (a) • Soit P un élément de E . P' appartient encore à E . Donc $P'(X+1)$ appartient également à E . Ainsi $u(P)$ est un élément de E .

$\forall P \in E$, $u(P) \in E$. u est alors une application de E dans E .

- Soit λ un élément de \mathbb{R} . Soient P et Q deux éléments de E .

$$u(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)'(X+1) = (\lambda P' + Q')(X+1) = \lambda P'(X+1) + Q'(X+1) = \lambda u(P) + u(Q).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (P, Q) \in E^2$, $u(\lambda P + Q) = \lambda u(P) + u(Q)$. u est linéaire. Ceci achève de montrer que :

u est un endomorphisme de E .

(b) $U(P_0) = P_0'(X+1) = 0_E$ (car $P_0 = 1$) et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u(P_k) = P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$.

$$U(P_0) = 0_E \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(P_k) = P_{k-1}, \text{ donc } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A de l'endomorphisme u dans la base (P_0, P_1, \dots, P_n) est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Notons $(E_1, E_2, \dots, E_{n+1})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

Notons pour tout j dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $C_j(A)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

$$C_1(A) = 0_{\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})} \text{ et pour tout } j \text{ dans } \llbracket 2, n+1 \rrbracket, C_j(A) = E_{j-1}.$$

Alors $\text{rg } A = \dim \text{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_{n+1}(A)) = \dim \text{Vect}(E_1, E_2, \dots, E_n)$.

(E_1, E_2, \dots, E_n) est une famille libre de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ comme sous-famille de la base $(E_1, E_2, \dots, E_{n+1})$.

(E_1, E_2, \dots, E_n) est donc une base de $\text{Vect}(E_1, E_2, \dots, E_n)$. Alors $\text{rg } A = \dim \text{Vect}(E_1, E_2, \dots, E_n) = n$.

Le rang de A est n .

A est triangulaire supérieure donc le spectre de A est l'ensemble de ses coefficients diagonaux. Alors $\text{Sp } A = \{0\}$.

0 est la seule valeur propre de A .

(d) 0 est la seule valeur propre de A et $\dim \text{SEP}(A, 0) = n + 1 - \text{rg } A = n + 1 - n = 1$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est donc 1 ! Comme 1 est différent de $n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), A n'est pas diagonalisable.

A n'est pas diagonalisable.

3. (a) • $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} .

• Soit λ un réel. Soient P, Q et R trois éléments de E .

$$\langle \lambda P + Q, R \rangle = \sum_{k=0}^n (\lambda P + Q)^{(k)}(k) R^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^n (\lambda P^{(k)} + Q^{(k)})(k) R^{(k)}(k).$$

$$\langle \lambda P + Q, R \rangle = \sum_{k=0}^n (\lambda P^{(k)}(k) R^{(k)}(k) + Q^{(k)}(k) R^{(k)}(k)) = \lambda \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) R^{(k)}(k) + \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(k) R^{(k)}(k).$$

Donc $\langle \lambda P + Q, R \rangle = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q, R) \in E^3, \langle \lambda P + Q, R \rangle = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$.

• Soient P et Q deux éléments de E . $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k) = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}(k) P^{(k)}(k) = \langle Q, P \rangle$.

$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$.

• Soit P un élément de E . $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (P^{(k)}(k))^2 \geq 0$ donc $\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n (P^{(k)}(k))^2 \geq 0$.

$\forall P \in E, \langle P, P \rangle \geq 0$.

• Soit P un élément de E tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors $\sum_{k=0}^n (P^{(k)}(k))^2 = 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (P^{(k)}(k))^2 \geq 0$.

Par conséquent $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (P^{(k)}(k))^2 = 0$ donc $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P^{(k)}(k) = 0$.

$$\text{Alors } P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P_k = \sum_{k=0}^n 0 \cdot P_k = 0_E.$$

$\forall P \in E, \langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow P = 0_E$.

Les cinq points précédents montrent que :

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

(b) ► *Version 1*

Notons $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

Observons que si $P = \sum_{k=0}^n a_k P_k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k P_k$ sont deux éléments de E de matrices U et V dans la base

$$(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ de } E \text{ alors : } \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k = (U | V).$$

Rappelons que la base canonique $(E_1, E_2, \dots, E_{n+1})$ de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique $(\cdot | \cdot)$ de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

Soient i et j deux éléments de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Les matrices de P_i et P_j dans la base (P_0, P_1, \dots, P_n) sont E_{i+1} et E_{j+1} .

$$\text{Alors } \langle P_i, P_j \rangle = (E_{i+1} | E_{j+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\text{Finalement } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \langle P_i, P_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille orthonormée de E et une base de E . (P_0, P_1, \dots, P_n) est une base orthonormée de E .

► *Version 2*

Soient i et k deux éléments de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Calculons $P_i^{(k)}(k)$.

Si $k > i$, $P_i^{(k)} = 0_E$ donc $P_i^{(k)}(k) = 0$.

Supposons $k \leq i$. Alors $P_i^{(k)}(k) = P_{i-k}(k-k) = P_{i-k}(0)$. Donc $P_i^{(k)}(k) = 1$ si $i-k = 0$ et $P_i^{(k)}(k) = 0$ si $i-k > 0$.

Ainsi $P_i^{(k)}(k) = 1$ si $k = i$ et $P_i^{(k)}(k) = 0$ si $k < i$.

$$\text{Finalement } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_i^{(k)}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit i un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Soit j un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$ distinct de i .

• Soit k un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$, ou k est différent de i ou k est différent de j .

Donc $P_i^{(k)}(k) = 0$ ou $P_j^{(k)}(k) = 0$. Alors $P_i^{(k)}(k) P_j^{(k)}(k) = 0$.

