Exercice 1

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1. A est une matrice symétrique, donc diagonalisable.
2. On détermine les éléments propres de A :

$$(A-\alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -\alpha x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 & L_1 + 2\alpha L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{2}x - \alpha y + \frac{1}{2}z = 0 & L_2 \to L_1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \alpha z = 0 & L_3 - L_1 \to L_3 \end{cases}$$

$$\iff (1) \begin{cases} \frac{1}{2}x - \alpha y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \left(\frac{1}{2} - 2\alpha^2\right) y + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) z = 0 \\ \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) y - \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) z = 0 \end{cases}$$

– Si $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{2} + \alpha \neq 0$ et $(1) \iff (2) \begin{cases} \frac{1}{2}x + \left(-\alpha + \frac{1}{2}\right) z = 0 \\ \left(1 + \alpha - 2\alpha^2\right) z = 0 \\ y = z \end{cases}$

On détermine les racine de $1 + \alpha - 2\alpha^2$: $\Delta = 1 + 8 = 9$ et les racines sont : $\alpha_1 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$ (exclus ici) et $\alpha_2 = \frac{-1-3}{-4} = 1$

– Si de plus $\alpha \neq 1$ alors $(2) \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = z \end{cases}$ et α n'est pas valeur propre.

– Si $\alpha = 1$ alors $(2) \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y = z \end{cases} \iff x = y = z$

et donc 1 est valeur propre associé au sous espace propre $E_1 = \text{Vect}\left((1,1,1)\right)$ de base $((1,1,1))$ (génératrice et libre)
et donc $\dim(E_1) = 1$

– Si $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ alors $(1) \iff \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \iff z = -x - y$
et donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre associé au sous espace propre $E_{-\frac{1}{2}} = \text{Vect}\left((1,0,-1),(0,1,-1)\right)$
écriture qui ne conviendra pas pour la matrice de passage demandé ...
$(1) \iff x = -y - z$ et $E_{-\frac{1}{2}} = \text{Vect}\left((1,-1,0),(1,0,-1)\right)$
La famille $\left((1,-1,0),(1,0,-1)\right)$ est libre car échelonnée
C'est donc une base de $E_{-\frac{1}{2}}$. et $\dim\left(E_{-\frac{1}{2}}\right) = 2$

La somme des dimensions des sous espaces propres étant 3, la matrice A d'ordre 3 est diagonalisable et la concaténation
$\mathcal{B} = \left((1,1,1),(1,-1,0),(1,0,-1)\right)$ des bases des sous espaces propres forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique dans $\mathcal{B}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

P a bien les 2 premières lignes demandées et est inversible -matrice de passage- et symétrique.
On a alors $A = A = P\ D\ P^{-1}$

On calcule l'inverse de P :

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{c}x+y+z=a\\x-y=b\\x-z=c\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c}x+x-b+x-c=a\\y=x-b\\z=x-c\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{c}x=\frac{a+b+c}{3}\\x=\frac{a-2b+c}{3}\\z=\frac{a+b-2c}{3}\end{array}\right.\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

Donc $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$ (que l'on prend soin de vérifier sur $P\cdot P^{-1}=I$)

Plus rapide (http ://baudrandmaths.free.fr/) On nous demande une matrice de premières lignes $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\?&?&?\end{pmatrix}$ et symétrique.

Donc $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&?\end{pmatrix}$. Et il ne reste qu'à tester les deux premières colonnes et à trouver le dernier coefficient de la troisième :

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc 1 valeur propre et $(1,1,1)$ vecteur prorpe associé.

$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $(1,-1,0)$ est vecteur propre associé à $\frac{-1}{2}$

$A\begin{pmatrix}1\\0\\z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\z\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}z=\alpha\\\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z=0\\\frac{1}{2}=\alpha z\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c}-\frac{1}{2}=\alpha\\z=-1\\\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre et $(1,0,-1)$ est un vecteur propre associé.

