

Exercice 1

On étudie dans cet exercice les deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = M\}.$$

Partie I

1. On peut décomposer toute matrice de F comme combinaison linéaire de deux matrices fixées :

$$F = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Ceci prouve que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, comme sous-espace engendré par deux matrices carrées d'ordre 3 à coefficients constants, qui forment ainsi une famille génératrice de F .

Comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires, elles forment une famille libre, donc une base de F .

2. Contrairement à F , on n'a pas de forme explicite des matrices de G . On voit facilement que $M = I$ appartient à G , puisque $I^2 = I$; $N = I$ appartient aussi à G , et $M + N = 2I$ n'appartient pas à G , puisque : $(M + N)^2 = (2I)^2 = 4I \neq M + N$.

L'ensemble G n'est donc pas stable par somme : ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) La matrice A a bien la forme des éléments de F avec $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$.

On calcule alors le carré de A :

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4+1+1 & -2-2+1 & -2+1-2 \\ -2-2+1 & 1+4+1 & 1-2-2 \\ -2+1-2 & 1-2-2 & 1+1+4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A, \end{aligned}$$

donc A appartient bien à la fois à F et à G , donc à $F \cap G$.

b) La relation $A^2 = A$ s'écrit aussi $A^2 - A = 0$, donc $P(X) = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de A .

c) Les valeurs propres de A sont donc *parmi* les racines de $P(X) = X^2 - X = X(X - 1)$:

$$\text{Sp}(A) \subset \{0; 1\}.$$

On vérifie alors si les deux seules valeurs propres possibles de A , le sont effectivement :

- Pour $\lambda = 0$, on résout le système d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} AX = 0_{3,1} &\iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y - 3z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ -3y + 3z = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = z \\ 2x = y + z = 2z \iff x = z \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble-solution est $E_0(A) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$: il est infini, donc 0

est bien valeur propre de A et le sous-espace propre associé $E_0(A)$ est de dimension 1, car engendré par un seul vecteur non-nul qui en constitue ainsi une base.

- Pour $\lambda = 1$, on résout le système $AX = X \iff (A - I)X = 0_{3,1}$, soit :

$$\begin{aligned} (A - I)X = 0_{3,1} &\iff \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x - y - z = 0 \\ &\iff x = -y - z \end{aligned}$$

L'ensemble-solution est $E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$: il

est infini, donc 1 est bien valeur propre de A et le sous-espace propre associé $E_1(A)$ est de dimension 2, car engendré par deux vecteurs non-colinéaires qui en constituent ainsi une base.

d) Puisque 0 est valeur propre de A , alors A n'est pas inversible. On vient par ailleurs de voir que A , matrice carrée d'ordre 3, possède deux valeurs propres avec $\dim E_0(A) + \dim E_1(A) = 1 + 2 = 3$, donc A est diagonalisable.

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

5. a) Par produit matriciel : $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 2b^2 & b^2 + 2ab & b^2 + 2ab \\ b^2 + 2ab & a^2 + 2b^2 & b^2 + 2ab \\ b^2 + 2ab & b^2 + 2ab & a^2 + 2b^2 \end{pmatrix}$; comme M appartient à G si et

seulement si $M^2 = M$, alors par identification des coefficients :

$$M \in G \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b^2 + 2ab = b \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$$

b) on résout alors le système non-linéaire précédent : il permet de trouver toutes les matrices de F qui appartiennent aussi à G , donc de déterminer l'intersection $F \cap G$.

D'après la règle du produit nul :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 0 \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} b = 0 \\ a^2 = a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} b = 1 - 2a \\ a^2 + 2(1 - 2a)^2 = a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = 0 \\ a(a - 1) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} b = 1 - 2a \\ 9a^2 - 9a + 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dans le premier des deux sous-systèmes obtenus, on a donc $b = 0$ et $a = 0$ ou $a = 1$, ce qui donne

les solutions $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Dans le deuxième sous-système, on résout l'équation du second degré $9a^2 - 9a + 2 = 0$: son discriminant est $\Delta = 9^2 - 4 \times 9 \times 2 = 81 - 72 = 9 > 0$, il y a donc deux racines $a_1 = \frac{9-3}{2 \times 9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

et $a_2 = \frac{9+3}{2 \times 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Les valeurs correspondantes de b sont respectivement $b_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, ce qui donne

la matrice $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui correspond en fait à $I_3 - A$,

et $b_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ qui donne la matrice $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A$.

L'ensemble $F \cap G$ contient donc 4 éléments : $F \cap G = \{0_3, I_3, A, I_3 - A\}$.

6. On note $B = I_3 - A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les matrices A et B appartiennent bien à F : comme il s'agit d'un sous-espace vectoriel de dimension 2, il suffit de démontrer que (A, B) est une famille libre pour que ce soit une base de F . Or c'est bien le cas puisque les matrices A et B sont non-colinéaires.