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_i^{(k)}(k) P_j^{(k)}(k) = 0. \text{ Donc } \langle P_i, P_j \rangle = \sum_{k=0}^n P_i^{(k)}(k) P_j^{(k)}(k) = 0.$$

• $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_i^{(k)}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $\langle P_i, P_i \rangle = \sum_{k=0}^n (P_i^{(k)}(k))^2 = (P_i^{(i)}(i))^2 = 1$.

$$\text{Alors } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \langle P_i, P_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille orthonormée de E et une base de E .

$$\boxed{(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est une base orthonormée ou orthonormale de } E.}$$

Exercice Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est l'unique produit scalaire de E qui rend la base (P_0, P_1, \dots, P_n) orthonormée.

EXERCICE 2

1. ψ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme combinaison linéaire de trois fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* .

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \psi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t^2} (t^2 + 1 - t) = \frac{1}{t^2} \left(\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right) > 0.$$

ψ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

$$\psi(1) = 1 - \frac{1}{1} - \ln 1 = 1 - 1 - 0 = 0.$$

Comme ψ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , ψ est strictement négative sur $]0, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$.

$\forall t \in]0, 1[, \psi(t) < 0.$ $\psi(1) = 0.$ $\forall t \in]1, +\infty[, \psi(t) > 0.$

2. Soit p un élément de \mathbb{N}^* .

$$\sum_{n=1}^p \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^p \left(\frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} \right) = \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right) = 1 - \frac{1}{p!} \text{ par "télescopage".}$$

Alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^p \frac{n-1}{n!} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{p!} \right) = 1.$ Ainsi :

la série de terme général $\frac{n-1}{n!}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = 1.$

3. Soit t un élément de \mathbb{R}_+^* .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \frac{1}{n!} \left(t^{n-1} - \frac{1}{t^{n-1}} - \ln t^{n-1} \right) = t \frac{t^n}{n!} - t \frac{(1/t)^n}{n!} - \ln t \frac{n-1}{n!}.$$

Rappelons que les séries de termes généraux $\frac{t^n}{n!}$ et $\frac{(1/t)^n}{n!}$ convergent. De plus $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t - 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/t)^n}{n!} = e^{1/t} - 1.$

Q2 nous permet alors de dire que la série de terme général $\frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ converge comme combinaison linéaire de trois séries convergentes (ce qui n'était pas demandé mais ce qui est indispensable pour scinder la somme...). De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} - t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/t)^n}{n!} - \ln t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{t} (e^t - 1) - t (e^{1/t} - 1) - \ln t \times 1 = \frac{e^t - 1}{t} - t (e^{1/t} - 1) - \ln t.$$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \varphi(t) - \ln t.$

Pour tout élément t de \mathbb{R}_+^* , la série de terme général $\frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \varphi(t) - \ln t.$

4. Rappelons que ψ est strictement négative sur $]0, 1[$, nulle en 1 et strictement positive sur $]1, +\infty[$.

Soit t un élément de \mathbb{R}_+^* . $\varphi(t) - \ln t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}.$

Observons que $\frac{\psi(t^{1-1})}{1!} = \psi(1) = 0$. Alors $\varphi(t) - \ln t = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$.

• Soit t un élément de $]0, 1[$. Alors pour tout élément n de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$, t^{n-1} appartient à $]0, 1[$ et $\frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ est strictement négatif.

Donc $\varphi(t) - \ln t = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} < 0$. $\varphi(t) < \ln t$.

• Soit t un élément de $]1, +\infty[$. Alors pour tout élément n de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$, t^{n-1} appartient à $]1, +\infty[$ et $\frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ est strictement positif.

Donc $\varphi(t) - \ln t = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} > 0$. $\varphi(t) > \ln t$.

Pour être complet notons que $\varphi(1) = \frac{e^1 - 1}{1} - 1(e^{\frac{1}{1}} - 1) = (e - 1) - (e - 1) = 0 = \ln 1$.

$$\boxed{\forall t \in]0, 1[, \varphi(t) < \ln t, \varphi(1) = \ln 1 \text{ et } \forall t \in]1, +\infty[, \varphi(t) > \ln t.}$$

5. Nous allons justifier deux points admis dans le texte.

• $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 comme produit de deux ouverts de \mathbb{R} .

• $\forall (x, y) \in U$, $f(x, y) = x^y - y^x = e^{y \ln x} - e^{x \ln y}$.

$(x, y) \rightarrow x$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U (fonction polynôme) et est strictement positive sur U . Comme $t \rightarrow \ln t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , par composition $(x, y) \rightarrow \ln x$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U . $(x, y) \rightarrow y$ étant également de classe \mathcal{C}^1 sur U (fonction polynôme), par produit $(x, y) \rightarrow y \ln x$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U . En remarquant que $t \rightarrow e^t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , par composition on peut affirmer que $(x, y) \rightarrow e^{y \ln x}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

On montre de la même manière que $(x, y) \rightarrow e^{x \ln y}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Alors par différence, f est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

• $\forall (x, y) \in U$, $f(x, y) = x^y - e^{x \ln y}$ donc $\forall (x, y) \in U$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1} - (\ln y) e^{x \ln y} = y x^{y-1} - (\ln y) y^x$.

$\forall (x, y) \in U$, $f(x, y) = e^{y \ln x} - y^x$ donc $\forall (x, y) \in U$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (\ln x) e^{y \ln x} - x y^{x-1} = (\ln x) x^y - x y^{x-1}$.

Soit (x, y) un élément de U . $\nabla f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \iff \begin{cases} y x^{y-1} - (\ln y) y^x = 0 \\ (\ln x) x^y - x y^{x-1} = 0 \end{cases}$.

