HEC, option économique - Épreuve de mathématiques du 27 avril 2016

Corrigé proposé par Romain Meurant, relu par Laurent Foubert
romain.meurant@lycee-descartes.ma / foubert.laurent@laposte.net

Exercice

1. (a) $A = X\,{}^tX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {x_1}^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & {x_2}^2 & \cdots & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & & & & \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & \cdots & {x_n}^2 \end{pmatrix}$

donc $A = (x_ix_j)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$.

La matrice réelle A étant symétrique, elle est diagonalisable.

$$\alpha = {}^tXX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n {x_i}^2.$$

(b) D'après le calcul précédent, en notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ f(e_i) = \begin{pmatrix} x_1x_i \\ x_2x_i \\ \vdots \\ x_nx_i \end{pmatrix} = x_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_iX.$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big) = \mathrm{Vect}(x_1X, \ldots, x_nX) = \mathrm{Vect}(X).$$

Le vecteur X étant non nul, (X) est une base de l'image de f.

Déterminons le noyau de f. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$AY = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_n(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) & = & 0 \end{array} \right. \iff x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0$$

(la dernière équivalence se justifie par le fait que les $x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas tous nuls).

Le noyau de f est de dimension $n-1$.

(c) $AX = \begin{pmatrix} {x_1}^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & {x_2}^2 & \cdots & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & & & & \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & \cdots & {x_n}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2) \\ x_2({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2) \\ \vdots \\ x_n({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2) \end{pmatrix}$

donc $AX = \alpha X$.

Ainsi, α ($\neq 0$ car les x_i ne sont pas tous nul) est valeur propre de A et X (qui est non nul) est un vecteur propre associé.

Par ailleurs, le noyau de A étant non nul, 0 est valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé $\mathrm{E}_A(0) = \mathrm{Ker}(A)$ est égale à $n-1$.

Puisque $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim \mathrm{E}_A(\lambda) \le n$ (c'est même une égalité car A est diagonalisable), il n'y a donc pas d'autre valeur propre et la dimension de l'espace propre associé à α est égale à 1.

2. (a) La matrice V est de rang p car formée de p vecteurs-colonnes linéairement indépendants.

D'après le théorème du rang :

$$\dim \ker(g) + \underbrace{\mathrm{rg}(g)}_{=p} = \underbrace{\dim \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}_{=p}$$

Le noyau de g est donc réduit au vecteur nul.

(b) — Si $VY = 0$, alors, en multipliant à gauche par ${}^tV$, on a : ${}^tVVY = 0$.

— Réciproquement, posons $X = VY \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et supposons que ${}^tVVY = 0$. En multipliant à gauche par ${}^tY$ et en utilisant la propriété de la transposée rappelée en introduction et le calcul de α fait en 1.(a), on obtient :

$$0 = {}^tY\,{}^tVVY = {}^t(VY)VY = {}^tXX = \sum_{i=1}^n {x_i}^2 \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donc $X = 0$.

(c) La question précédente prouve que $\mathrm{Ker}(V) = \mathrm{Ker}({}^tVV)$ et avec 2.(a), on en déduit que le noyau de ${}^tVV$ est nul, c'est-à-dire que la matrice carrée ${}^tVV \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est inversible.

Problème

1. (a) Pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}$:

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{2}x^{-1}+\frac{1}{2}y^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}}=\frac{2xy}{x+y}.$$

En tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, f est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\partial_1(f)(x,y)=\frac{2y(x+y)-2xy}{(x+y)^2}=\frac{2y^2}{(x+y)^2}\quad\text{et}\quad\partial_2(f)(x,y)=\frac{2x(x+y)-2xy}{(x+y)^2}=\frac{2x^2}{(x+y)^2}.$$

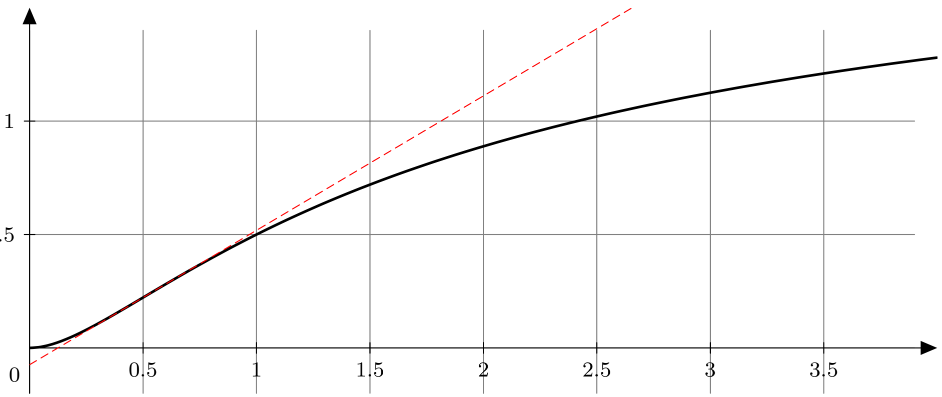
(b) Pour tout $t>0$:

$$w'(t)=\frac{2}{(1+t)^2},\quad U(t)=\frac{2t(1+t)-2t}{(1+t)^2}=2\left(\frac{t}{1+t}\right)^2,\quad U'(t)=\frac{4t}{(1+t)^3}>0$$

donc U est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
De plus :

$$U''(t)=\frac{4(1-2t)}{(1+t)^4}$$

La dérivée seconde de U s'annule en changeant de signe en $\dfrac{1}{2}$, donc le graphe de U admet un point d'inflexion de $\dfrac{1}{2}$ (et U n'est donc ni convexe ni concave).



(c) Pour $(x,y)\in\mathcal{D}$, $w(z)=\dfrac{2\dfrac{x}{y}}{1+\dfrac{x}{y}}=\dfrac{2x}{y+x}$ donc $yw(z)=f(x,y)$.

(d) De même, $w'(z)=\dfrac{2}{\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^2}=\dfrac{2y^2}{(x+y)^2}=\partial_1(f)(x,y)$ et $U(z)=2\left(\dfrac{\dfrac{x}{y}}{1+\dfrac{x}{y}}\right)^2=\dfrac{2x^2}{(y+x)^2}=\partial_2(f)(x,y)$.

2. (a) Pour tous $(x,y)\in\mathcal{D}$ et $\lambda>0$:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\Big(c(\lambda x)^\theta+(1-c)(\lambda y)^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}}=\left(\lambda^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\left(cx^\theta+(1-c)y^\theta\right)=\lambda f(x,y).$$

(b) $\partial_1(f)(x,y)=\dfrac{1}{\theta}\left(c\theta x^{\theta-1}\right)\Big(cx^\theta+(1-c)y^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}-1}=cx^{\theta-1}\Big(cx^\theta+(1-c)y^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}-1}$

et $\partial_2(f)(x,y)=(1-c)y^{\theta-1}\Big(cx^\theta+(1-c)y^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}-1}$

(c) — Soit $y>0$.
Vu son expression, la fonction $x\mapsto\partial_1(f)(x,y)$ est positive.
Comme $\theta<1$, les nombres θ et $\dfrac{1}{\theta}-1$ sont de même signe. La fonction $x\mapsto\Big(cx^\theta+(1-c)y^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}-1}$ est donc croissante comme composée de deux fonctions de même monotonie (si $\theta>0$, les fonctions $x\mapsto x^\theta$ et $t\mapsto t^{\frac{1}{\theta}-1}$ sont croissantes sur $]0,+\infty[$; sinon, elles sont décroissantes). La fonction $x\mapsto x^{\theta-1}$ est quant à elle décroissante (car $\theta-1<0$). Par conséquent, comme produit de deux fonctions positives, l'une croissante, l'autre décroissante, la fonction $x\mapsto\partial_1(f)(x,y)$ est décroissante.

— Pour $x>0$ fixé, le raisonnement est identique pour la fonction $y\mapsto\partial_2(f)(x,y)$: elle est positive et décroissante.

3. (a) $G(x,y)=\dfrac{\partial_1(f)(x,y)}{\partial_2(f)(x,y)}=\dfrac{cx^{\theta-1}\cancel{\Big(cx^\theta+(1-c)y^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}-1}}}{(1-c)y^{\theta-1}\cancel{\Big(cx^\theta+(1-c)y^\theta\Big)^{\frac{1}{\theta}-1}}}=\dfrac{c}{1-c}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\theta-1}$

donc : $G(x,y)=g(z)$.

(b) $s(z)=-\dfrac{\dfrac{c}{1-c}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\theta-1}}{\dfrac{x}{y}\times\dfrac{c}{1-c}(\theta-1)\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\theta-2}}=\dfrac{1}{1-\theta}$

Ce nombre ne dépend pas de z.

4. (a) Pour tout $t>0$: $w(t)=f(t,1)=\left(ct^\theta+(1-c)\right)^{\frac{1}{\theta}}$ d'où :

$$\begin{aligned} yw(z) &= y\left(c\left(\frac{x}{y}\right)^\theta + (1-c)\right)^{\frac{1}{\theta}} = \left[y^\theta\left(c\left(\frac{x}{y}\right)^\theta + (1-c)\right)\right]^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \left(cx^\theta + (1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} = f(x,y) \end{aligned}$$