7. a) **Il y a un gros problème dans cet énoncé : les valeurs indiquées de α et β sont fausses !**
On le démontre d'ailleurs en cherchant les deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta B$:

$$M = \alpha A + \beta B \iff \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & -\alpha + \beta & -\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta & 2\alpha + \beta & -\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta & -\alpha + \beta & 2\alpha + \beta \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = (2\alpha + \beta)/3 \\ b = (-\alpha + \beta)/3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3a \\ \alpha - \beta = -3b \end{cases} \iff \begin{cases} 3\alpha = 3a - 3b \\ \alpha - \beta = -3b \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = a - b \\ \beta = \alpha + 3b = a + 2b \end{cases}$$

C'est donc avec $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$ que l'énoncé aurait dû nous demander de travailler.

b) Les calculs matriciels donnent :

$$AB = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2-1-1 & 2-1-1 & 2-1-1 \\ -1+2-1 & -1+2-1 & -1+2-1 \\ -1-1+2 & -1-1+2 & -1-1+2 \end{pmatrix} = 0_3,$$

et on vérifie qu'on a aussi $BA = 0_3$.

c) Il y a en fait deux façons possibles de rédiger cette question :

- On peut raisonner par récurrence, en montrant que la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$ ", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I. Pour $n = 0$: $\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = A + I_3 - A = I_3 = M^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

H. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie, soit : $M^{n+1} = \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B$.

On écrit :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (\alpha^n A + \beta^n B) \times (\alpha A + \beta B) \\ &= \alpha^{n+1} A^2 + \alpha^n \beta AB + \alpha \beta^n BA + \beta^{n+1} B^2 \quad \text{en développant} \\ &= \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B \end{aligned}$$

En effet : A et $B = I_3 - A$ appartiennent à G d'après 4.b), donc $A^2 = A$ et $B^2 = B$, et d'autre part $AB = BA = 0_3$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

C. La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

- On peut aussi réaliser un calcul direct, grâce à la formule du binôme de Newton : on peut effectivement l'utiliser, car A et B commutent d'après 6.b) : $AB = BA (= 0_3)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$M^n = (\alpha A + \beta B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha A)^k \times (\beta B)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} A^k B^{n-k}.$$

Dans cette somme : puisque A et B appartiennent à G , alors $A^2 = A$ et $B^2 = B$, donc par récurrence immédiate, $A^k = A$ pour tout $k \geq 1$ et de même, $B^k = B$ pour tout $k \geq 1$, de sorte que : pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $A^k B^{n-k} = AB = 0_3$ puisque k et $n-k$ sont alors strictement positifs.

Dans la somme précédente, tous les termes d'indices k compris entre 1 et $n-1$ sont donc nuls, de sorte que :

$$M^n = \binom{n}{n} \alpha^n \beta^0 A^n B^0 + \binom{n}{0} \alpha^0 \beta^n A^0 B^n = \alpha^n A + \beta^n B,$$

formule dont on vérifie comme à l'initialisation de la récurrence précédente, qu'elle est encore vraie pour $n = 0$.

8. a) Là encore, il y a plusieurs façons possibles de rédiger cette question : on en présente ici une "maligne", qui consiste à ... lire la question suivante pour comprendre sous quelle forme on doit chercher l'inverse de M s'il existe !

- Remarquons d'abord que si $\alpha = 0 \iff a - b = 0 \iff a = b$, alors $M = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ est clairement non-inversible, puisque ses trois lignes sont égales.

Si $\beta = 0 \iff a + 2b = 0 \iff a = -2b$, alors $M = \begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix} = 3b \cdot A$, donc M n'est dans ce cas pas inversible puisqu'on a vu que A ne l'était pas à la question 3.d).
Bref, si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, alors M n'est pas inversible, ce qui donne par contraposée :

$$M \text{ est inversible} \implies \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0.$$

- Réciproquement, si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors un coup d'œil à la question suivante nous incite à poser le calcul, bien défini :

$$\begin{aligned} M \times \left(\frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B\right) &= \left(\alpha A + \beta B\right) \times \left(\frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B\right) = \frac{\alpha}{\alpha}A^2 + \frac{\alpha}{\beta}AB + \frac{\beta}{\alpha}BA + \frac{\beta}{\beta}B^2 \\ &= A^2 + 0_3 + 0_3 + B^2 = A + B = A + I_3 - A = I_3, \end{aligned}$$

toujours du fait que $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA = 0_3$. Ce calcul prouve donc de façon indubitable que si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors M est inversible, puisqu'on peut définir son inverse $M^{-1} = \frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B$.

On a donc bien prouvé par double implication, l'équivalence :

$$M \text{ est inversible} \iff \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0.$$

- b) Si α et β sont deux réels non-nuls, alors on peut définir la matrice $\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B$, et d'après 6.c) :

$$\begin{aligned} M^n \times (\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B) &= (\alpha^n A + \beta^n B) \times (\alpha^{-n}A + \beta^{-n}B) \\ &= \alpha^{n-n}A^2 + \alpha^n \beta^{-n}AB + \beta^n \alpha^{-n}BA + \beta^{n-n}B^2 \\ &= A^2 + 0_3 + 0_3 + B^2 = A + B = A + I_3 - A = I_3, \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que l'inverse de M^n , noté M^{-n} , est $M^{-n} = \alpha^{-n}A + \beta^{-n}B$.