Notons que x et y sont non nuls. En divisant la première ligne du système par y et la seconde par x il vient :

$\nabla f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} x^{y-1} - (\ln y) y^{x-1} = 0 \\ (\ln x) x^{y-1} - y^{x-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^{y-1} = (\ln y) y^{x-1} \\ (\ln x) x^{y-1} = y^{x-1} \end{cases}$. En inversant les deux lignes et les deux

égalités il vient :

$\nabla f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} y^{x-1} = (\ln x) x^{y-1} \\ (\ln y) y^{x-1} = x^{y-1} \end{cases} \iff \begin{cases} y^{x-1} = (\ln x) x^{y-1} \\ (\ln y) (\ln x) x^{y-1} = x^{y-1} \end{cases}$.

Notons que x^{y-1} n'est pas nul. En divisant la seconde ligne du système par x^{y-1} il vient :

$\nabla f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} y^{x-1} = (\ln x) x^{y-1} \\ (\ln x) (\ln y) = 1 \end{cases}$. Montrons alors le résultats demandé en deux implications.

Il est clair que si $\begin{cases} x > 1, y > 1 \\ y^{x-1} = (\ln x) x^{y-1} \\ (\ln x)(\ln y) = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} y^{x-1} = (\ln x) x^{y-1} \\ (\ln x)(\ln y) = 1 \end{cases}$ et ainsi $\nabla f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

Réciproquement supposons que $\nabla f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$. Alors $\begin{cases} y^{x-1} = (\ln x) x^{y-1} \\ (\ln x)(\ln y) = 1 \end{cases}$.

Ainsi $\ln x = \frac{y^{x-1}}{x^{y-1}} > 0$ donc $x > 1$.

Mais alors $\ln x > 0$ et $(\ln x)(\ln y) = 1 > 0$ donc $\ln y > 0$ et ainsi $y > 1$. On a bien $\begin{cases} x > 1, y > 1 \\ y^{x-1} = (\ln x) x^{y-1} \\ (\ln x)(\ln y) = 1 \end{cases}$.

Finalement : $\nabla f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff \begin{cases} x > 1, y > 1 \\ y^{x-1} = (\ln x) x^{y-1} \\ (\ln x)(\ln y) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1, y > 1 \\ (\ln x)(\ln y) = 1 \\ y^{x-1} = (\ln x) x^{y-1} \end{cases}$.

Soit (x, y) un élément de U , (x, y) est un point critique de f si et seulement si $\begin{cases} x > 1, y > 1 \\ (\ln x)(\ln y) = 1 \\ y^{x-1} = (\ln x) x^{y-1} \end{cases}$.

6. Soit (x, y) un élément de U point critique de f . $\begin{cases} x > 1, y > 1 \\ y^{x-1} = (\ln x) x^{y-1} \\ (\ln x)(\ln y) = 1 \end{cases}$.

x est un réel strictement supérieur à 1 donc il existe un élément t de \mathbb{R}_+^* (et un seul) tel que $x = e^t$. $t = \ln x$.

Alors $1 = (\ln x)(\ln y) = t \ln y$ donc $\ln y = \frac{1}{t}$ et ainsi $y = e^{\frac{1}{t}}$.

$y^{x-1} = x^{y-1} \ln x = x^{y-1} t$. Donc $(x-1) \ln y = \ln y^{x-1} = \ln(x^{y-1} t) = (y-1) \ln x + \ln t$.

Donc $(e^t - 1) \frac{1}{t} = (x-1) \ln y = (y-1) \ln x + \ln t = (e^{\frac{1}{t}} - 1)t + \ln t$.

Alors $\frac{e^t - 1}{t} - t(e^{\frac{1}{t}} - 1) = \ln t$ c'est à dire $\varphi(t) = \ln t$.

Si (x, y) un élément de U point critique de f , il existe un élément t de \mathbb{R}_+^* tel que $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{\frac{1}{t}} \\ \varphi(t) = \ln t \end{cases}$.

7. Procédons en deux étapes.

• Soit (x, y) un élément de U point critique de f . Alors il existe un réel t strictement positif tel que $x = e^t$, $y = e^{\frac{1}{t}}$ et $\varphi(t) = \ln t$.

Q4 montre que nécessairement $t = 1$. Alors $(x, y) = (e, e)$.

• Réciproquement posons $(x, y) = (e, e)$. Alors (x, y) est un élément de U car $x > 0$ et $y > 0$.

De plus $x > 1, y > 1, (\ln x)(\ln y) = 1 \times 1 = 1$ et $y^{x-1} = e^{e-1} = x^{y-1} = x^{y-1} \times 1 = x^{y-1} \ln x$.

Le tout suffit pour dire que $(x, y) = (e, e)$ est un point critique de f (d'après Q5).

(e, e) est l'unique point critique de f .

8. U est un ouvert de \mathbb{R}^2 et f est de classe \mathcal{C}^1 sur U donc si f admet un extremum local en un point de \mathbb{R}^2 , ce point est un point critique de f donc nécessairement ce point est (e, e) .

Montrons que f n'admet pas d'extremum local en (e, e) . Cela montrera alors que f , n'admet aucun extremum sur U .

Posons $C = (e, e)$. $f(C) = e^{e-1} - e^{e-1} = 0$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(e, e+t) = e^{e+t} - (e+t)^e = -((e+t)^e - e^{e+t}) = -f(e+t, e)$.

Ainsi $t \rightarrow f(e, e+t)$ et $t \rightarrow f(e+t, e)$ sont de signe contraire sur \mathbb{R}_+^* .

Soit t dans \mathbb{R}_+^* . $f(e, e+t) = e^{e+t} - (e+t)^e = (e+t)^e \left(\frac{e^{e+t}}{(e+t)^e} - 1 \right) = (e+t)^e \left(e^{(e+t)-e \ln(e+t)} - 1 \right)$.

Notons que $(e+t) - e \ln(e+t) = e+t - e \left(\ln e + \ln \left(1 + \frac{t}{e} \right) \right) = e+t - e - e \ln \left(1 + \frac{t}{e} \right) = e \left(\frac{t}{e} - \ln \left(1 + \frac{t}{e} \right) \right)$.