(b) Pour tout $t > 0$:

$$w'(t) = \frac{1}{\theta}\left(c\theta t^{\theta-1}\right)\left(ct^\theta + (1-c)\right)^{\frac{1}{\theta}-1} = ct^{\theta-1}\left(ct^\theta + (1-c)\right)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

donc :

$$\begin{aligned} U(t) &= \left(ct^\theta + (1-c)\right)^{\frac{1}{\theta}} - tct^{\theta-1}\left(ct^\theta + (1-c)\right)^{\frac{1}{\theta}-1} \\ &= \left(ct^\theta + 1 - c\right)^{\frac{1}{\theta}-1} \times \left(\cancel{ct^\theta} + 1 - c - \cancel{ct^\theta}\right) \\ &= (1-c)\left(ct^\theta + 1 - c\right)^{\frac{1}{\theta}-1} \end{aligned}$$

La fonction U est croissante comme composée de deux fonctions de même monotonie (même explication qu'en 2.(c)).

Limites de U en 0^+ et en $+\infty$:
— Pour $\theta > 0$:
* $t^\theta \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc $U(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} (1-c)(1-c)^{\frac{1}{\theta}-1} = (1-c)^{\frac{1}{\theta}}$
* $t^\theta \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $U(t) \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\dfrac{1}{\theta} - 1 > 0$

— Pour $\theta < 0$, comme $\dfrac{1}{\theta} - 1 < 0$:
* $t^\theta \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc $U(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$
* $t^\theta \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $U(t) \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} (1-c)^{\frac{1}{\theta}}$

Convexité de U : pour tout $t > 0$,

$$U'(t) = (1-c)(1-\theta)ct^{\theta-1}\left(ct^\theta + 1 - c\right)^{\frac{1}{\theta}-2}$$

donc

$$\begin{aligned} U''(t) = (1-c)(1-\theta)c\Big[&(\theta-1)t^{\theta-2}\left(ct^\theta + 1 - c\right)^{\frac{1}{\theta}-2} \\ &+ t^{\theta-1}\left(\frac{1}{\theta} - 2\right)c\theta t^{\theta-1}\left(ct^\theta + 1 - c\right)^{\frac{1}{\theta}-3}\Big] \end{aligned}$$

L'expression entre crochets se factorise ainsi :

$$\underbrace{t^{\theta-2}\left(ct^\theta + 1 - c\right)^{\frac{1}{\theta}-3}}_{>0}\left[(\theta-1)\left(ct^\theta + 1 - c\right) + t^\theta(1-2\theta)c\right]$$

Ces derniers crochets se simplifient en :

$$-\theta ct^\theta + (\theta-1)(1-c)$$

et cette expression :
— est négative pour $\theta > 0$;
— s'annule en changeant de signe en $\left(\dfrac{(\theta-1)(1-c)}{c\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$ pour $\theta < 0$.

Par conséquent :
— pour $\theta > 0$, U est concave ;
— pour $\theta < 0$, le graphe de U admet un unique point d'inflexion.

5. (a) La fonction Ψ étant de classe $\mathcal{C}^2$, v l'est aussi.

Pour tout $t > 0$:

$$v'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Psi(t+h,1) - \Psi(t,1)}{h} = \partial_1(\Psi)(t,1)$$

Puisque $t \mapsto \partial_1(\Psi)(t,1)$ est strictement positive et strictement décroissante :
— v' est strictement positive, donc v est strictement croissante ;
— v' est décroissante, donc v est concave.

(b) La fonction φ est dérivable et :

$$\forall t > 0,\ \varphi'(t) = v'(t) - v'(t) - tv''(t) = -t\underbrace{v''(t)}_{\substack{\le 0 \text{ car } v \\ \text{est concave}}} \ge 0$$

Ainsi, φ est croissante et on en déduit que :

$$\forall t > 0,\ \varphi(t) \ge \lim_{0^+}\varphi = \mu$$

ce qui prouve :
— que φ est positive (car $\mu \ge 0$) ;
— avec $t = 1$ que : $\mu \le \varphi(1) = v(1) - v'(1) = \underbrace{\Psi(1,1)}_{=1} - \underbrace{\partial_1(\Psi)(1,1)}_{>0} < 1$ donc $\mu < 1$.

(c) La propriété d'homogénéité de Ψ donne :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ yv(z) = y\Psi\left(\frac{x}{y}, 1\right) = \Psi\left(y\frac{x}{y}, y\right) = \Psi(x,y).$$

6. (a) Dérivons l'égalité $\Psi(x,y) = yv\left(\dfrac{x}{y}\right)$:
— par rapport à la première variable :

$$\partial_1(\Psi)(x,y) = y\frac{1}{y}v'\left(\frac{x}{y}\right) = v'(z)$$

— par rapport à la seconde variable :

$$\partial_2(\Psi)(x,y) = v\left(\frac{x}{y}\right) + y\left(-\frac{x}{y^2}\right)v'\left(\frac{x}{y}\right) = v(z) - zv'(z) = \varphi(z)$$