Partie III

Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définies par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = TX_n + Y.$$

8. On a $I_3 - T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, qui est de la forme de la matrice M de la question 6., avec $a = -2$ et $b = -1$.

D'après 6.a) (avec les bonnes valeurs de α et β !), cette matrice s'écrit $\alpha A + \beta B$ avec $\alpha = a - b = -1$ et $\beta = a + 2b = -4$, soit :

$$I_3 - T = -A - 4B.$$

9. Le résultat de la question 7. s'applique donc avec ces valeurs de α et β : comme elles sont toutes deux non nulles, $I_3 - T$ est bien inversible, d'inverse :

$$(I_3 - T)^{-1} = \alpha^{-1}A + \beta^{-1}B = -A - \frac{1}{4}B.$$

10. On cherche ici les matrices colonnes L telles que :

$$L = TL + Y \iff L - TL = Y \iff (I_3 - T)L = Y.$$

Comme $I_3 - T$ est inversible, cette équation possède une unique solution : $L = (I_3 - T)^{-1}Y$.

11. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} X_{n+1} = TX_n + Y \\ L = TL + Y \end{cases},$$
 donc en soustrayant membre à membre ces deux égalités, on obtient :

$$X_{n+1} - L = TX_n - TL \iff X_{n+1} - L = T(X_n - L).$$

Une récurrence très facile à rédiger prouve alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n - L = T^n(X_0 - L)$.

12. De tous les résultats précédents, on déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = T^n(X_0 - L) + L$,
où $T = \alpha'A + \beta'B$ avec $\alpha' = 3 - 1 = 2$ et $\beta' = 3 + 2 = 5$, soit $T = 2A + 5B$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = (2A + 5B)^n(X_0 - L) + L = (2^n A + 5^n B)(X_0 - L) + L.$$

Exercice 2

Pour tout réel $x > 0$, on pose : $g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)$.

Partie I : Étude de la fonction g

1. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 - \frac{1}{x} = -\infty$; de plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$,

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) = +\infty$. Comme $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$, alors par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x).$$

Pour tout $x > 0$: $\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) = 2 \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}$, où $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x) = +\infty$. Par composition avec $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$, on conclut que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x).$$

2. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall x > 0$, $h(x) = \ln(x) + 2x - 1$.

a) La fonction h est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de fonctions qui le sont, avec :

$$\forall x > 0, \quad h'(x) = \frac{1}{x} + 2$$

Il est donc clair que pour tout $x > 0$, $h'(x) > 0$ et donc que h est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

b) On rajoute les calculs de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - 1 = -1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$.

La fonction h est donc continue (car dérivable), strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , d'intervalle-image $]-\infty; +\infty[$ qui contient 0 : d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(x) = 0$ admet donc une unique solution α dans \mathbb{R}_+^* .

Comme par ailleurs : $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \times \frac{1}{2} - 1 = -\ln(2) < 0$ et $h(1) = \ln(1) + 2 - 1 = 1 > 0$, alors :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) = 0 < h(1) \iff \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

par stricte croissance de h sur \mathbb{R}_+^* .

c) La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme composée de fonctions qui le sont. On reconnaît une forme e^u qui a pour dérivée $u' \cdot e^u$, donc :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \left(\frac{1}{x^2} \ln(x) + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \right) \cdot \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = \frac{\ln(x) + 2x - 1}{x^2} \cdot g(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x).$$

d) Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$ et $g(x) > 0$ puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $h(x)$. On en déduit le tableau de variations de g :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
g	$+\infty$	$g(\alpha)$	$+\infty$

3. En développant dans l'exponentielle, on peut écrire :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \exp\left(2 \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right) = e^{2 \ln(x)} \times e^{-\frac{\ln(x)}{x}} = x^2 e^{-\frac{\ln(x)}{x}},$$

donc : $g(x) - x^2 = x^2 \left(e^{-\frac{\ln(x)}{x}} - 1\right)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc l'équivalent classique $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ donne :

$$e^{-\frac{\ln(x)}{x}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}, \text{ et } x^2 \left(e^{-\frac{\ln(x)}{x}} - 1\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2 \cdot \frac{\ln(x)}{x} \iff g(x) - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x \ln(x).$$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

4. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: " u_n existe et $u_n > 0$ ", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I. L'énoncé définit $u_0 > 0$ (sans donner sa valeur), donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

H. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Puisque (H.R.) $u_n > 0$, alors $u_n \in \mathcal{D}_g$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien défini.