Rappelons que $\forall z \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $\ln z < z - 1$. Alors $\forall y \in]0, +\infty[$, $\ln(1+y) < y$ ou $y - \ln(1+y) > 0$.

Donc $(e+t) - e \ln(e+t) = e \left(\frac{t}{e} - \ln \left(1 + \frac{t}{e} \right) \right) > 0$.

On a alors $e^{(e+t)-e \ln(e+t)} - 1 > 0$. Donc $f(e, e+t) = (e+t)^e \left(e^{(e+t)-e \ln(e+t)} - 1 \right) > 0$.

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(e, e+t) - f(C) = f(e, e+t) > 0$ et $f(e+t, e) - f(C) = f(e+t, e) < 0$.

Ce qui suffit pour dire $X \rightarrow f(X) - f(C)$ ne garde pas un signe constant au voisinage de C et donc que f n'a pas d'extremum local en C .

Mais enfonçons le clou. Soit r un réel strictement positif. Montrons qu'il existe deux éléments X_1 et X_2 dans la boule ouverte de centre C et de rayon r qui vérifient $f(X_1) - f(C) > 0$ et $f(X_2) - f(C) < 0$.

Posons $X_1 = (e, e + (r/2))$ et $X_2 = (e + (r/2), e)$. X_1 et X_2 sont deux éléments de U .

Comme $r/2$ est strictement positif : $f(X_1) - f(C) > 0$ et $f(X_2) - f(C) < 0$, d'après ce qui précède.

De plus $\|X_1 - C\| = \|(0, r/2)\| = r/2 < r$ et $\|X_2 - C\| = \|(r/2, 0)\| = r/2 < r$. Donc X_1 et X_2 sont deux éléments de $B(C, r)$.

Finalement pour tout réel r strictement positif il existe deux éléments X_1 et X_2 de $B(C, r)$ tels que $f(X_1) - f(C) > 0$ et $f(X_2) - f(C) < 0$. Donc f n'admet pas d'extremum local en C . Mieux :

f n'admet aucun extremum sur U .

PROBLÈME

PARTIE I : Étude des variables Y_n et Z_n .

1. Tout cela n'est pas très sérieux. Nous ne traiterons que (b) et nous écrivons une procédure `EntreTableau` pour remplir le tableau et une fonction `Max` pour trouver le maximum des éléments du tableau. Nous terminerons par un petit programme principal. Le tout nécessite bien évidemment une déclaration de type.

```
1 program ECRICOME_2011;
2
3 const DimMax=200;
4
5 type Tableau=array[1..DimMax] of real;
6
7 function Max(n:integer;X:Tableau):real;
8
9 var i:integer;c:real;
10
11 begin
12
13 c:=X[1];
14
15 for i:=2 to n do if X[i]>c then c:=X[i];
16
17 Max:=c;
18
19 end;
20
21 Procedure EntreTableau(n:integer;var X:Tableau);
22
23 var i : integer;
24
25 begin
26
27 write('Donner la longueur n du tableau (n<=',DimMax,'). n=');
28 readln(n);
29
30 for i:=1 to n do
31   begin
32     write('Donner l''élément d''indice ',i,' du tableau. '); readln(X[i]);
33   end;
34
35 end;
36
37 var n:integer; X:Tableau;
38
39 begin
40
41 EntreTableau(n,X);
42
43 writeln('Le maximum des éléments du tableau est : ',Max(n,X));
44
45 end.
46
```

Dans les questions 2, 3 et 4 nous supposons que n est un élément de \mathbb{N}^* .

2. (a) Soit t un réel.

$$F_{Y_n}(t) = P(Y_n \leq t) = P(\text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq t) = P(\{X_1 \leq t\} \cap \{X_2 \leq t\} \cap \dots \cap \{X_n \leq t\}).$$

Comme les variables aléatoires de la suite (X_1, X_2, \dots, X_n) sont indépendantes on obtient :

$$F_{Y_n}(t) = P(X_1 \leq t) P(X_2 \leq t) \dots P(X_n \leq t) = F_{X_1}(t) F_{X_2}(t) \dots F_{X_n}(t).$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(t) = F_{X_1}(t) F_{X_2}(t) \dots F_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^n F_{X_k}(t).$$

(b) Rappelons que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, F_{X_k}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$\text{Alors } \forall t \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^n F_{X_k}(t) = \begin{cases} (1 - e^{-t})^n & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(t) = \begin{cases} (1 - e^{-t})^n & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(c) $(1 - e^{-0})^n = 0$ (car $n \in \mathbb{N}^*$). Cela permet d'écrire que $\forall t \in \mathbb{R}, F_{Y_n}(t) = \begin{cases} (1 - e^{-t})^n & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } t \in] - \infty, 0] \end{cases}$.

Remarque Bien noter que les deux intervalles sont fermés en 0.

$t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow (1 - e^{-t})^n$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} donc F_{Y_n} est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - \infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$.

Cela suffit pour dire que F_{Y_n} est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 au moins sur \mathbb{R}^* donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points. Ainsi :

Y_n est une variable aléatoire à densité.

$$\forall t \in] - \infty, 0[, F'_{Y_n}(t) = 0 = f_n(t) \text{ et } \forall t \in]0, +\infty[, F'_{Y_n}(t) = n e^{-t} (1 - e^{-t})^{n-1} = f_n(t).$$

f_n est alors une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , positive sur \mathbb{R} , qui coïncide avec F'_{Y_n} sur \mathbb{R}^* donc sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points. Donc :

f_n est une densité de probabilité de la variable aléatoire Y_n .

Remarque Supposons $n \geq 2$. f_n est alors continue sur \mathbb{R} . Cela permet de dire que F_{Y_n} est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, F'_{Y_n}(t) = f_n(t).$$

3. (a) • Version 1 X_{n+1} est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 donc, d'après le programme (VI 4) e)), $\frac{1}{n+1} X_{n+1}$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi exponentielle de paramètre $n+1$.