On a donc bien, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$:

$$\frac{\partial_1(\Psi)(x,y)}{\partial_2(\Psi)(x,y)} = \frac{v'(z)}{\varphi(z)} = h(z).$$

(b) Comme h est positive (car v' et φ le sont), le signe de σ est opposé à celui de h'. Pour tout $t > 0$:

$$h'(t) = \frac{v''(t)\varphi(t) - v'(t)\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2}$$

Or :

$$v''(t)\varphi(t) - v'(t)\varphi'(t) = v''(t)\big[v(t) - tv'(t)\big] - v'(t)\big[-tv''(t)\big] = v''(t)v(t) = \underbrace{v''(t)}_{\substack{\leq 0 \text{ car} \\ v \text{ est concave}}} \times \underbrace{\Psi(t,1)}_{\geq 0} \leq 0$$

On en déduit que σ est positive.

7. (a) Pour tout $t > 0$:

$$\ell'(t) = (1-r)t^{-r}h(t) + t^{1-r}h'(t) = t^{-r}\underbrace{\left(\frac{1}{\sigma_0}h(t) + th'(t)\right)}_{=0} = 0$$

La fonction ℓ est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$, égale à $\ell(1) = 1^{1-r}h(1) = h(1)$, d'où l'égalité demandée :

$$\forall t > 0,\ h(t) = h(1)t^{r-1}.$$

(b) On a :

$$v(t) = \left(\frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} \iff \big(v(t)\big)^r = \frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)} \iff \frac{\big(v(t)\big)^r}{1 + h(1)t^r} = \frac{1}{1 + h(1)}$$

La question revient donc à montrer que la fonction $m : t \mapsto \dfrac{\big(v(t)\big)^r}{1 + h(1)t^r}$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ égale à $\dfrac{1}{1 + h(1)}$.

— Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} m'(t) &= \frac{rv'(t)\big(v(t)\big)^{r-1}\big(1 + h(1)t^r\big) - \big(v(t)\big)^r h(1)rt^{r-1}}{(1 + h(1)t^r)^2} \\ &= r\big(v(t)\big)^{r-1}\frac{v'(t)\big(1 + h(1)t^r\big) - v(t)h(1)t^{r-1}}{(1 + h(1)t^r)^2} \\ &= r\big(v(t)\big)^{r-1}\frac{v'(t) + h(1)t^{r-1}\big(tv'(t) - v(t)\big)}{(1 + h(1)t^r)^2} \end{aligned}$$

On reconnaît $-\varphi(t)$ dans les parenthèses du numérateur ; de plus, en utilisant $v'(t) = h(t)\varphi(t)$ (question 6.(a)), on obtient :

$$m'(t) = r\big(v(t)\big)^{r-1}\frac{h(t)\varphi(t) - \overbrace{h(1)t^{r-1}}^{=h(t) \text{ d'après } 7.(a)}\varphi(t)}{(1 + h(1)t^{r-1})^2} = 0$$

— Ainsi, m est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, égale à $m(1) = \dfrac{\big(v(1)\big)^r}{1 + h(1)} = \dfrac{1}{1 + h(1)}$.

(c) D'après 5.(c) et 7.(b), pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$:

$$\Psi(x,y) = yv\left(\frac{x}{y}\right) = y\left(\frac{1 + h(1)\dfrac{x^r}{y^r}}{1 + h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{y^r + h(1)x^r}{1 + h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} = (ax^r + (1-a)y^r)^{\frac{1}{r}}$$

avec $a = \dfrac{h(1)}{1 + h(1)}$.

Cette constante a est bien dans l'intervalle $]0,1[$ car $h(1) > 0$ (h est strictement positive car v' et φ le sont d'après 5.(a) et (b)).

(d) La question 3.(b) prouve que toute fonction de production CES est à élasticité de substitution constante ; réciproquement, on a prouvé en 7.(c) que toute fonction de production à élasticité de substitution constante a la forme d'une fonction de production CES.

8. (a)

$$H_t(r) = \frac{1}{r}\ln\left(at^r + 1 - a\right) = \frac{1}{r}\ln\left(1 + a\left(\mathrm{e}^{r\ln(t)} - 1\right)\right)$$

En utilisant les équivalents classiques $\mathrm{e}^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\ln(1+v) \underset{v\to 0}{\sim} v$, on obtient :

$$H_t(r) \underset{r\to 0}{\sim} \frac{1}{r}ar\ln(t) = a\ln(t)$$

D'où la limite de S_t en 0 :

$$S_t(r) = \exp(H_t(r)) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{a\ln(t)} = t^a.$$

(b) On en déduit que, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, $F(x,y) = y\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = x^a y^{1-a}$.