Comme on l'a vu par ailleurs : $\forall x > 0, g(x) > 0$ (c'est une exponentielle), donc $u_{n+1} = g(u_n) > 0$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

C. La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

5. Le script **Scilab** demandé est classique : le fait de demander la matrice-ligne de tous les termes $[u_0, u_1, \dots, u_n]$ demande un peu plus d'efforts que le simple calcul du terme de rang n . On propose ici deux méthodes possibles, qui aboutissent au même résultats.

```

1  function U = u(n,u0)
2      y = u0; U = [u0]
3      for i = 1:n
4          y = exp((2-1/y)*log(y)) // calcul d'un nouveau terme de la suite
5          U = [U,y] \\ ce nouveau terme est immédiatement intégré au tableau
6      end
7  endfunction

```

Dans ce script, le vecteur U grossit d'un nouveau terme placé à la fin, à chaque tour de boucle. On peut aussi fixer dès le départ la taille du vecteur et le remplir petit à petit :

```

1  function U = u(n, u_0)
2      U = zeros(1, n+1); U(1) = u0 // décalage d'indice à gérer.
3      for i = 1:n
4          U(i+1) = exp((2-1/U(i))*log(U(i)))
5      end
6  endfunction

```

6. a) On demande ici le signe d'un produit : on sait que $\ln(x) > 0 \iff x > 1 \iff x - 1 > 0$, donc $(x - 1)$ et $\ln(x)$ sont deux facteurs toujours de même signe sur \mathbb{R}_+^* , ce qui garantit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x - 1) \ln(x) \geq 0, \text{ avec égalité si et seulement si } x = 1$$

b) Pour tout $x > 0$:

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)}{e^{\ln(x)}} = \exp\left(2 \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x} - \ln(x)\right) = \exp\left(\ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = \exp\left(\frac{(x - 1) \ln(x)}{x}\right)$$

On a vu que : $\forall x > 0, (x - 1) \ln(x) \geq 0$, donc $\frac{(x - 1) \ln(x)}{x} \geq 0$; ce qui implique :

$$\exp\left(\frac{(x - 1) \ln(x)}{x}\right) \geq e^0 \iff \frac{g(x)}{x} \geq 1, \text{ par stricte croissance de l'exponentielle sur } \mathbb{R}.$$

c) Pour tout $x > 0, \frac{g(x)}{x} \geq 1 \iff g(x) \geq x$, et l'égalité $g(x) = x \iff \frac{g(x)}{x} = 1$ est vraie si et seulement si $\frac{(x - 1) \ln(x)}{x} = 0 \iff (x - 1) \ln(x) = 0 \iff x = 1$ d'après la question précédente.

7. On sait d'après 4. que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ donc d'après 6.c) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(u_n) \geq u_n \iff u_{n+1} \geq u_n,$$

puisqu'on a pu remplacer x par u_n . La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

8. Dans cette question uniquement, on supposait $u_0 \in [\frac{1}{2}; 1]$.

a) On démontre par récurrence que la propriété $\mathcal{Q}(n)$: " $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ ", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I. L'hypothèse faite dans cette question assure que $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

H. Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons alors que $\mathcal{Q}(n + 1)$ est encore vraie :

On a supposé (H.R.) que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$: d'après 6.c), on a alors $g(u_n) \geq u_n \geq \frac{1}{2} \implies u_{n+1} \geq \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, puisque $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, alors par stricte décroissance de l'inverse sur \mathbb{R}_+^* :

$$2 \geq \frac{1}{u_n} \geq 1 \implies 2 - \frac{1}{u_n} \geq 0,$$

tandis que par stricte croissance de \ln sur \mathbb{R}_+^* , $\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(u_n) \leq \ln(1) \implies \ln(u_n) \leq 0$.

$$\text{Ainsi, } \left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \ln(u_n) \leq 0 \implies \exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \ln(u_n)\right) \leq 1 \implies u_{n+1} = g(u_n) \leq 1,$$

donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$, et $\mathcal{Q}(n + 1)$ est vraie si $\mathcal{Q}(n)$ l'est.

C. La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

b) On sait d'après 7. que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et on vient de démontrer qu'elle est majorée par 1, donc elle converge d'après le théorème de limite monotone, vers une limite $\ell \in [\frac{1}{2}; 1]$.

On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$, et comme g est continue sur \mathbb{R}_+^* , $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = g(\ell)$, donc par unicité de la limite : $g(\ell) = \ell$. Or on a vu en 6.c) que $x = 1$ est la seule solution de l'équation $g(x) = 1$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

9. Dans cette question, on supposait que $u_0 > 1$.

a) On démontre encore par récurrence, que la propriété $\mathcal{R}(n)$: " $u_n > 1$ ", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I. L'énoncé suppose $u_0 > 1$, donc $\mathcal{R}(0)$ est vraie.

H. Supposons $\mathcal{R}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'alors $\mathcal{R}(n+1)$ est encore vraie :

On a supposé (H.R.) que $u_n > 1$; or g est strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$, donc sur $[1; +\infty[$ puisque $\alpha < 1$.