Version 2 Retrouvons ce résultat en utilisant deux fois le rappel fait au début de la partie I.

Posons $T_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{n+1}$. Notons $F_{T_{n+1}}$ la fonction de répartition de T_{n+1} .

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{T_{n+1}}(t) = P(T_{n+1} \leq t) = P\left(\frac{1}{n+1} X_{n+1} \leq t\right) = P(X_{n+1} \leq (n+1)t) = F_{X_{n+1}}((n+1)t).$$

Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_{X_{n+1}}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (le rappel!). $\forall t \in \mathbb{R}$, $F_{T_{n+1}}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(n+1)t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Le rappel du début de la partie I nous aide (encore!?) à reconnaître la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $n + 1$.

$T_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité qui suit la loi exponentielle de paramètre $n + 1$.

La fonction de répartition de $T_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{n+1}$ est la fonction $F_{T_{n+1}}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{T_{n+1}}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-(n+1)t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(b) Nous avons déjà dit que T_{n+1} est une variable aléatoire à densité qui suit la loi exponentielle de paramètre $n + 1$.

Utilisons de nouveau le cours. Posons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $d_{n+1}(t) = \begin{cases} (n+1)e^{-(n+1)t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

d_{n+1} est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $n + 1$, donc d_{n+1} est une densité de $T_{n+1} = \frac{1}{n+1} X_{n+1}$.

$\frac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction d_{n+1} définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, d_{n+1}(t) = \begin{cases} (n+1)e^{-(n+1)t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

4. Soit x un réel.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $n e^{nt} (1 - e^{-t})^{n-1} = n e^t e^{(n-1)t} (1 - e^{-t})^{n-1} = n e^t (e^t (1 - e^{-t}))^{n-1} = n e^t (e^t - 1)^{n-1}$.

Notons que $t \rightarrow n e^t (e^t - 1)^{n-1}$ est la dérivée de $t \rightarrow (e^t - 1)^n$.

Alors : $\int_0^x n e^{nt} (1 - e^{-t})^{n-1} dt = \int_0^x n e^t (e^t - 1)^{n-1} dt = [(e^t - 1)^n]_0^x = (e^x - 1)^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x n e^{nt} (1 - e^{-t})^{n-1} dt = (e^x - 1)^n.$$

5. Montrons par récurrence que pour tout élément n de \mathbb{N}^* , Z_n est une variable aléatoire à densité admettant f_n pour densité.

• $Z_1 = X_1 = Y_1$ et Y_1 est une variable aléatoire à densité admettant f_1 pour densité.

Alors Z_1 est une variable aléatoire à densité admettant f_1 pour densité.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de \mathbb{N} et montrons la pour $n+1$. Notons que $Z_{n+1} = Z_n + \frac{1}{n+1} X_{n+1}$.

▲ Par hypothèse de récurrence Z_n est une variable aléatoire à densité de densité f_n .

▲ $\frac{1}{n+1} X_{n+1}$ est une variable aléatoire à densité de densité d_{n+1} .

▲ Les variables aléatoires de la suite $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$ sont indépendantes. Il en est de même des variables aléatoires de la suite $\left(X_1, \frac{1}{2} X_2, \dots, \frac{1}{n} X_n, \frac{1}{n+1} X_{n+1}\right)$. Donc $Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} X_i$ et $\frac{1}{n+1} X_{n+1}$ sont indépendantes.

▲ d_{n+1} est nulle sur $] -\infty, 0[$ et $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leq d_{n+1}(t) = (n+1) e^{-(n+1)t} \leq n+1$.

Donc d_{n+1} est bornée sur \mathbb{R} .

Ceci suffit pour dire que $Z_n + \frac{1}{n+1} X_{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et que $\hat{h} : x \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) d_{n+1}(x-t) dt$ en est une densité définie sur \mathbb{R} .

Z_{n+1} est donc une variable aléatoire à densité de densité \hat{h} . Déterminons \hat{h} .

Soit x un réel. $\hat{h}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) d_{n+1}(x-t) dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) d_{n+1}(x-t) dt$ car f_n est nulle sur $] -\infty, 0[$.

Si x est strictement négatif, pour tout t dans $[0, +\infty[$, $x-t$ est strictement négatif et ainsi $d_{n+1}(x-t) = 0$.

Alors $\forall x \in] -\infty, 0[$, $\hat{h}(x) = 0 = f_{n+1}(x)$. Supposons x dans $[0, +\infty[$.

$\forall t \in [0, x]$, $x-t \geq 0$ et $d_{n+1}(x-t) = (n+1) e^{-(n+1)(x-t)}$. $\forall t \in]x, +\infty[$, $x-t < 0$ et $d_{n+1}(x-t) = 0$.

Alors $\hat{h}(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t) d_{n+1}(x-t) dt = \int_0^x f_n(t) (n+1) e^{-(n+1)(x-t)} dt = (n+1) e^{-(n+1)x} \int_0^x f_n(t) e^{(n+1)t} dt$.

$\hat{h}(x) = (n+1) e^{-(n+1)x} \int_0^x n e^{-t} (1-e^{-t})^{n-1} e^{(n+1)t} dt = (n+1) e^{-(n+1)x} \int_0^x n e^{nt} (1-e^{-t})^{n-1} dt$.

En utilisant Q4 on obtient alors : $\hat{h}(x) = (n+1) e^{-(n+1)x} (e^x - 1)^n = (n+1) e^{-x} (e^{-x} (e^x - 1))^n = (n+1) e^{-x} (1 - e^{-x})^n$.

Résumons. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{h}(x) = \begin{cases} (n+1) e^{-x} (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \in] -\infty, 0[\end{cases}$.

Finalement $\hat{h} = f_{n+1}$ donc Z_{n+1} est une variable aléatoire à densité de densité f_{n+1} . Ceci achève la récurrence.