9. (a) Une « transformée affine » d'une variable aléatoire suivant une loi normale suit une loi normale ($\star$). Il suffit alors de calculer $\mathrm{E}(T_i)$ et $\mathrm{V}(T_i)$ pour déterminer la loi de T_i :

$$\mathrm{E}(T_i) = \mathrm{E}(au_i + b + R_i) = au_i + b + \underbrace{\mathrm{E}(R_i)}_{=0} = au_i + b;$$

$$\mathrm{V}(T_i) = \mathrm{V}(au_i + b + R_i) = \mathrm{V}(R_i) = \sigma^2.$$

D'où :

$$T_i \hookrightarrow \mathcal{N}(au_i + b, \sigma^2)$$

On peut aussi redémontrer $(\star)$ *dans le cas de* T_i *et obtenir ainsi directement les paramètres.*
Notons F_{T_i} *la fonction de répartition de* T_i*. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$F_{T_i}(x) = P(R_i \leq x - au_i - b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x-au_i-b} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

Avec le changement de variable affine $u = t + au_i + b$ $(du = dt)$*, on obtient :*

$$F_{T_i}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(u - au_i - b)^2}{2\sigma^2}\right) du$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(au_i + b, \sigma^2)$*.*

(b) Les variables $R_1, R_2, \ldots, R_n$ étant indépendantes et chaque variable T_i s'exprimant en fonction de R_i uniquement, le lemme des coalitions nous donne l'indépendance des variables $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

10. (a) Soit $(a, b) \in \mathcal{F}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\ln(\varphi_i(t_i)) = -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\big(t_i - (au_i + b)\big)^2$$

D'où :

$$\partial_1(M)(a, b) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2\sigma^2} 2(-u_i)(t_i - au_i - b) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} u_i(t_i - au_i - b)$$

$$\text{et de même :} \quad \partial_2(M)(a, b) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(t_i - au_i - b)$$

Le gradient de M en (a, b) est donc :

$$\nabla(M)(a, b) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(t_i - au_i - b)\begin{pmatrix} u_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Les points critiques de M sont ceux qui annulent le gradient :

$$\nabla(M)(a, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i t_i - a\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} u_i & = & 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i - a\sum_{i=1}^{n} u_i - nb & = & 0 \end{array}\right. \qquad (\star)$$

Il s'agit d'un système de deux équations linéaires. Montrer l'existence et l'unicité de la solution (sans la calculer... puisque c'est l'objet de la question suivante) revient à montrer que :

$$n\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2.$$

Solution hors-programme :

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *muni du produit scalaire usuel donne :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires puisque, comme ${s_u}^2 \neq 0$*, les* $u_1, \ldots, u_n$ *ne sont pas tous égaux ; l'inégalité est donc stricte.*

(c) Résolvons le système :

$$(\star) \iff \left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i t_i - a\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 - bn\bar{u} & = & 0 \\ n\bar{t} - an\bar{u} - nb & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i t_i - a\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 - bn\bar{u} & = & 0 \\ \bar{t} - a\bar{u} - b & = & 0 \end{array}\right.$$

Par ailleurs :

$$n\ \mathrm{Cov}(u, t) = \sum (u_i - \bar{u})(t_i - \bar{t}) = \sum u_i t_i - n\bar{u}\bar{t}$$

et :

$$n{s_u}^2 = \sum (u_i - \bar{u})^2 = \sum {u_i}^2 - 2n\bar{u}^2 + n\bar{u}^2 = \sum {u_i}^2 - n\bar{u}^2$$

On obtient alors en remplaçant dans le système :

$$(\star) \iff \left\{\begin{array}{rcl} n\ \mathrm{Cov}(u, t) + n\bar{u}\bar{t} - a\left(n{s_u}^2 + n\bar{u}^2\right) - bn\bar{u} & = & 0 \\ \bar{t} - a\bar{u} - b & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{Cov}(u, t) - a{s_u}^2 + \bar{u}\,(\bar{t} - a\bar{u} - b) & = & 0 \\ \bar{t} - a\bar{u} - b & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{Cov}(u, t) - a{s_u}^2 & = & 0 \\ \bar{t} - a\bar{u} & = & b \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{\mathrm{Cov}(u, t)}{{s_u}^2} \\ b & = & \bar{t} - \dfrac{\mathrm{Cov}(u, t)}{{s_u}^2}\bar{u} \end{array}\right.$$

L'unique point critique de M est donc $(\hat{a},\hat{b}) = \left(\dfrac{\mathrm{Cov}(u,t)}{{s_u}^2},\ \bar{t} - \dfrac{\mathrm{Cov}(u,t)}{{s_u}^2}\bar{u}\right)$.