Ainsi donc : $g(u_n) > g(1) \iff u_{n+1} > e^{(2-1)\ln(1)} = e^0 = 1$, donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{R}(n)$ l'est.

C. La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le principe de récurrence.

b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est toujours croissante (cette propriété ne dépend pas de la valeur de u_0). Si elle était majorée, elle convergerait vers un réel ℓ qui, selon le même raisonnement qu'à la question 8., doit vérifier $g(\ell) = \ell$. Or on a vu que seul $\ell = 1$ convient, ce qui est une limite impossible pour une suite croissante qui commence à $u_0 > 1$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et non majorée : d'après le théorème de limite montone, elle diverge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

10. Dans cette question, on supposait que $0 < u_0 < \frac{1}{2}$.

La fonction g étant strictement décroissante sur $]0; \frac{1}{2}]$ puisque $\frac{1}{2} < \alpha$,

on a alors : $g(u_0) > g(\frac{1}{2}) \iff u_1 > 1$.

On est donc ramené, à un décalage d'indice près, à la situation de la question 9., et on conclut que dans ce cas, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge encore vers $+\infty$.

Partie III : Extrema de la fonction f

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note : $f(x, y) = x^{y-\frac{1}{x}} = \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)$.

11. Cette question purement rédactionnelle, est pour le coup très rarement correctement rédigée, alors qu'elle doit suivre un schéma précis que voici :

- Sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, les fonctions coordonnées $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$ sont de classe \mathcal{C}^2 car polynômiales en x et y , à valeurs respectivement dans \mathbb{R}_+^* et dans \mathbb{R} .
- La fonction \ln est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* , de même que la fonction inverse (notons-la i). La fonction \exp est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , donc :

la fonction $f = \exp\left((p_2 - i \circ p_1) \times \ln \circ p_1\right)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ comme différence, produit et composée de fonctions de classe \mathcal{C}^2 .

12. Puisque f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on peut calculer sur cet ouvert ses dérivées partielles à l'ordre 1 : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\partial_1(f)(x, y) = \left(\frac{1}{x^2} \ln(x) + \left(y - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} \cdot f(x, y)$$

$$\partial_2(f)(x, y) = \ln(x) \cdot \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = \ln(x) f(x, y)$$

On a utilisé dans les deux cas la formule de dérivation $(e^u)' = u' \cdot e^u$, en dérivant u par rapport à x dans le premier cas, par rapport à y dans le second.

13. Comme pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $f(x, y)$ est une exponentielle, cette expression ne s'annule jamais, donc lorsqu'on recherche les points critiques de f , le système à résoudre se réduit à :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x) + xy - 1 = 0 \\ \ln(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y - 1 = 0 \iff y = 1 \end{cases}$$

On conclut donc que la fonction f admet un unique point critique, à savoir $a = (1, 1)$.

14. Calcul des dérivées partielles d'ordre 2 : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}^2(f)(x, y) &= \frac{\left(\frac{1}{x} + y\right) \cdot x^2 - (\ln(x) + xy - 1) \cdot 2x}{x^4} \cdot f(x, y) + \left(\frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2}\right)^2 \cdot f(x, y) \\ &= \frac{x + x^2y - 2x \ln(x) + 2x^2y - 2x + (\ln(x) + xy - 1)^2}{x^4} \cdot f(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{1,2}^2(f)(x, y) &= \frac{x}{x^2} \cdot f(x, y) + \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} \cdot \ln(x) f(x, y) \\ &= \frac{x + \ln(x)(\ln(x) + xy - 1)}{x^2} \cdot f(x, y) = \partial_{2,1}^2(f)(x, y) \quad (\text{théorème de Schwarz}) \end{aligned}$$

$$\partial_{2,2}^2(f)(x, y) = \ln(x) \cdot \ln(x) f(x, y) = (\ln(x))^2 f(x, y)$$

Par conséquent, au seul point critique $a = (1, 1)$, les dérivées partielles d'ordre deux prennent les valeurs suivantes :

$$\partial_{1,1}^2(f)(1, 1) = \frac{1 + 1 - 0 + 2 - 2 + (0 + 1 - 1)^2}{1^4} \cdot f(1, 1) = 2 \cdot e^0 = 2$$

$$\partial_{1,2}^2(f)(1, 1) = \frac{1 + 0 \cdot (0 + 1 - 1)}{1} \cdot e^0 = 1 = \partial_{2,1}^2(f)(x, y)$$

$$\partial_{2,2}^2(f)(1, 1) = (\ln(1))^2 \cdot f(1, 1) = 0$$

La Hessienne de f au seul point critique $a = (1, 1)$, est donc bien $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. On étudie les valeurs propres de la Hessienne H : ce sont les réels λ tels que $H - \lambda \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ est non-inversible.