Pour tout entier naturel n non nul, Z_n est une variable aléatoire à densité admettant f_n pour densité.

Pour tout entier naturel n non nul, $Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} X_i$ a même loi que $Y_n = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Remarque Le passage par Q4 laisse perplexe car on détricote dans Q5 ce que l'on a tricoté dans Q4 non ?

On peut sans doute obtenir \hat{h} sur $[0, +\infty[$ sans passer par Q4. Essayons.

Soit x dans $[0, +\infty[$ notons que $\hat{h}(x)$ vaut encore $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t) d_{n+1}(t) dt$.

Alors $\hat{h}(x) = \int_0^{+\infty} f_n(x-t) d_{n+1}(t) dt = \int_0^x f_n(x-t) d_{n+1}(t) dt = \int_0^x n e^{-(x-t)} (1 - e^{-(x-t)})^{n-1} (n+1) e^{-(n+1)t} dt$.

$\hat{h}(x) = (n+1) e^{-x} \int_0^x n e^{-t} e^{-(n-1)t} (1 - e^{-x+t})^{n-1} dt = (n+1) e^{-x} \int_0^x n e^{-t} (e^{-t} - e^{-x})^{n-1} dt$.

$\hat{h}(x) = (n+1) e^{-x} [- (e^{-t} - e^{-x})^n]_0^x = (n+1) e^{-x} (1 - e^{-x})^n$.

PARTIE II : Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

Dans la suite, sauf mention du contraire, nous supposons que les fonctions considérées sont des applications de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} .

1. (a) Notons que φ et ψ sont dérivables sur \mathbb{R}_+ . Alors $\varphi - \psi$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ . Comme $x \rightarrow e^{-x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ , par produit h est dérivable sur \mathbb{R}_+ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, h'(x) = (\varphi'(x) - \psi'(x))e^{-x} + (\varphi(x) - \psi(x))(-e^{-x}) = ((\psi(x) - \psi'(x)) - (\varphi(x) - \varphi'(x)))e^{-x}.$$

Comme φ et ψ vérifient l'équation (\mathcal{D}_f) alors $\forall x \in \mathbb{R}_+, h'(x) = (f(x) - f(x))e^{-x} = 0$.

h' est nulle sur l'intervalle $[0, +\infty[$ donc h est constante sur $[0, +\infty[$.

h est constante sur \mathbb{R}_+ .

(b) φ et ψ sont deux éléments de l'espace vectoriel E donc $\varphi - \psi$ est un élément de E .

Alors $\int_0^{+\infty} (\varphi(t) - \psi(t)) dt$ est absolument convergente donc convergente.

h est constante sur \mathbb{R}_+ donc il existe un réel c tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, (\varphi(x) - \psi(x))e^{-x} = h(x) = c$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) - \psi(x) = ce^x$. Or $\int_0^{+\infty} (\varphi(t) - \psi(t)) dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} ce^t dt$ converge.

Supposons c non nul. Alors $\int_0^{+\infty} e^t dt$ converge. Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^t dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} (e^A - 1) = +\infty !!$

Donc c est nul. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) - \psi(x) = ce^x = 0$. Par conséquent $\varphi - \psi = 0_E$ et ainsi $\varphi = \psi$.

$\varphi = \psi$.

L'équation (\mathcal{D}_f) possède au plus une solution dans E .

2. Soit x un réel positif.

- $t \rightarrow e^{-t} f(t)$ est continue sur $[x, +\infty[$ comme produit de deux fonctions continues sur $[x, +\infty[$.
- $\forall t \in [x, +\infty[, 0 \leq |e^{-t} f(t)| = e^{-t} |f(t)| \leq |f(t)|$.
- $\int_x^{+\infty} |f(t)| dt$ converge car $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de

$\int_x^{+\infty} |e^{-t} f(t)| dt$. Ainsi $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est absolument convergente donc convergente.

Pour tout réel positif x , $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est absolument convergente donc convergente.

3. Rappelons que $x \rightarrow e^{-x} f(x)$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Donc $L_f : x \rightarrow \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ qui est la primitive de cette fonction sur l'intervalle $[0, +\infty[$ prenant la valeur 0 en 0, est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$. De plus $\forall x \in [0, +\infty[, L'_f(x) = e^{-x} f(x)$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, k_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = e^x \left(\int_x^0 e^{-t} f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right).$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, k_f(x) = e^x \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt \right) = e^x \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt - L_f(x) \right).$$

L_f est dérivable sur $[0, +\infty[$ donc $x \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt - L_f(x)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$.

Comme $x \rightarrow e^x$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, par produit k_f est dérivable sur $[0, +\infty[$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, k_f(x) = e^x \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt - L_f(x) \right).$$

$$\text{Alors } \forall x \in [0, +\infty[, k'_f(x) = e^x \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt - L_f(x) \right)' + e^x (0 - e^{-x} f(x)) = k_f(x) - f(x).$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+, k_f(x) - k'_f(x) = f(x)$.

$$\boxed{k_f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, k_f(x) - k'_f(x) = f(x).}$$

4. (a) (α) Soit x un élément de \mathbb{R}_+ .

$\forall t \in [x, +\infty[, 0 \leq e^{-t} \leq e^{-x}$ et $f(t) \geq 0$. Donc $\forall t \in [x, +\infty[, 0 \leq e^{-t} f(t) \leq e^{-x} f(t)$.

Or $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ converge, $\int_x^{+\infty} f(t) dt$ converge et $x \leq +\infty$ donc en intégrant il vient :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \leq e^{-x} \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

En multipliant par e^x qui est strictement positif on obtient : $0 \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \leq e^x e^{-x} \int_x^{+\infty} f(t) dt$.

$$\text{Ainsi } 0 \leq k_f(x) \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq k_f(x) \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt.}$$

Attention jusqu'à la fin de la partie II la variable d'intégration devient x ...