11. (a) Calculons les dérivées partielles d'ordre 2 de M :

$$\partial^2_{11}(M)(a,b) = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n {u_i}^2 = -\frac{n}{\sigma^2}\left({s_u}^2+\bar{u}^2\right)$$

$$\partial^2_{12}(M)(a,b) = \partial^2_{21}(M)(a,b) = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n u_i = -\frac{n}{\sigma^2}\bar{u}$$

$$\partial^2_{22}(M)(a,b) = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n 1 = -\frac{n}{\sigma^2}$$

D'où la matrice Hessienne de M en (a,b) :

$$\nabla^2(M)(a,b) = -\frac{n}{\sigma^2}\underbrace{\begin{pmatrix} {s_u}^2+\bar{u}^2 & \bar{u} \\ \bar{u} & 1\end{pmatrix}}_{=A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

qui est constante.

(b) Déterminons le signe des valeurs propres de A :

$$\begin{aligned} A-\lambda I_2 \text{ est inversible} \quad &\iff \quad \left({s_u}^2+\bar{u}^2-\lambda\right)(1-\lambda)-\bar{u}^2 = 0 \\ &\iff \quad \lambda^2 - \left(\bar{u}^2+{s_u}^2+1\right)\lambda + {s_u}^2 = 0\end{aligned}$$

Les racines λ_1,λ_2 de ce polynôme de degré 2 en λ vérifient :

$$\lambda_1\lambda_2 = {s_u}^2 > 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1+\lambda_2 = \bar{u}^2+{s_u}^2+1 > 0$$

donc sont strictement positives *(Inutile de calculer les valeurs propres !)*.

Les valeurs propres de $\nabla^2(M)(\hat{a},\hat{b})$ sont $-\dfrac{n}{\sigma^2}\lambda_1$ et $-\dfrac{n}{\sigma^2}\lambda_2$: elles sont strictement négatives ; par conséquent, M admet en $(\hat{a},\hat{b})$ un maximum local.

12. Pour tout $(h,k)\in(\mathbb{R}^*)^2$ tel que $a+h\in]0,1[$:

$$\begin{aligned} M(\hat{a}+h,\hat{b}+k) - M(\hat{a},\hat{b}) &= \cancel{-n\ln(\sigma\sqrt{2\pi})} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n\left(t_i-(\hat{a}+h)u_i-\hat{b}-k\right)^2 \\ &\qquad \cancel{+\ln(\sigma\sqrt{2\pi})} + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n\left(t_i-\hat{a}u_i-\hat{b}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n\left[\left(t_i-\hat{a}u_i-\hat{b}\right)^2 - \left(t_i-(\hat{a}+h)u_i-\hat{b}-k\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n\left[\left(t_i-\hat{a}u_i-\hat{b}\right)^2 - \left((t_i-\hat{a}u_i-\hat{b})-(hu_i+k)\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(hu_i+k)\left(2\left(t_i-\hat{a}u_i-\hat{b}\right)-(hu_i+k)\right)\end{aligned}$$

Développons cette somme :

$$\begin{aligned} \dots \quad &= \frac{1}{2\sigma^2}\Big(2h\sum u_it_i - 2h\hat{a}\sum {u_i}^2 - 2h\hat{b}\sum u_i + 2k\sum t_i - 2k\hat{a}\sum u_i - 2nk\hat{b} \\ &\qquad -h^2\sum {u_i}^2 - 2hk\sum u_i - nk^2\Big) \\ &= \frac{1}{2\sigma^2}\Big(2hn\left(\mathrm{Cov}(u,t)+\bar{u}\bar{t}\right) - 2h\hat{a}n\left({s_u}^2+\bar{u}^2\right) - 2h\hat{b}n\bar{u} + 2kn\bar{t} - 2k\hat{a}n\bar{u} - 2nk\hat{b} \\ &\qquad -h^2n\left({s_u}^2+\bar{u}^2\right) - 2hkn\bar{u} - nk^2\Big)\end{aligned}$$

En utilisant $\hat{a} = \dfrac{\mathrm{Cov}(u,t)}{{s_u}^2}$ et $\hat{b} = \bar{t}-\hat{a}\bar{u}$:

$$\begin{aligned} \dots \quad &= \frac{1}{2\sigma^2}\Big(2hn\left(\mathrm{Cov}(u,t)+\bar{u}\bar{t}\right) - 2h\frac{\mathrm{Cov}(u,t)}{{s_u}^2}n\left({s_u}^2+\bar{u}^2\right) - 2h(\bar{t}-\hat{a}\bar{u})n\bar{u} + 2kn\bar{t} \\ &\qquad -2k\hat{a}n\bar{u} - 2nk(\bar{t}-\hat{a}\bar{u}) - h^2n\left({s_u}^2+\bar{u}^2\right) - 2hkn\bar{u} - nk^2\Big)\end{aligned}$$