Reste à justifier que l'on a une base formée de vecteurs propres :

- Par le théorème CNS, il faut la dimension de chaque sous espace propre, alors que l'on a juste **des** vecteurs de ces sous espaces (et non une base de chacun).
  $((1,-1,0),(1,0,-1))$ est libre donc la dimension du sous espace associé à $\frac{-1}{2}$ est au moins de 2
  et celle du sous espace associé à 1 est au moins de 1.
  Comme la siomme des dimensions des sous espaces propres est inférieurre à 3, ces dimensions sont donc $\dim E_1=1$ et $\dim E_{-\frac{1}{2}}=2$ et on a donc une base de chacun.
  Et la juxtaposition des bases forme une base de $\mathbb{R}^3$ (CNS)
- On montre directement que la famille $\mathcal{B}=((1,1,1),(1,-1,0),(1,0,-1))$ est une base en montrant qu'elle est libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$:
  Si $\alpha(1,1,1)+\beta(1,-1,0)+\gamma(1,0,-1)=0$ alors ... alors $\alpha=\beta=\gamma=0$

3. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et même dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
A^n &= P\ D^n\ P^{-1} \\
&= \frac{1}{3}P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \left(\frac{-1}{2}\right)^n & -2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \left(\frac{-1}{2}\right)^n & -2\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(Que l'on vérifie pour $n = 0$ et $n = 1$)

4. Soient $u_0,\ v_0,\ w_0$ trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

On note $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = A\ X_{n-1}$.

a) La suite X est géométrique matricielle de raison A donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$

b) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la formule de A^n étant également vraie pour $n = 0$)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)(u_0+v_0+w_0) + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n u_0 \\ \left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)(u_0+v_0+w_0) + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n v_0 \\ \left(1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)(u_0+v_0+w_0) + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n w_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n u_0 \\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n v_0 \\ 1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{-1}{2}\right)^n w_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et donc $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3} + \left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \dfrac{1}{3} + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \dfrac{1}{3} + \left(w_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$

c) Comme $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ alors $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ et $u_n,\ v_n,$ et w_n tendent vers $\frac{1}{3}$ quand $n \to +\infty$.

Conclusion : $\boxed{u = v = w = \frac{1}{3}}$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}$

d) On a

$$\begin{aligned} d_n^2 &= \left[\left(u_0-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]^2+\left[\left(v_0-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]^2+\left[\left(v_0-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 \\ &= \left(-1\frac{1}{2}\right)^{2n}\left[\left(u_0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(v_0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(v_0-\frac{1}{3}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Et comme Soient $u_0,\ v_0,\ w_0$ trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0+v_0+w_0=1$. alors $0 \leq u_0 = 1-\ (v_0+w_0) \leq 1$ et $\frac{-2}{3} \leq \frac{-1}{3} \leq u_0-\frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}$

Donc $\left(u_0-\frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{4}{9}$ et de même pour $\left(v_0-\frac{1}{3}\right)^2$ et $\left(v_0-\frac{1}{3}\right)^2$.

Donc $\left(u_0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(v_0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(v_0-\frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{4}{3} \leq 4$

Finalement $d_n^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} 4$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : d_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}}$

e) Comme $2^7 = 128$ alors pour $n = 8$ on a $2^{n-1} = 128$ et $d_8 \leq 10^{-2}$

Conclusion : $\boxed{\text{pour } n = 8 \text{ on a bien } d_8 \leq 10^{-2}}$

Exercice 2

Préliminaire

On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$.
On considère l'application :

$$g :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = x^2 + \ln x$$

1. g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ (somme de fonctions continues) et $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$
   En 0 : $g(x) = x^2 + \ln x \to -\infty$ et en $+\infty$: $g(x) = x^2 + \ln x \to +\infty$
   Conclusion : $\boxed{g \text{ est continue et strictement croissante sur }]0;+\infty[}$
2. g est donc bijective de $]0;+\infty[$ dans $]\lim_0 g; \lim_{+\infty} g[= \mathbb{R}$
   Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors
   Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0, \text{ admet une solution et une seule.}}$

On note α l'unique solution de cette équation.