(β) $k_f - k'_f = f$ donc $k_f = k'_f + f$. Soit A dans \mathbb{R}_+ .

$$\int_0^A k_f(x) dx = \int_0^A (k'_f(x) + f(x)) dx = \int_0^A k'_f(x) dx + \int_0^A f(x) dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x) dx.$$

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}_+, \int_0^A k_f(x) dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x) dx.}$$

(**b**) $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq k_f(x) \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f(t) dt = 0$ comme limite du reste d'une intégrale convergente.

Par encadrement on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} k_f(x) = 0$.

$\forall A \in \mathbb{R}_+, \int_0^A k_f(x) dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x) dx$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} k_f(A) = 0$ et $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ car $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A k_f(x) dx = -k_f(0) + \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Alors $\int_0^{+\infty} k_f(x) dx$ converge et vaut $-k_f(0) + \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

$$\int_0^{+\infty} k_f f(x) dx = -k_f(0) + \int_0^{+\infty} f(x) dx = -e^0 \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-x}) f(x) dx.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} k_f(x) dx \text{ converge et } \int_0^{+\infty} k_f(x) dx = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-x}) f(x) dx.}$$

5. Le but de cette question est de montrer que k_f appartient à E .

• Notons que k_f est dérivable sur \mathbb{R}_+ donc k_f est continue sur \mathbb{R}_+ .

• Montrons que $\int_0^{+\infty} |k_f(t)| dt$ converge.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|k_f(x)| = e^x \left| \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right| \leq e^x \int_x^{+\infty} |e^{-t} f(t)| dt$ car nous avons montré dans Q2 que $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est absolument convergente pour tout élément x de \mathbb{R}_+ . Donc :

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq |k_f(x)| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt$. Ainsi pour montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} |k_f(x)| dx$ il suffit de montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \left(e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt \right) dx$. C'est ce que nous allons faire en utilisant Q4.

▲ $|f|$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

▲ $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge car $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge !

Dans ces conditions $|f|$ est un élément de E prenant ses valeurs dans \mathbb{R}_+ . D'après Q4, $\int_0^{+\infty} k_{|f|}(t) dt$ converge.

▲ $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq |k_f(x)| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt = k_{|f|}(x)$.

▲ $\int_0^{+\infty} k_{|f|}(t) dt$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de

$$\int_0^{+\infty} |k_f(x)| dx.$$

$$\boxed{k_f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \int_0^{+\infty} |k_f(x)| dx \text{ converge. } k_f \text{ est un élément de } E.}$$

$$\boxed{k_f \text{ est l'unique élément de } E, \text{ dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ qui vérifie } k_f - k'_f = f.}$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } f \text{ de } E, \text{ l'équation } (\mathcal{D}_f) \text{ admet une solution et une seule dans } E.}$$

6. Bien évidemment il faut lire g dérivable sur \mathbb{R}_+ et il faut sans doute travailler avec la restriction de g à \mathbb{R}_+ .

Supposons qu'il existe une densité de probabilité g dérivable sur \mathbb{R}_+ , nulle sur \mathbb{R}_-^* telle que sa restriction \tilde{g} à \mathbb{R}_+ vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{g}(x) - \tilde{g}'(x) = f(x)$. Notons \tilde{f} la restriction de f à \mathbb{R}_+ .

\tilde{f} est continue et positive sur \mathbb{R}_+ , $\int_0^{+\infty} \tilde{f}(t) dt$ converge et vaut 1 donc $\int_0^{+\infty} |\tilde{f}(t)| dt$ converge. Ainsi \tilde{f} est un élément de E . De même \tilde{g} appartient à E .

Alors \tilde{f} et \tilde{g} sont deux éléments de E tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{g}(x) - \tilde{g}'(x) = \tilde{f}(x)$. Par conséquent $\tilde{g} = k_{\tilde{f}}$.

De plus \tilde{f} prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+ . Q4 donne alors $\int_0^{+\infty} k_{\tilde{f}}(t) dt = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-t}) \tilde{f}(t) dt$. Alors :

$$1 = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(t) dt = \int_0^{+\infty} k_{\tilde{f}}(t) dt = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-t}) \tilde{f}(t) dt = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(t) dt - \int_0^{+\infty} e^{-t} \tilde{f}(t) dt = 1 - \int_0^{+\infty} e^{-t} \tilde{f}(t) dt$$

car toutes les intégrales convergent.

Finalement $\int_0^{+\infty} e^{-t} \tilde{f}(t) dt = 0$. Comme $t \rightarrow e^{-t} \tilde{f}(t)$ est continue et positive sur \mathbb{R}_+ : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e^{-t} \tilde{f}(t) = 0$.

Ceci donne $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{f}(t) = 0$ ou $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = 0$.

Dans ces conditions f est nulle sur \mathbb{R} et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0!!$

Il n'existe pas de densité de probabilité g , dérivable sur \mathbb{R}_+ , nulle sur \mathbb{R}_- et telle que sa restriction \tilde{g} à \mathbb{R}_+ vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{g}(x) - \tilde{g}'(x) = f(x)$.

PARTIE III : Étude de l'application $f \rightarrow k_f$.

1. • D'après ce qui précède, pour tout élément f de E , k_f appartient à E . Donc φ est une application de E dans E .

• Soit λ un réel et soient f et g deux éléments de E .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(\lambda f + g)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} (\lambda f + g)(t) dt = e^x \int_x^{+\infty} (\lambda e^{-t} f(t) + e^{-t} g(t)) dt.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(\lambda f + g)(x) = e^x \left(\lambda \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt + \int_x^{+\infty} e^{-t} g(t) dt \right) \text{ car toutes les intégrales convergent.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(\lambda f + g)(x) = \lambda e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} g(t) dt = \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x) = (\lambda \varphi(f) + \varphi(g))(x).$$

Donc : $\varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (f, g) \in E^2$, $\varphi(\lambda f + g) = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$. φ est linéaire. Finalement :

φ est un endomorphisme de E .