Avec les simplifications colorées ci-dessus et ci-dessous :

$$\begin{aligned} \dots \quad &= \frac{1}{2\sigma^2}\Bigg(2hn\bar{u}\bar{t} - 2h\frac{\mathrm{Cov}(u,t)}{{s_u}^2}n\bar{u}^2 - 2hn\left(\bar{t}-\frac{\mathrm{Cov}(u,t)}{{s_u}^2}\bar{u}\right)\bar{u} \\ &\qquad -h^2n{s_u}^2\underbrace{-h^2n\bar{u}^2-2hkn\bar{u}-nk^2}_{=-n(h\bar{u}+k)^2}\Bigg) \\ &= -\frac{n}{2\sigma^2}\left(h^2{s_u}^2+(h\bar{u}+k)^2\right) \quad \leq 0\end{aligned}$$

Autre solution (beaucoup plus rapide mais hors-programme).

La formule de Taylor appliquée à M à l'ordre 2 en $(\hat{a},\hat{b})$ s'écrit :

$$M(\hat{a}+h,\hat{b}+k) = M(\hat{a},\hat{b}) + \underbrace{{}^t\nabla(M)(\hat{a},\hat{b})}_{=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}}.\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix}.\nabla^2(M)(\hat{a},\hat{b}).\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$$

(le reste étant nul car M est polynomiale de degré 2), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} M(\hat{a}+h,\hat{b}+k) - M(\hat{a},\hat{b}) &= -\frac{n}{2\sigma^2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}{s_u}^2+\bar{u}^2 & \bar{u}\\ \bar{u} & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\\ &= -\frac{n}{2\sigma^2}\left(({s_u}^2+u^2)h^2+2\bar{u}hk+k^2\right)\\ &= -\frac{n}{2\sigma^2}\left(h^2{s_u}^2+(h\bar{u}+k)^2\right). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall (h,k)\in(\mathbb{R}^*)^2 \text{ tel que } a+h\in]0,1[,\ M(\hat{a},\hat{b})\geq M(\hat{a}+h,\hat{b}+k).$$

c'est-à-dire :

$$\forall (a,b)\in\mathcal{F},\ M(\hat{a},\hat{b})\geq M(a,b)$$

ce qui prouve que le maximum de M en $(\hat{a},\hat{b})$ est global.

13. *Le point (0.44, 2.25) est mal placé sur la figure de l'énoncé original.*

   (a) On lit sur la ligne (4) du programme une équation de la droite de régression de t en u :

$$t = \frac{\mathrm{Cov}(u,t)}{{s_u}^2}u + \bar{t} - \frac{\mathrm{Cov}(u,t)}{{s_u}^2}\bar{u}$$

   et on en déduit par symétrie que la droite de régression de u en t a pour équation :

$$u = \frac{\mathrm{Cov}(u,t)}{{s_t}^2}t + \bar{u} - \frac{\mathrm{Cov}(u,t)}{{s_t}^2}\bar{t}$$

   La manière la plus naturelle de la dessiner serait donc :

```
plot2d(corr(u,t,1)/variance(t)*t+mean(u)-corr(u,t,1)/
        variance(t)*mean(t),t)
```

   mais l'énoncé nous impose de fournir `u` comme premier argument à la commande `plot2d` (quelle complication inutile !) ; il faut donc transformer l'équation :

$$u = \alpha t + \beta \longleftrightarrow t = \frac{1}{\alpha}(u-\beta)$$

   ce qui donne :

$$t = \frac{{s_t}^2}{\mathrm{Cov}(u,t)}(u-\bar{u})+\bar{t}$$

d'où la ligne (5) complétée :

```
plot2d(u,variance(t)/corr(u,t,1)*(u-mean(u))+mean(t))
```

   (b) Le point d'intersection des deux droites de régression est le point moyen du nuage, c'est-à-dire la point de coordonnées $(\bar{u},\bar{t})$.

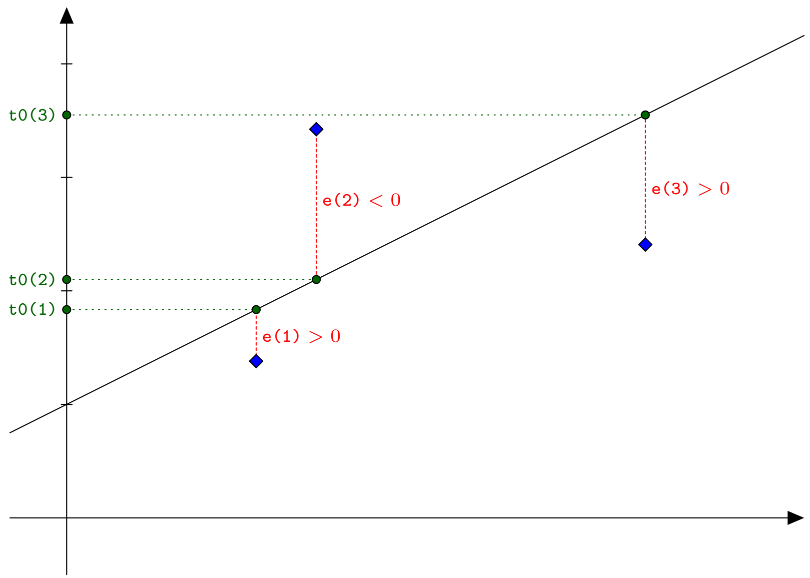
   (c) Graphiquement, on lit : $\bar{u}\approx 2.2$ et $\bar{t}\approx 2.8$ (`Scilab` donne respectivement 2.2325 et 2.885625).