3. On a $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0,25 - \ln(2) < 0$ car $0,69 < \ln 2 < 0,70$
   et $g(1) = 1 + \ln 1 = 1$
   Donc $g\left(\frac{1}{2}\right) < g(\alpha) < g(1)$ et comme g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et que $\frac{1}{2},\ \alpha$ et 1 en sont éléments
   Conclusion : $\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$

Partie A

On note $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application :

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$$

1. a) f est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4x} \\ &= \frac{4x-2x^2-1}{4x} \end{aligned}$$

avec $-2x^2+4x-1$ du second degré de discriminant : $\Delta = 16-8 = 8$ et pour racines : $x_1 = \frac{-4-\sqrt{8}}{-4} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2} > 1$ et $x_2 = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2}$

Donc $-2x^2+4x-1>0$ (signe opposé à -2) sur $]x_2;x_1[$ et donc sur I

Conclusion : $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } I.}$

b) On peut remarque que $f(x)-x = -\frac{1}{4}g(x)$ donc

x	$\frac{1}{2}$	α	1
$g(x)$	$-\nearrow$	0	$\nearrow +$
$f(x)-x$	$+$		$-$
	$f(x)>x$	$f(x)=x$	$f(x)<x$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$ et $f(1) < 1$ et comme f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ alors $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$

Conclusion : $\boxed{\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1}$

c) Et comme f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$, si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ alors $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(1)$ et $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq f(1)$

d'où $f(x) \in I$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) \in I.}$

2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) On a $u_1 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

b) En utilisant que $\forall x \in I, \quad f(x) \in I$, par récurrence :

- $u_0 \in I$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in I$ alors $f(u_n) \in I$ et $u_{n+1} \in I$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n \in I}$

c) Pour utiliser le signe de $f(x)-x$, il faudrait montrer tout d'abord que $u_n \geq \alpha$.

Ici, on montre par récurrence :

- $u_1 = \frac{3}{4} \leq u_0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq u_{n+1}$ alors $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$ car f est strictement décroissante sur I et que u_n et u_{n+1} en sont éléments.
  Donc $u_{n+1} \geq u_{n+2}$

Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

d) La suite u est donc décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ donc elle est convergente vers une limite ℓ.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ alors $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

Donc f est continue en ℓ et $f(\ell) = \ell$.

Or pour $x \in I$: $f(x)-x = -\frac{1}{4}g(x)$ donc $f(x)-x = 0 \Longleftrightarrow g(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \alpha$

Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et sa limite est le réel } \alpha.}$

Partie B

On considère l'application :

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto F(x, y) = x\ e^y + y\ \ln x$$

1. a) Les fonctions coordonées $(x, y) \to x$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ donc $(x, y) \to \ln x$ est C^1 en $x > 0$ donc sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
   et F est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions C^1, et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= e^y + \frac{y}{x} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= x\ e^y + \ln x \end{aligned}$$

   b) (x, y) est un point critique si et seulement si $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$

$$\begin{aligned} &\iff \begin{cases} e^y + \frac{y}{x} = 0 \\ x\ e^y + \ln x = 0 \quad L_2 - xL_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} e^y + \frac{y}{x} = 0 \\ \ln x - y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + \frac{\ln(x)}{x} = 0 \\ y = \ln x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + \ln(x) = 0 \\ y = \ln x \end{cases} \end{aligned}$$

   qui a pour unique solution dans $x = \alpha$ et $y = \ln(\alpha)$
   Conclusion : $\boxed{\text{le seul point critique de } F \text{ est } (\alpha, \ln(\alpha)).}$

2. F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{y}{x^2} \\ s &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = e^y + \frac{1}{x} \\ t &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = x\ e^y \end{aligned}$$

   et au point critique on a $(\alpha, \ln(\alpha))$ on a

$$r = -\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} : s = \alpha + \frac{1}{\alpha} : t = \alpha^2$$

   et

$$\begin{aligned} rt - s^2 &= -\ln(\alpha) - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2 - \ln\alpha - 2 \\ &= -\frac{1}{\alpha^2} - 2 < 0 \text{ car } \alpha^2 + \ln\alpha = 0 \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{sur l'ouvert } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ F \text{ n'a pas d'extremum local donc a fortiori, global.}}$

EXERCICE 3

1. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout nombre réel x par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

f est la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.