2. • f_a est continue sur $[0, +\infty[$.

• Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ell_a(x) = \begin{cases} a e^{-ax} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_a(x) = \frac{1}{a} \ell_a(x)$.

ℓ_a est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre a .

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \ell_a(t) dt$ converge et vaut 1. Alors $\int_0^{+\infty} \ell_a(t) dt$ converge et vaut 1.

Dans ces conditions $\int_0^{+\infty} f_a(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{a}$.

Comme f_a est positive sur \mathbb{R}_+ , $\int_0^{+\infty} f_a(t) dt$ est absolument convergente. Ceci achève de montrer que :

f_a est un élément de E .

Soit x un élément de \mathbb{R}_+ . $\varphi(f_a)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} e^{-at} dt = e^x \int_x^{+\infty} e^{-(a+1)t} dt = e^x \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{a+1} e^{-(a+1)t} \right]_x^A$.

$$\varphi(f_a)(x) = e^x \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a+1} e^{-(a+1)x} - \frac{1}{a+1} e^{-(a+1)A} \right) = e^x \frac{1}{a+1} e^{-(a+1)x} = \frac{1}{a+1} e^{-ax} = \frac{1}{a+1} f_a(x).$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(f_a)(x) = \frac{1}{a+1} f_a(x)$. $\varphi(f_a) = \frac{1}{a+1} f_a$. De plus f_a n'est pas la fonction nulle de E . Ainsi :

$$f_a \text{ est un vecteur propre de } \varphi \text{ associé à la valeur propre } \frac{1}{a+1}.$$

3. (a) Montrons que $\text{Ker } \varphi = \{0_E\}$. Soit f un élément de $\text{Ker } \varphi$. $\varphi(f) = 0_E$.

Or $\varphi(f) = k_f$ donc $k_f = 0_E$ et alors k'_f est nulle. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = k_f(x) - k'_f(x) = 0$. $f = 0_E$.

Ceci achève de montrer que $\text{Ker } \varphi = \{0_E\}$. Par conséquent 0 n'est pas valeur propre de φ . Ainsi :

$$\lambda \text{ n'est pas nul.}$$

(b) λ n'est pas nul. $f = \frac{1}{\lambda} \varphi = \frac{1}{\lambda} k_f$ et k_f est dérivable sur \mathbb{R}_+ . Alors f est dérivable sur \mathbb{R}_+ .

De plus $f' = \frac{1}{\lambda} k'_f = \frac{1}{\lambda} (k_f - f) = \frac{1}{\lambda} (\varphi(f) - f) = \frac{1}{\lambda} (\lambda f - f) = \frac{\lambda - 1}{\lambda} f = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f$. Donc :

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et vérifie l'équation différentielle } f' = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f.$$

(c) $x \rightarrow \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x$ est une primitive sur \mathbb{R}_+ de $x \rightarrow 1 - \frac{1}{\lambda}$. L'unique résultat du programme sur les équations différentielles montre qu'il existe un réel c tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = c e^{(1 - \frac{1}{\lambda})x}$. f n'étant pas la fonction nulle, c n'est pas nul.

$$\text{Il existe un réel } c \text{ non nul tel que } \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = c e^{(1 - \frac{1}{\lambda})x}.$$

(d) c n'est pas nul et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} e^{(1 - \frac{1}{\lambda})t} dt$ converge. Posons $\gamma = 1 - \frac{1}{\lambda}$. $\int_0^{+\infty} e^{\gamma t} dt$ converge.

$$\forall A \in [0, +\infty[, \int_0^A e^{\gamma t} dt = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} (e^{\gamma A} - 1) & \text{si } \gamma \neq 0 \\ A & \text{sinon} \end{cases}. \text{ Alors : } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{\gamma t} dt = \begin{cases} +\infty & \text{si } \gamma > 0 \\ -\frac{1}{\gamma} & \text{si } \gamma < 0. \\ +\infty & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{(1 - \frac{1}{\lambda})t} dt$ converge, nécessairement $\gamma < 0$. Ainsi $\frac{\lambda - 1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\lambda} < 0$.

En observant que $\lambda(\lambda - 1) < 0$ et en utilisant le signe du trinôme on obtient que $\lambda \in]0, 1[$.

$$\lambda \in]0, 1[.$$

4. Montrons le résultat par double inclusion.

• Q3 a montré que $\text{Sp } \varphi \subset]0, 1[$.

• Réciproquement soit λ un élément de $]0, 1[$. Posons $a = \frac{1 - \lambda}{\lambda}$.

Alors $a > 0$ (car λ appartient à $]0, 1[$) et $\lambda = \frac{1}{1 + a}$ donc, d'après Q2, λ est valeur propre de φ et $f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ est un vecteur propre associé à cette valeur propre. $\lambda \in \text{Sp } \varphi$.

Ceci achève de montrer que $]0, 1[\subset \text{Sp } \varphi$. Comme $\text{Sp } \varphi \subset]0, 1[$:

$$\boxed{\text{Sp } \varphi =]0, 1[.}$$

Soit λ une valeur propre de φ .

Nous avons montré dans Q3 que tout vecteur propre de φ associé à λ était dans $\text{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$.

Comme 0_E appartient à $\text{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$, le sous-espace propre SEP (φ, λ) de φ associé à λ est contenu dans $\text{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$.

Or SEP (φ, λ) est de dimension supérieure ou égale à 1 et $\text{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$ est de dimension 1 (car $f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ n'est pas 0_E).

Ainsi SEP $(\varphi, \lambda) \subset \text{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$ et $\dim \text{SEP } (\varphi, \lambda) = \dim \text{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}}) = 1$ donc SEP $(\varphi, \lambda) = \text{Vect}(f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}})$.

Pour toute valeur propre λ de φ le sous-espace propre de φ associé à λ est la droite vectorielle engendrée par $f_{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.