Avec le critère du déterminant au programme de ECE pour les matrices carrées d'ordre 2, on obtient l'équivalence :

$$\lambda \in \text{Sp}(H) \iff \det(H - \lambda \cdot I_2) = 0 \iff (2 - \lambda) \cdot (-\lambda) - 1 = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$, donc elle admet deux racines, qui sont les deux valeurs propres de H : $\lambda_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Il est alors clair que $\lambda_2 > 0$; comme $2 > 1$, alors $\sqrt{2} > 1$ et $\lambda_1 < 0$.

Les deux valeurs propres de H sont donc de signes opposés : on en déduit qu'au point $a = (1, 1)$, la fonction f n'admet pas d'extrémum local, mais un point-col.

16. Comme $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 : si f admettait un extrémum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, alors ce serait aussi un extrémum local. Et comme f est de classe \mathcal{C}^2 , cet extrémum local serait un point critique. Or en son seul point critique, f n'admet pas d'extrémum local : on en conclut que f n'admet pas d'extrémum global non plus.

Exercice 3

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) En se plaçant du point de vue de l'urne 1 : chaque placement de jeton dans une des trois urnes peut être vu comme une épreuve de Bernoulli où le succès correspond au fait de placer le jeton dans l'urne 1.

On répète cette épreuve n fois de suite de façon identique et indépendante par rapport aux autres épreuves, et X_n compte le nombre de succès - lequel est de probabilité $\frac{1}{3}$ - obtenus en n épreuves.

On en conclut donc que X_n suit la loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{3})$. Des considérations en tout point analogues permettent d'affirmer que Y_n et Z_n suivent la même loi que X_n .

- b) La formule générale de la loi binomiale : $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$, donne en particulier :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \text{ et } \mathbb{P}(X_n = n) = \binom{n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

- c) L'événement $[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]$ signifie qu'après n jetons placés, les urnes 2 et 3 n'en contiennent aucun : c'est donc qu'ils sont tous allés dans l'urne 1, et on a bien l'égalité d'événements :

$$[Y_n = 0] \cap [Z_n = 0] = [X_n = n].$$

- d) L'événement V_n est réalisé si et seulement si, après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide, donc si et seulement si au moins un des trois événements $[X_n = 0]$, $[Y_n = 0]$ ou $[Z_n = 0]$ est réalisé :

$$V_n = [X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0].$$

- e) L'union est non-disjointe, donc $\mathbb{P}(V_n)$ se calcule avec la formule du crible :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_n) &= \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(Y_n = 0) + \mathbb{P}(Z_n = 0) - \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]) \\ &\quad - \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Z_n = 0]) - \mathbb{P}([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) \\ &\quad + \mathbb{P}([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(Y_n = 0) + \mathbb{P}(Z_n = 0) - \mathbb{P}(Z_n = n) - \mathbb{P}(Y_n = n) - \mathbb{P}(X_n = n) + 0 \\ &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n, \end{aligned}$$

il est en effet impossible qu'après n jetons placés, les trois urnes soient encore toutes vides !

2. L'événement V est réalisé si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement V_n est toujours réalisé, ce qui conduit donc à écrire :

$$V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.$$

Or si l'une des trois urnes est encore vide après $n + 1$ jetons placés, elle était déjà vide après n jetons seulement : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, V_{n+1} implique V_n , donc $V_{n+1} \subset V_n$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion.

La propriété de limite monotone pour les probabilités s'applique donc, qui assure que :

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 - 0 = 0,$$

puisque $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$.

Il est donc quasi-impossible que l'une des trois urnes reste vide indéfiniment.

3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

a) La fonction **Scilab** ci-dessous simule l'expérience aléatoire étudiée : la variable **liste** est une matrice-ligne dont les trois éléments représentent le nombre de jetons placés dans chacune des trois urnes, respectivement notés X,Y et Z dans le script.

La variable **i** prend une valeur choisie au hasard parmi les trois entiers 1,2,3 : cela correspond à l'indice de l'élément de **liste** qui va être augmenté d'une unité pour matérialiser le fait qu'un nouveau jeton a été placé dans l'urne qui porte le numéro pris par **i**.

```
1  function t = T()
2      X = 0
3      Y = 0
4      Z = 0
5      n = 0
6      liste = [X,Y,Z]
7      while min(liste) == 0
8          i = grand(1,1,'uin',1,3) // choix d'un nombre entier entre 1 et 3
9          liste(i) = liste(i)+1
10         n = n+1
11     end
12     t = n
13 endfunction
```

Remarquons que puisque la boucle ne prévoit pas d'actualiser les valeurs des variables X,Y et Z, leur définition n'a pas grand intérêt, et il suffirait de remplacer les trois premières lignes par : `liste = zeros(1,3)`.