2. On définit la variable aléatoire discrète Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante :
   ⋆ l'événement $(Y = 0)$ est égal l'événement $(X < 1)$
   ⋆ pour tout nombre entier strictement positif n, l'événement $(Y = n)$ est égal à l'événement $(n \leq X < n+1)$.

   a) Pour $n = 0$ on a $\mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{P}(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} f(t)\, dt = \int_0^1 e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^1 = 1 - e^{-1}$
   et $\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) e^{-0} = 1 - e^{-1} = \mathrm{P}(Y = 0)$.
   Pour n entier strictement positif :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = n) &= \mathrm{P}(n \leq X < n+1) \\ &= \int_n^{n+1} e^{-t} dt \text{ car } n \leq n+1 \\ &= \left[-e^{-t}\right]_n^{n+1} \\ &= -e^{-(n+1)} + e^{-n} \\ &= e^{-n}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : \mathrm{P}(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}}$

   b) Les valeurs de $Y + 1$ sont $\mathbb{N}^*$
   Et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(Y + 1 = n) = (Y = n - 1)$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y + 1 = n) &= \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n+1} \\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$
   Donc et $E(Y + 1) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \dfrac{e}{e - 1}$ et $E(Y) = E(Y + 1) - 1 = \dfrac{1}{e - 1}$
   et $V(Y) = V(Y + 1) = \dfrac{\frac{1}{e}}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} = \dfrac{e}{(e - 1)^2}$

   c) $Y + 1$, loi géométrique est celle du premier succès. Donc Y est le nombre d'expériences **avant** le premier succès dans une suite d'expériences indépendantes dont la probabilité de succès est $1 - \frac{1}{e}$.
   On continue tant que l'on a échec (probabilité $\frac{1}{e} = e^{-1}$)
   `program eml2007 ;`

```
var y :integer ; u :real ;
begin
    randomize ;
    u :=random ; y :=0 ;
    while u<exp(-1) do
    begin y :=y+1 ; u :=random end ;
    writeln('y vaut ', y) ;
end.
```

3. Soit U une variable de Bernoulli telle que $\mathrm{P}(U=1) = P(U=0) = \frac{1}{2}$.
On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes.
Soit la variable aléatoire $T = (2U-1)Y$, produit des variables aléatoires $2U-1$ et Y.
Ainsi, T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.

a) Comme U a une espérance $(\frac{1}{2})$ alors $2U-1$ et Y sont indépendantes et ont une espérance alors
T a une espérance et

$$\begin{aligned} E(T) &= E((2U-1)\cdot Y) \\ &= E(2U-1)E(Y) = (2E(U)-1)E(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(T)=0}$

b) Comme $2U-1 = \pm 1$ suivant que $U=0$ ou 1 alors $(2U-1)^2 = 1$ et
Conclusion : $\boxed{T^2 = Y^2}$
Y a une variance et $V(Y) = \dfrac{e}{(e-1)^2}$ alors Y^2 a une espérance et

$$\begin{aligned} E\left(Y^2\right) &= V(Y) + E(Y)^2 \\ &= \frac{e}{(e-1)^2} + \left(\frac{1}{e-1}\right)^2 \\ &= \frac{e+1}{(e-1)^2} \end{aligned}$$

Et comme $T^2 = Y^2$, T^2 a une espérance et donc T a une variance et

$$\begin{aligned} V(T) &= E\left(T^2\right) - E(T)^2 = E\left(Y^2\right) - 0 \\ &= \frac{e+1}{(e-1)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{V(T) = \dfrac{e+1}{(e-1)^2}}$

c) Comme $Y \geq 0$ et que $2U-1$ vaut ± 1on a pour n entier strictement négatif :

$$\begin{aligned} (T=n) &= (2U-1=-1) \cap (Y=-n) \text{ indépendants} \\ \mathrm{P}(T=n) &= \mathrm{P}(U=0)\,\mathrm{P}(Y=-n) \\ &= \frac{1}{2}e^{n}\left(1-\frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