   (d) Le coefficient de corrélation linéaire de ce nuage de points est proche de 1 car les points sont « presque alignés », sur une droite de coefficient directeur positif.

   (e) On reconnaît dans les lignes (6) et (7) les coefficients de l'équation affine de la droite de régression de t et u :

$$t = \underbrace{\frac{\mathrm{Cov}(u,t)}{{s_u}^2}}_{a_0}u + \underbrace{\bar{t} - \frac{\mathrm{Cov}(u,t)}{{s_u}^2}\bar{u}}_{b_0}$$

   La ligne (8) calcule les ordonnées des points ayant même abscisse que ceux du nuage du premier graphique et situés sur cette droite. La ligne (9) calcule la différence entre l'ordonnée du point obtenu et l'ordonnée du point original.



   Enfin les lignes (10) et (11) dessinent 16 points dont les ordonnées sont ces différences.
   Les points obtenus sur ce graphique semblent d'ordonnées nulles en moyenne, ce

que l'on peut vérifier par le calcul :

$$\bar{e} = \overline{t_0 - t} = \bar{t_0} - \bar{t} = \overline{a_0 \; u + b_0} - \bar{t} = \underbrace{\overline{a_0 \; u + b_0 - t} = 0}_{\text{équation de la droite de régression de } t \text{ en } u}$$

14. (a) Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(A_n) &= \frac{1}{n{s_u}^2} \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u}) \, \mathrm{E}(T_i) \\
&= \frac{1}{n{s_u}^2} \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u}) \, (au_i + b) \\
&= \frac{1}{n{s_u}^2} \sum_{i=1}^{n} \left(a{u_i}^2 - au_i\bar{u} + bu_i - b\bar{u} \right) \\
&= \frac{1}{n{s_u}^2} \left(a \sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 - an\bar{u}^2 + \cancel{nb\bar{u}} - \cancel{nb\bar{u}} \right) \\
&= \frac{1}{n{s_u}^2} a \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 - n\bar{u}^2 \right)}_{= n{s_u}^2 \text{ (voir 10.(c))}} \quad = \quad a.
\end{aligned}$$

Les variables $T_1, \ldots, T_n$ étant indépendantes :

$$\mathrm{V}(A_n) = \left(\frac{1}{n{s_u}^2} \right)^2 \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u})^2 \, \mathrm{V}(T_i) = \left(\frac{1}{n{s_u}^2} \right)^2 \sigma^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u})^2}_{= n{s_u}^2} = \frac{\sigma^2}{n{s_u}^2}$$

Comme combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi normale, A_n suit une loi normale dont les paramètres ont été calculés ci-dessus :

$$A_n \hookrightarrow \mathcal{N} \left(a, \frac{\sigma^2}{n{s_u}^2} \right).$$

Remarque : A_n est un estimateur sans biais et convergent de a.

(b) Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A_n - \varepsilon \leq a \leq A_n + \varepsilon) &= \mathrm{P}(-\varepsilon \leq A_n - a \leq \varepsilon) \\
&= \mathrm{P} \left(-\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}} \leq \frac{A_n - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}} \leq \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}} \right) \\
&= \mathrm{P} \left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{n}s_u}{\sigma}(A_n - a)}_{\hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma} \right) \\
&= \Phi \left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma} \right) - \Phi \left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma} \right) \\
&= 2\Phi \left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma} \right) - 1 \qquad \text{(par propriété de } \Phi)
\end{aligned}$$

On a alors :

$$2\Phi \left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma} \right) - 1 = 1 - \alpha \iff \underbrace{\Phi \left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma} \right) = \underbrace{1 - \frac{\alpha}{2}}_{= \Phi(d_\alpha)} \iff \frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma} = d_\alpha}_{\Phi \text{ étant bijective}}$$

En conclusion :

$$\left[A_n - \frac{d_\alpha \sigma}{\sqrt{n}s_u}, A_n + \frac{d_\alpha \sigma}{\sqrt{n}s_u} \right]$$

est un intervalle de confiance du paramètre a au niveau $1 - \alpha$.