La condition de poursuite de la boucle **while** est bien que l'un au moins des trois éléments de **liste** soit nul : comme sinon ces éléments sont des entiers strictement positifs, c'est bien équivalent au fait que le plus petit élément de la liste soit égal à 0 (et il peut y avoir plusieurs éléments de la liste dans cette situation). Pas forcément évident à imaginer !

b) Le script suivant appelle 1000 fois la fonction précédente et ajoute la valeur obtenue à chaque nouvelle simulation, à une variable **S** qui représente in fine la somme des valeurs prises par T sur 1000 simulations de l'expérience : en divisant par 1000, on obtient la moyenne empirique de T qui constituera une valeur approchée de l'espérance $E(T)$ (dont on prouve un peu plus loin qu'elle existe bien).

```
1  S = 0
2  for i = 1:1000
3      S = S + T()
4  end
5  disp(S/1000)
```

Plusieurs exécutions du script font sortir des valeurs oscillant autour de 5,5.

4. Il faut bien sûr placer au moins 3 jetons différents pour avoir une chance que chacune des 3 urnes contienne au moins un jeton ; le nombre de placement peut être envisagé aussi grand qu'on veut puisqu'on peut imaginer que les jetons ne vont que dans deux des trois urnes (ou même tous dans

la même urne) aussi longtemps qu'on veut. On a vu par contre qu'il était presque impossible de ne jamais parvenir à terminer les placements selon la règle du jeu, donc :

$$T(\Omega) = \llbracket 3; +\infty \rrbracket.$$

5. Soit donc $n \geq 3$: l'événement $[T = n]$ est réalisé si et seulement si après n placement, plus aucune urne n'est vide, alors qu'après $(n - 1)$ placements seulement, au moins une des trois urnes (et en fait exactement une) était encore vide, donc :

$$[T = n] = V_{n-1} \cap \overline{V_n} \text{ ou } V_{n-1} \setminus V_n.$$

Le passage à la probabilité donne alors :

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_{n-1} \cap V_n) = \mathbb{P}(V_{n-1}) - \mathbb{P}(V_n),$$

puisqu'on a vu à la question 2. que $V_n \subset V_{n-1}$, et donc que $V_{n-1} \cap V_n = V_n$.

6. Le calcul explicite donne, à l'aide de la formule précédente et du résultat de la question 1.e) : pour tout entier $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = n) &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(3 - 3 \times \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(-3 + 3 \times \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

La variable aléatoire discrète T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 3} k\mathbb{P}(T = k)$ est absolument convergente. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, la convergence simple suffit. Pour tout entier $n \geq 3$:

$$\sum_{k=3}^n k\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=3}^n k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\sum_{k=3}^n k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

On reconnaît deux séries géométriques dérivées, convergentes puisque $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$: la série de départ est convergente, et T admet donc une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{k=3}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2\sum_{k=3}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 1 - 2 \cdot \frac{2}{3} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + 2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1 - \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} + 2 + \frac{4}{3} = 9 - 1 - 2 \cdot \frac{9}{4} + 2 = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

On retrouve bien une espérance théorique $E(T) = \frac{11}{2} = 5,5$ cohérente avec la moyenne empirique obtenue par simulation.

Partie II

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

7. a) Après avoir placé deux jetons, il peut rester une ou deux urnes encore vide : $W_2(\Omega) = \{1, 2\}$. Comme $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, on remplit le tableau de la loi conjointe suivant :

$X_2 \setminus W_2$	1	2
0	2/9	2/9
1	4/9	0
2	0	1/9

Justification des calculs :

- $\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1])$ est la probabilité que les urnes 2 et 3 aient reçu chacune un jeton (on fait 2 placements en tout) : soit le 1er jeton est allé dans l'urne 2 puis le 2ème est allé dans l'urne 3, soit le contraire, donc par indépendance des placements :

$$\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1]) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

- $\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 2])$ est la probabilité que les 2 premiers jetons aient tous deux été placés dans l'urne 2, ou tous deux dans l'urne 3 :

$$\mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 2]) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

- $\mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1])$ est la probabilité que l'un des deux premiers jetons soit mis dans l'urne 1, l'autre étant mis dans l'urne 2 ou dans l'urne 3; avec deux ordres possibles, on a cette fois

$$\mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1]) = 2 \times 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

- $\mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 2]) = 0$: il est impossible que l'urne 1 contienne 1 jeton seulement et que deux urnes restent vides après 2 placements.
- $\mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]) = 0$: si l'urne 1 a reçu les deux jetons, il y a deux urnes vides et non pas une seule après 2 placements.
- $\mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^2$: c'est la probabilité que les deux jetons aient été placés dans l'urne 1.

b) La loi marginale de W_2 se déduit de la loi conjointe, cela correspond à l'utilisation de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X_2 :

$$\mathbb{P}(W_2 = 1) = \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 1]) = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} + 0 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{P}(W_2 = 2) = \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [W_2 = 2]) + \mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 2]) + \mathbb{P}([X_2 = 2] \cap [W_2 = 2]) = \frac{2}{9} + 0 + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

La variable aléatoire finie W_2 admet une espérance qui vaut :

$$E(W_2) = 1 \cdot \mathbb{P}(W_2 = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(W_2 = 2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

c) Le tableau de la loi conjointe permet de calculer :

$$E(X_2 W_2) = \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^2 k j \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [W_2 = j]) = 0 + 0 + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{9},$$

donc d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\text{Cov}(X_2, W_2) = E(X_2 W_2) - E(X_2)E(W_2) = \frac{8}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = 0.$$

d) Les zéros dans le tableau de la loi conjointe fournissent des contre-exemples simples pour prouver que X_2 et W_2 ne sont pas indépendantes (bien que non-corrélées d'après la question précédente) :

on sait par exemple que $\mathbb{P}([X_2 = 1] \cap [W_2 = 2]) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X_2 = 1) \times \mathbb{P}(W_2 = 2) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} \neq 0$.

8. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

Après n placements, une urne au moins a reçu des jetons, et on a donc au maximum deux urnes vides (cas où les n jetons sont tous allés dans la même urne) ; on peut avoir encore une urne vide, ou aucune urne vide, soit :

$$W_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

9. Pour $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après n placements, et qui vaut 0 sinon.

a) La variable aléatoire $W_{n,i}$ est donc une variable de Bernoulli dont le paramètre est la probabilité $\mathbb{P}(W_{n,i} = 1)$ que l'urne i soit encore vide après n placements : cela signifie que chacun des n premiers jetons a été placé dans une des deux autres urnes de l'expérience. Comme les placements sont indépendants : $\mathbb{P}(W_{n,i} = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, qui est aussi la valeur de l'espérance $E(W_{n,i})$ de cette variable de Bernoulli.

b) Il est clair que $W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$: chaque urne encore vide après n placements contribue d'une unité au nombre total d'urnes vides, et n'augmente pas ce nombre sinon.

c) Par linéarité de l'espérance, on a donc :

$$E(W_n) = E(W_{n,1}) + E(W_{n,2}) + E(W_{n,3}) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

10. L'événement $[X_n = n] \cap [W_n = 2]$ signifie que les n premiers jetons ont été placés dans l'urne 1, et qu'après n placements deux urnes restent vides : le premier événement implique le second, donc :

$$\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) = \mathbb{P}(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

comme on l'a vu à la question 1.b).

Par contre, si $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, l'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 2]$ est impossible : cela signifierait qu'une partie seulement, ni vide ni totale, des jetons a été placée dans l'urne 1 et que pour autant les deux autres urnes sont vides. Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2]) = 0.$$

11. Pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$: l'événement $[X_n = k] \cap [W_n = 1]$ signifie que l'urne 1 a reçu k jetons, et une des deux autres urnes a reçu les $n-k$ autres jetons.

Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k jetons qui vont aller dans l'urne 1, les autres allant forcément tous dans la même autre urne. Il y a ensuite 2 façons différentes de choisir celle des deux autres urnes 2 ou 3 qui va recevoir tous les $(n-k)$ jetons restants. Par équiprobabilité et indépendance des choix de placements des n jetons, il y a 3^n répartitions possibles a priori, donc on a bien :

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) = \frac{2 \binom{n}{k}}{3^n}.$$

L'événement $[X_n = n] \cap [W_n = 1]$ est impossible : il signifierait que les n premiers jetons ont tous été placés dans l'urne 1, il y a donc 2 urnes encore vides après n placements, et non pas une seule. Ainsi, $\mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 1]) = 0$.

12. Par définition de la covariance du couple (X_n, W_n) , bien définie car les deux variables aléatoires sont finies :

$$\begin{aligned} E(X_n W_n) &= \sum_{(k,j) \in (X_n, W_n)(\Omega)} k j \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = j]) = \sum_{j=\emptyset}^2 \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = j]) \\ &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) + \sum_{k=0}^n 2k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 2]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}([X_n = k] \cap [W_n = 1]) + 2n \mathbb{P}([X_n = n] \cap [W_n = 2]) \end{aligned}$$

en tenant compte des termes nuls, comme on l'a remarqué dans les questions précédentes.

13. On peut alors terminer les calculs grâce aux formules obtenues aux questions 10. et 11. :

$$\begin{aligned} E(X_n W_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \frac{2 \binom{n}{k}}{3^n} + 2n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3^n} \sum_{k=1}^{n-1} n \binom{n-1}{k-1} + \frac{2n}{3^n} \quad \text{d'après la formule sans nom} \\ &= \frac{2n}{3^n} \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} + \frac{2n}{3^n} \quad \text{changement d'indice } i = k - 1 \\ &= \frac{2n}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \quad \text{car } \binom{n-1}{n-1} = 1 \\ &= \frac{2n}{3^n} \times 2^{n-1} = n \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton avec } a = b = 1 \end{aligned}$$

La covariance du couple (X_n, W_n) est alors donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$\text{Cov}(X_n, W_n) = E(X_n W_n) - E(X_n)E(W_n) = n \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{n}{3} \times 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

14. Comme à la question 7.c), on obtient une covariance nulle : les variables aléatoires X_n et W_n sont non corrélées, tout en n'étant pas indépendantes pour autant. Cela illustre donc une fois de plus le fait que si l'indépendance implique la non-corrélation, la réciproque est fautive.