Pour n entier strictement positif :

$$\begin{aligned}
(T=n) &= (2U-1=1)\cap(Y=n) \text{ indépendants} \\
\mathrm{P}(T=n) &= \mathrm{P}(U=1)\,\mathrm{P}(Y=n) \\
&= \frac{1}{2}e^{-n}\left(1-\frac{1}{e}\right)
\end{aligned}$$

et pour $n=0$ on a $(T=0)=(Y=0)$ et $\mathrm{P}(T=0)=1-\frac{1}{e}$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T=n)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-n}\left(1-\frac{1}{e}\right) & \text{si } n\in\mathbb{Z}_+^* \\ 1-\frac{1}{e} & \text{si } n=0 \\ \frac{1}{2}e^{n}\left(1-\frac{1}{e}\right) & \text{si } n\in\mathbb{Z}_-^*\end{cases}}$

4. Soit la variable aléatoire $D=X-Y$. On note F_D la fonction de répartition de D.

   a) Pour $n\in\mathbb{N}$, et pour $Y=n\geq 1 : Y\leq X<Y+1$ donc $D=X-Y\geq 0$
   Donc $D<0$ est l'événement $(Y=0)\cap(X<0)=(X<0)$ qui est de probabiltié nulle.
   et a fortiori, pour tout $t<0$: $\mathrm{P}(D\leq t)=0$
   Conclusion : $\boxed{\forall t\in\,]-\infty;0[\,,\ F_D(t)=0}$
   et de même
   pour $n\in\mathbb{N}$, et pour $Y=n\geq 1 : Y\leq X<Y+1$ donc $D=X-Y<1$
   et pour $Y=0$ on a $X<1$ donc $D=X-Y<1$
   Donc $(D<1)$ est certain et pour tout $t\geq 1$: $\mathrm{P}(D<t)=1$
   Conclusion : $\boxed{\forall t\in[1;+\infty[\,,\ F_D(t)=1.}$

   b) Soit $t\in[0;1[$. L'événement $(D\leq t)$ est à déterminer suivant la valeur de Y :

$$\begin{aligned}
(D\leq t) &= \bigcup_{n=1}^{+\infty}(Y=n\cap X-Y\leq t)\cup(X\leq t) \\
&= \bigcup_{n=1}^{+\infty}(Y=n\cap X-n\leq t)\cup(X\leq t) \\
&= \bigcup_{n=1}^{+\infty}(n\leq X<n+1\cap X\leq n+t)\cup(X\leq t) \\
&= \bigcup_{n=0}^{+\infty}(n\leq X\leq n+t)\cup(X<0)
\end{aligned}$$

   et comme $(X<0)$ est de probabilité nul
   Conclusion : $\boxed{(D\leq t) \text{ est presque égal à } \bigcup_{n=0}^{+\infty}(n\leq X\leq n+t)}$

   c) Pour tout nombre réel $t\in[0;1[$ et pour tout nombre entier naturel n, comme $0\leq n\leq n+t$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(n\leq X\leq n+t) &= \int_n^{n+t}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_n^{n+t} \\
&= -e^{-n-t}+e^{-n}=e^{-n}\left(1-e^{-t}\right)
\end{aligned}$$

d) Comme les événements de la réunion sont incompatibles,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(D \leq t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(n \leq X \leq n+t) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}\left(1-e^{-t}\right) \\
&= \left(1-e^{-t}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-1}\right)^n \\
&= \left(1-e^{-t}\right) \frac{1}{1-e^{-1}} \text{ car } \left|e^{-1}\right| < 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall t \in [0;1[\,,\ F_D(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}}}$

e) F_D est une fonction de répartition.
On vérifie les critère pour être celle d'une variable à densité :
F_D est continue sur $]-\infty;0[$, sur $[0,1[$ et sur $[1;+\infty[$ (fonction usuelles)
En 0^- :pour $t<0$: $F_D(t) = 0 \to 0$ et $F(0) = \dfrac{1-e^{-0}}{1-e^{-1}} = 0$ donc F_D est continue en 0^-
En 1^- :pour $t \in [0;1[$: $F_D(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}} \to \dfrac{1-e^{-1}}{1-e^{-1}} = 1$ et $F_D(1) = 1$ donc F_D est continue en 1^-.
Conclusion : $\boxed{F_D \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \text{ donc } D \text{ est à densité}}$
une densité de D est $F'_D(t)$ là où F_D est dérivable.

Conclusion : $\boxed{\text{Une densité de } D \text{ est donnée par } g(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-1}} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$